П.П.Гайденко

К вопросу о генезисе новоевропейской науки

В конце 80-х годов на одной из научных конференций, проводившихся Институтом философии в Звенигороде и посвященной проблеме научной рациональности, с очень интересным докладом выступил В.А.Смирнов. Обсуждая вопрос, как возможна историческая смена типов рациональности, он высказал мысль о необходимости для решения этого вопроса привлекать к анализу культурно-исторический контекст науки. Такой подход представляется вполне оправданным. В своем докладе я остановлюсь на одном историческом эпизоде, который подтверждает справедливость этого подхода.

Речь пойдет о генезисе новоевропейской науки, в частности, о новом решении проблемы непрерывности, предложенном Галилеем, решении, связанном с пересмотром античного и средневекового понимания непрерывности и послужившем толчком к созданию математики бесконечно-малых.

Принцип непрерывности, как он был разработан в античной математике и физике, исключал допущение актуальной бесконечности. Проблема континуума возникла в античности в связи с открытием несоизмеримости, с одной стороны, и апориями элеата Зенона, с другой. Пытаясь решить эту проблему, крупнейший математик античности Евдокс пытается доказать возможность установления отношений также и несоизмеримых величин. Пока не была открыта несоизмеримость, отношения выражались целыми числами: для определения отношения двух величин нужно было меньшую взять столько раз, сколько необходимо, чтобы она сравнялась с большей. Но отношения несоизмеримых величин невозможно выразить в виде пропорции, члены которой будут целыми числами. Чтобы установить отношения несоизмеримых величин, Евдокс предложил такой выход: если для двух величин a и b, где a больше b, можно подобрать такое число n, чтобы было справедливо неравенство $nb>a$, то величины a и b находятся между собой в некотором отношении.

Открытие Евдокса получило впоследствии название принципа отношений, сформулированного Евклидом в четвертом определении V книги «Начал»: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если, взятые кратко, они могут превзойти друг друга» (***Евклид.*** Начала. Кн. I-IV. С. 142). В противном случае величины не находятся ни в каком отношении, что и в самом деле имеет место там, где речь идет о бесконечно малых величинах, которые были известны грекам, например, в виде «роговидных» углов, образованных прямой и кривой или двумя кривыми: роговидный угол не находится ни в каком отношении с прямолинейными, – он меньше любого прямолинейного угла.

В полном согласии с Евдоксом решает проблему непрерывности и Аристотель. Вот Аристотелева формулировка принципа отношений: «Если, взявши от конечной величины определенную часть, снова взять ее в той же пропорции, т.е. не ту же самую величину, которая взята от целого, то конечную величину нельзя пройти до конца; если же настолько увеличить пропорцию, чтобы брать всегда одну и ту же величину, то пройти можно, так как конечную величину всегда можно исчерпать любой определенной величиной» (Физика, III. 206в). Аристотель здесь показывает, что альтернативой принципа отношений будет апория Зенона «Дихотомия»: именно эта апория доказывает, что никакую конечную величину нельзя пройти до конца, так как она состоит из актуально бесконечного числа бесконечно малых (неделимых) элементов.

И Аристотель, и Евдокс базируются на допущении потенциальной бесконечности и запрете бесконечности актуальной. Именно потенциальная бесконечность составляет основу античного принципа непрерывности. «Я говорю о непрерывном, – пишет Аристотель, – когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается...» (Физика, V, 3). Непрерывным, согласно Аристотелю, может быть пространство, время, движение. Непрерывное – это то, что делится на части, всегда делимые. А это значит, что непрерывное не может быть составлено из неделимых. Таким образом, снимая трудности, возникающие в физике при допущении, что пространство и время состоят из неделимых элементов, Аристотель доказывает, что именно непрерывность есть условие возможности движения и соответственно условие его мыслимости. Тем самым оказываются устраненными те апории Зенона, которые базируются на допущении актуально бесконечного множества неделимых элементов любого отрезка пространства и времени.

