Референциальная и инференциальная многозначность

Девяткин Л.Ю.

Институт философии РАН
Сектор логики

2022

План

- Тезис Сушко.
- Г. Малиновский: q-следование
- Референциальные и инференциальные значения
- С. Франковский: p-следование
- p-следование и q-следование — обобщение
- r-следование и двухзначные характеризации инференциально многозначных логик
- Выводы

Тезис Сушко

- Suszko R. The Fregean Axiom and Polish Mathematical Logic in the 1920s // Studia Logica. 1977. Vol. 36. No. 4. P. 377–380.
- Семантическое допущение, что все истинные (и, аналогично, ложные) предложения описывают одно и то же, то есть, имеют общий референт (*bedeutung*) называется Аксиомой Фреге.
- Построение так называемых многозначных логик Яном Лукасевичем было практическим отказом от Аксиомы Фреге.
- Лукасевич — главный виновник поразительного концептуального обмана, тянущегося в математической логике по сей день.

Тезис Сушко

- Многозначная логика базируется на алгебраических оценках формул. Посредством морфизмов формулам приписываются значения из множеств-носителей соответствующих алгебр. Добавление к таким алгебам классов выделенных значений позволяет определить истинность, выполнимость, отношение следования.
- При таком подходе к построению логик, значения в них — это *алгебраические значения*.
- Когда какая-либо логика рассматривается как отношение выводимости, всегда можно найти множество TV функций с областью значений $\{0, 1\}$, определенных для всех формул, которое отвечает следующему условию: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$, е.т.е. для всех t из TV верно, что $t(\alpha_1) = \cdots = t(\alpha_n) = 1$ влечет $t(\beta) = 1$.
- Поэтому каждая логика *логически* двузначна.

Пропозициональная логика

- Называем *пропозициональным языком* алгебру формул $\mathcal{L} = \langle Fm(\mathcal{L}), \S_1, \S_2, \dots \rangle$, свободная в классе всех алгебр аналогичной сигнатуры.
- $\vdash$ — *структурное отношение следования по Тарскому* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X, Y \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha, \beta \in Fm(\mathcal{L})$:
  - Если $\alpha \in X$ то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);
  - Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность);
  - Если $X \vdash \alpha$ для всех $\alpha \in Y$, и $X \cup Y \vdash \beta$, то $X \vdash \beta$ (транзитивность);
  - $X \vdash \alpha \Longrightarrow \varepsilon(X) \vdash \varepsilon(\alpha)$ для каждого эндоморфизма ε языка $\mathcal{L}$ (структурность).
- Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык, и $\vdash$ — структурное отношение следования на $\mathcal{L}$, говорим, что $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *структурная логика по Тарскому*.

Многозначная логика

- *Логическая матрица* — это структура $M = \langle A, f_1, f_2, \ldots, D\rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots\rangle$ — алгебра, а D — подмножество A.
- Если $\mathcal{L} = \langle Fm(\mathcal{L}), \S_1, \S_2, \ldots\rangle$ и $\mathcal{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots\rangle$ подобны, говорим, что M — *матрица для* $\mathcal{L}$.
- Гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в M. $Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ — множество всех таких оценок.
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \subseteq D$.
- $\mathcal{M}$ — *характеристическая матрица* для $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$, е.т.е. $\vdash = \vDash_M$. Класс матриц K характеризует $\mathbf{L}$, е.т.е. $\vdash = \bigcap\{\vDash_M | M \in K\}$.
- Wójcicki R. Some Remarks on the Consequence Operation in Sentential Logics // Fundamenta Mathematicae. 1970. Vol. 68. P. 269–279.
- Каждая структурная логика по Тарскому характеризуется классом логических матриц с не более чем счетным числом значений.

Редукция Сушко

- Malinowski G. Many-valued Logics. Clarendon Press, Oxford, 1993. (§ 10.1)
- Пусть $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык, и $M = \{\mathcal{A}, D\}$ — логическая матрица для $\mathcal{L}$. Определим множество TV_M:
$$TV_M = \{t_h | t_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$
$$t_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \notin D. \end{cases}$$
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $t \in TV_M$ верно, что $t(\alpha) = 1$, коль скоро $t(X) \subseteq \{1\}$.
- Поскольку каждая структурная логика по Тарскому характеризуется классом логических матриц с не более чем счетным числом значений, каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle\{0, 1\}, TV_M\rangle$.
- Условимся в дальнейшем называть такие структуры *s-интерпретациями*.