Потенциально бесконечное – это, согласно Аристотелю, то, что всегда становится, возникает, а не есть нечто завершенное, законченное. Пример потенциально бесконечного – это бесконечно возрастающий ряд натуральных чисел, который, сколько бы его ни увеличивали, остается как угодно большой, но конечной величиной. Потенциально бесконечное всегда связано с конечностью и есть не имеющее предела движение по конечному. Потенциально бесконечное – бесконечно делимое, которое, « будучи проходимым по природе, не имеет конца прохождения, или предела» (Физика, III, 206 в). Бесконечное, по Аристотелю, есть поэтому возможное, а не действительное, материя, а не форма. Не допуская актуальной бесконечности, он определяет бесконечное как то, вне чего всегда что-то есть. Бесконечному противостоит то, что Аристотель называет законченным и целым: «Там, где вне ничего нет – это законченное и целое: это то, у которого ничего не отсутствует, например целое представляет собой человек или ящик... Целое и законченное или совершенно одно и то же, или сродственны по природе: законченным не может быть ничто, не имеющее конца, конец же граница» (там же, III, 6, 207 а). Только предел, граница делает нечто актуально сущим, действительным и потому предстает как начало формы.

В средние века сохраняется античный принцип непрерывности как в математике, так и в физике. Вот формула Фомы Аквинского: «Ничто непрерывное не может состоять из неделимых». Согласно средневековым понятиям, актуально бесконечен лишь Бог, в природе сотворенной мы имеем дело с потенциальной бесконечностью, и только она постижима для человеческого разума. Несмотря на постоянные споры вокруг понятий бесконечного и непрерывного средневековая наука опиралась на теорию отношений Евдокса и Аристотелево понятие непрерывного.

Пересмотр этих понятий начинается в эпоху Возрождения и первоначально происходит в теологии и философии, а затем, позднее, проникает в математику и физику. Так, Николай Кузанский в качестве важнейшего логического закона, каким прежде был закон тождества (непротиворечия), объявляет закон совпадения противоположностей. Исходя из того, что Единое (Бог) не имеет противоположности, Николай делает вывод, что Единое тождественно бесконечному, абсолютный минимум – абсолютному максимуму. В своих рассуждениях он исходит из того, что бесконечное, т.е. то, больше чего не может быть, – это максимум, единое же – это минимум; но максимум и минимум – это одно и то же в Боге. Чтобы сделать более наглядным принцип совпадения противоположностей – максимума и минимума, – Кузанец обращается к математике, указывая, что при увеличении радиуса круга любой отрезок окружности все более «выпрямляется»; если же увеличить радиус до бесконечности, то окружность превратится в прямую линию – тоже бесконечную. У такого «максимального» круга диаметр становится тождественным окружности, более того, с окружностью, как это ни парадоксально, совпадает и центр круга, а тем самым оказываются совпавшими точка (минимум) и бесконечная прямая (максимум). То же происходит и с другими фигурами, например, с треугольником: если увеличивать одну его сторону до тех пор, пока она не станет актуально бесконечной, то и другие две тоже станут бесконечными, – и все три стороны треугольника сольются в одну бесконечную прямую.

Строго говоря, никаким «увеличением», сколь бы долго оно ни продолжалось, сторону треугольника невозможно превратить в актуально бесконечную: она всегда будет оставаться как угодно большим, но конечным отрезком прямой. Между потенциальной бесконечностью возрастания величины и актуальной бесконечностью всегда остается «зияние», непереходимая пропасть, и Кузанец совершает здесь «скачок», никакой логикой не объяснимой. Но с помощью этого «скачка», совершаемого в действительности с помощью теологических, а не математических понятий, в рассуждения о математических предметах вводится понятие актуальной бесконечности. Более того: бесконечное объявляется теперь «мерой» всего конечного, и вместе с принципом «совпадения противоположностей» отменяются основания античной математики, физики и космологии. Однако сам Кузанец – прежде всего теолог; он не был ни выдающимся математиком, ни физиком, ни астрономом. Поэтому его математические рассуждения – лишь иллюстрации к его философско-теологическим идеям.

Однако эти идеи, воспринятые – вероятнее всего, через Джордано Бруно – Галилеем, получили новую жизнь именно в математике и естествознании. Вопреки широко распространенному мнению о том, что Галилей был по преимуществу выдающимся экспериментатором и в гораздо меньшей степени теоретиком, чтение его сочинений свидетельствует о противоположном: Галилей неустанно искал способы логико-теоретического обоснования вводимых им методов изучения природы. И если в своих математических построениях Галилей был учеником античных математиков, прежде всего Архимеда, то в своих философско-методологических гипотезах он оказывается последователем Николая Кузанского, на что до сих пор обращали мало внимания. Подготовляя фундамент механики нового времени, Галилей опирается на принцип совпадения противоположностей и использует его при решении проблемы континуума. И в той мере, как он применяет метод Кузанца, Галилей отходит от античной математики, в рамках которой решение проблемы континуума предполагало исключение актуальной бесконечности.