Г. Малиновский: Отношение q-следования

- Malinowski G. Inferential Many-Valuedness. In: Philosophical Logic in Poland. Synthese Library, Vol. 228. Ed. J. Woleński. Dordrecht: Springer, 1994. P. 75–84.
- Логическая двузначность <...> связана, очевидно, с разделением универсума интерпретации на два подмножества элементов: выделенные и все остальные.
- Также оказалось, что при предположении структурности понятие следствия Тарского можно рассматривать как «бивалентную» операцию вывода.
- Тогда естественным образом возникает вопрос, возможна ли вообще логическая многозначность. Мы даем утвердительный ответ на этот вопрос, обращаясь к формальной схеме рассуждений, допускающей правила вывода, которые ведут от не отвергаемых предположений к принимаемым выводам.

Г. Малиновский: Отношение q-следования

- $\vdash$ — *q-следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha, \beta \in Fm(\mathcal{L})$:
  - Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность);
  - Если $X \cup \{\alpha | X \vdash \alpha\} \vdash \beta$, то $X, Y \vdash \beta$. (квазитранзитивность).
- Если $\vdash$ — структурное q-следование, называем $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *структурной q-логикой.*
- *q-матрица* — это структура вида $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n \rangle$ — алгебра, $\overline{D}, D \subseteq A$, и $\overline{D} \cap D = \varnothing$.
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

Г. Малиновский: Отношение q-следования

- Когда $\overline{D} \cup D = A$, q-следование совпадает с обычным следованием.
- Когда $\overline{D} \cup D \neq A$, редукция Сушко для соответствующей матрицы невозможна. Однако можно построить ее трехзначный аналог:
$$QV_M = \{q_h | q_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$
$$q_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D \\ 1/2, h(\alpha) \in A \setminus \overline{D} \cup D \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \in \overline{D}. \end{cases}$$
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $q \in QV_M$ верно, что $q(\alpha) = 1$, коль скоро $q(X) \subseteq \{1/2, 1\}$.
- Каждая структурная q-логика характеризуется классом q-матриц с не более чем счетным числом значений.
- Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle \{0, 1/2, 1\}, QV_M \rangle$.
- Условимся в дальнейшем называть такие структуры *q-интерпретациями*.

Референциальная и инференциальная многозначность

- Г. Малиновский вводит понятие инференциальной многозначности, но не дает явного определения инференциального *значения*.
- Понятие инференциальной многозначности Малиновский связывает с тем, что, в отличие от следования по Тарскому, q-следование, в общем случае, нельзя рассматривать как «бивалентную» операцию вывода.
- При этом, различия между двумя следованиями связаны с тем, что в обычной логической матрице универсум разбивается на два подмножества, а в q-матрицах на три: выделенные значения (класс D), отвергаемые значения (класс $\overline{D}$), все остальные значения $(A \setminus \overline{D} \cup D)$.

Референциальная и инференциальная многозначность

- Если D — множество объектов, обладающих свойством «быть выделенным», а $\overline{D}$ — множество объектов, обладающих свойством «быть отвергаемым», можно также трактовать D и $\overline{D}$ как обозначения возможных *свойств*, которые могут быть присущи элементам A.
- В этом случае можно определить референциальные и инференциальные значения следующим образом.
- *Референциальные значения* — это объекты, выступающие денотатами предложений.
- *Инференциальные значения* — это свойства объектов, выступающих денотатами предложений.
- В классическом случае это различие стирается, так как есть только два референциальных значения — 0 и 1, а также только два инференциальных значения — «выделенность» и «невыделенность».

С. Франковский: Отношение p-следования

- Frankowski S., p-consequence Versus q-consequence Operations // Bulletin of the Section of Logic. 2004. Vol. 33. P. 41–52.
- $\vdash$ — *p-следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha \in Fm(\mathcal{L})$:
  - Если $\alpha \in X$ то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);
  - Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность);
- Если $\vdash$ — структурное p-следование, называем $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *структурной p-логикой.*
- *p-матрица* — это структура вида $M = \langle \mathcal{A}, D_1, D_* \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n \rangle$ — алгебра, и $D_1 \subseteq D_* \subseteq A$.
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D_*$, коль скоро $h(X) \subseteq D_1$.

С. Франковский: Отношение p-следования

- В p-матрицах снова видим три инференциальных значения: D_1 — выделенные значения, D_* — «правдоподобные» (*plausible*) значения, $A \setminus D_*$ — прочие значения.
- Обратим внимание, что здесь, в отличие от q-матриц, одно референциальное значение может обладать одновременно двумя свойствами, поскольку $D_1 \subseteq D_*$.
- Можно также определить p-следование, используя отвергаемые значения вместо правдоподобных.
- $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$, $\overline{D} = A \setminus D_1$, $D = D_*$.
- $X \models_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.

С. Франковский: Отношение p-следования

- Когда $D_1 = D_*$, p-следование совпадает с обычным следованием.
- Когда $D_1 \neq D_*$, редукция Сушко для соответствующей матрицы невозможна. Однако можно построить ее трехзначный аналог:

$$PV_M = \{p_h | p_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$

$$p_h(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } h(\alpha) \in D_1 \\ 1/2, h(\alpha) \in D_* \setminus D_1 \\ 0, \text{ если } h(\alpha) \in A \setminus D_*. \end{cases}$$

- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $p \in PV_M$ верно, что $p(\alpha) \in \{1/2, 1\}$, коль скоро $p(X) \subseteq \{1\}$.
- Каждая структурная p-логика характеризуется классом p-матриц с не более чем счетным числом значений.
- Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle\{0, 1/2, 1\}, PV_M\rangle$.
- Условимся в дальнейшем называть такие структуры *p-интерпретациями*.

p-следование и q-следование — обобщение

- Blasio C., Marcos J., Wansing H. An Inferentially Many-Valued Two-Dimensional Notion of Entailment // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46. No. 3–4. P. 233–262.
- $\vdash$ — *b-следование* на $\mathcal{L}$, когда для всех $X \subseteq Fm(\mathcal{L})$, $\alpha \in Fm(\mathcal{L})$:
  - Если $X \vdash \alpha$, то $X \cup Y \vdash \alpha$ (монотонность).
- Если $\vdash$ — структурное b-следование, называем $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *структурной b-логикой*.
- b-матрица: $M = \langle \mathcal{A}, \overline{D}, D \rangle$, $\overline{D} \cap D \neq \varnothing$, $\overline{D} \cup D \neq A$.
- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в M верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.
- Здесь мы имеем дело с четырьмя инференциальными значениями: «быть выделенным», «быть отвергаемым», «быть выделенным и отвергаемым одновременно», «не быть ни выделенным, ни отвергаемым».

p-следование и q-следование — обобщение

- В общем случае, для b-логик невозможны ни редукция Сушко, ни ее трехзначные аналоги. Однако можно построить четырехзначный вариант такой редукции:

$$BV_M = \{b_h | b_h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})\}, \text{ где}$$

$$b_h(a) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ если } h(\alpha) \in D \setminus (D \cap \overline{D}) \\ \mathbf{b}, h(\alpha) \in D \cap \overline{D} \\ \mathbf{n}, \text{ если } h(\alpha) \in A \setminus (D \cup \overline{D}) \\ \mathbf{f}, \text{ если } h(\alpha) \in \overline{D} \setminus (D \cap \overline{D}). \end{cases}$$

- $X \vDash_M \alpha$, е.т.е. для каждого $b \in BV_M$ верно, что $p(\alpha) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$, коль скоро $p(X) \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$.
- Каждая структурная b-логика характеризуется классом b-матриц с не более чем счетным числом значений.
- Поэтому каждая такая логика характеризуется и классом структур вида $\langle \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}, BV_M \rangle$.
- Условимся в дальнейшем называть такие структуры *b-интерпретациями*.

p-следование и q-следование — обобщение

- French R., Ripley D. Valuations: Bi, Tri, and Tetra // Studia Logica. 2019. Vol. 107. No. 6. P. 1313–1346.
- Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — логика.
- $\mathbf{L}$ характеризуется классом s-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ рефлексивно, монотонно и транзитивно.
- $\mathbf{L}$ характеризуется классом q-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ монотонно и транзитивно.
- $\mathbf{L}$ характеризуется классом p-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ рефлексивно и монотонно.
- $\mathbf{L}$ характеризуется классом b-интерпретаций, е.т.е. $\vdash$ монотонно.

r-матрицы

- Рассмотрим стандартную матрицу классической логики высказываний $C_2 = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \{1\} \rangle$.

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

- Построим ее произведение на саму себя: $C_2^2 = \langle \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_\otimes, \wedge_\otimes, \supset_\otimes, \neg_\otimes, \{(1,1)\} \rangle$.
- Операции определяются покомпонентно: $f_\otimes((x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)) = (f(x_1,\dots,x_n), f(y_1,\dots,y_n))$.

$\wedge$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

x	$\neg x$
(0,0)	(1,1)
(0,1)	(1,0)
(1,0)	(0,1)
(1,1)	(0,0)

- Известно, что C_2^2 — характеристическая матрица классической логики.

r-матрицы

- Превратим C_2^2 в b-матрицу, поменяв класс выделенных значений и добавив класс отвергаемых значений:
$$C_b = \langle\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}, \vee_\otimes, \wedge_\otimes, \supset_\otimes, \neg_\otimes, \{(0,0),(1,0)\}, \{(1,0),(1,1)\}\rangle,$$
$\overline{D} = \{(0,0),(1,0)\}$, $D = \{(1,0),(1,1)\}$.
- Используя определение матричного b-следования, получаем инференциально четырехзначную логику: $X \vDash_{C_b} \alpha$, е.т.е. для любой оценки h в C_b верно, что $h(\alpha) \in D$, коль скоро $h(X) \cap \overline{D} = \varnothing$.
- Теперь модифицируем матрицу C_2, полагая $C_r = \langle\{0,1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \overline{R}, R\rangle$, где
  - $\overline{R}(x,y)$, е.т.е. $x \geq y$ и $y = 0$;
  - $R(x,y)$, е.т.е. $x \geq y$ и $x = 1$.
- Определим отношение r-следования: $X \vDash_{C_r} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $R(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $\overline{R}(v_1(\alpha), v_2(\alpha))$.

r-матрицы

- Убедимся, что $\models_{C_b}$ совпадает с $\models_{C_r}$.
- Пусть u — оценка в C_b. Тогда $u(\alpha) = (v_1(\alpha), v_2(\alpha))$ для некоторых оценок v_1 и v_2 в C_r. Кроме того, для каждой пары оценок v_1 и v_2 в C_r найдется такая оценка u в C_b, что также имеет место $u(\alpha) = (v_1(\alpha), v_2(\alpha))$.
- Это так, поскольку множества всех оценок в C_b и в C_r суть множества всех отображений множества пропозициональных переменных в множество-носитель соответствующей матрицы, и при этом алгебра C_b представляет собой произведение алгебры C_r на саму себя.
- Наконец, для любых x, y верно, что $\overline{R}(x, y)$, е.т.е. $(x, y) \in \overline{D}$, и $R(x, y)$, е.т.е. $(x, y) \in D$.
- Таким образом, $\models_{C_r}$ — это матрица с двумя референциальными значениями, которая характеризует инфеpереренциально четырехзначную логику.

r-матрицы

- В определениях $\overline{R}$ и R используется отношение $\geq$, а также тождества $x = 1$, $y = 0$. Последнее указывает на имплицитное присутствие привычных выделенных значений.
- Можно переопределить матрицу C_r и отношение следования так:
  - $C_r^* = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \geq, \{1\} \rangle$.
  - $X \vDash_{C_r^*} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $v_1(\alpha) \geq v_2(\alpha)$ и $v_1(\alpha) \in D$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $v_1(\beta) \geq v_2(\beta)$ и $v_2(\beta) \notin D$.

r-матрицы

- Рассмотрим также матрицу и определение следования, где используется только $\geq$:
  - $C_{\geq} = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \supset, \neg, \geq \rangle$.
  - $X \vDash_{C_{\geq}} \alpha$, е.т.е. для каждой пары оценок v_1, v_2 верно, что $v_1(\alpha) \geq v_2(\alpha)$, коль скоро ни для какой формулы β из X не имеет места $v_2(\beta) \geq v_1(\beta)$.
- Эквивалентная $C_{\geq}$ матрица с $\overline{D}$ и D имеет следующий вид: $C_p = \langle \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}, \vee_{\otimes}, \wedge_{\otimes}, \supset_{\otimes}, \neg_{\otimes}, \{(0,0), (0,1), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0), (1,1)\} \rangle$.
- Такая матрица характеризует инференциально трехзначную логику.
- Данный пример интересен тем, что имеет простую содержательную интерпретацию: если достоверность каждой из посылок при v_1 строго выше, чем при v_2, то достоверность заключения при v_1 не ниже, чем его достоверность при v_2.

Вывод №1

- В работах на данную тему инференциальные значения рассматриваются как подлинно логические значения, а референциальные значения носят подчиненный характер и трактуются как техническая абстракция.
- Наши примеры показывают, что отношения между референциальными и инференциальными значениями сложнее, поэтому имеет смысл рассматривать их более равноправно.

Вывод №2

- Когда инференциальные значения рассматриваются как свойства, мы имеем дело с понятиями истины и лжи в абсолютном смысле.
- При переходе к отношениям мы отказываемся от абсолютной трактовки в пользу относительной.
- Этот переход позволяет строить двузначные интерпретации для более широкого класса логик.

Вывод №3

- В литературе рассматривались определения следования, сохраняющего порядок от посылок к заключению в рамках одной оценки.
- См., например, Nowak M. Logics Preserving Degrees of Truth // Studia Logica. 1990. Vol. 49. No. 4. P. 483–499.
- Представляет интерес изучение следования, сохраняющего порядок от оценки к оценке для различных наборов значений и заданных на них порядках.

Спасибо!