Вопрос о природе континуума Галилей обсуждает при рассмотрении причины связности тел. Такой причиной он считает существование «мельчайших пустот» в телах, видя именно в пустотах источник силы сцепления. Чтобы объяснить большую сопротивляемость некоторых тел разрыву, Галилей допускает бесконечное множество ничтожно малых пустот в конечном теле. Эти пустоты должны быть бесконечно малыми, чтобы «вместиться» в теле конечного размера. Попутно отметим, что само по себе признание наличия в телах пустот еще не свидетельствует о близости Галилея к античным атомистам. Как известно, у последних пустоты, «поры» в телах выступали, напротив, как причина их разрушимости, а не как сила сцепления, как у Галилея.

К понятию бесконечно большого числа бесконечно малых, из которых «состоит» конечная величина, Галилей прибегает и в математике. Именно с помощью такого допущения он решает знаменитую задачу «Колеса Аристотеля», сформулированную в

«Механических проблемах» Псевдо-Аристотеля. В средневековой механике эта задача формулировалась так: почему при совместном качении двух концентрических кругов больший проходит такое же расстояние, как и меньший, тогда как при независимом качении этих двух кругов пройденные ими расстояния относились бы как их радиусы? Галилей разрешает проблему «аристотелева колеса» совсем не так, как автор «Механических проблем». Последний объяснял различие скоростей точек, находящихся на разном расстоянии от центра круга, ссылаясь на то, что круговое движение точек складывается из двух движений – «естественного» (тангенциального) и «насильственного» (центростремительного), отклоняющего точку с прямого пути. В малом круге центростремительное движение больше, чем в большом.

Галилей подходит к задаче по-другому. Он начинает с допущения, которое позволяет ему сделать «предельный переход», на котором строится все доказательство: рассматривает сначала качение равносторонних и равноугольных концентрических многоугольников. При качении большего многоугольника должен двигаться также и вписанный в него меньший. Как доказывает Галилей, меньший многоугольник пройдет пространство, почти равное пройденному большим, «если включить в пространство, пройденное меньшим, также и интервалы под дугами, не затронутые на самом деле никакой частью периметра меньшего многоугольника» (***Галилей.*** Избр. труды. Т. 2. М., 1964. С. 133). При качении меньшего многоугольника происходят «скачки», как бы пустые промежутки, число которых будет равно числу сторон многоугольников. При возрастании числа сторон многоугольников размеры пустых промежутков уменьшаются пропорционально увеличению числа сторон. Однако пока многоугольник остается самим собой, то, как бы ни возрастало число его сторон, они остаются все же конечными величинами, а потому и число пустых промежутков будет как угодно большим, но конечным числом. И только если мы рассмотрим случай предельного перехода, когда многоугольник превращается в круг, то дело меняется. Круг, говорит Галилей, содержит актуально бесконечное число бесконечно малых «сторон» многоугольника. Весь парадокс теперь сосредоточивается в понятии «пустых точек», которые представляют собой промежутки, лишенные величины. Введение этих «пустых точек» служит для Галилея средством преодоления противоположности непрерывного и дискретного, на которой базировался принцип непрерывности в античной науке. Насколько эта противоположность была принципиальной также и для средневековой науки, свидетельствует, в частности, трактат математика Брадвардина (XIV в.) о континууме, где показано, к каким противоречиям приводит попытка составления континуума из неделимых (т.е. из точек).

Галилей показывает, какие новые возможности открываются перед наукой, если принять понятие актуальной бесконечности. «...Разделяя линию на некоторые конечные и потому поддающиеся счету части, нельзя получить путем соединения этих частей линии, превышающей по длине первоначальную, не вставляя пустых пространств между ее частями; но, представляя себе линию, разделенную на неконечные части, т.е. на бесконечно многие ее неделимые, мы можем мыслить ее колоссально растянутой без вставки конечных пустых пространств, а путем вставки бесконечно многих неделимых пустот» (Там же. С. 135). Так Галилей вводит понятие неделимого, или бесконечно малого, на основании которого его ученик Кавальери создал геометрию неделимых, – первую форму инфинитезимального исчисления, легшего в фундамент классической механики. Это понятие с самого начала вызывало споры среди математиков и философов, которые длились на протяжении XVII и XVIII веков.

Понятие бесконечно малого несет у Галилея печать своего происхождения и потому называется им то «пустыми точками», то «неделимыми пустотами», «неконечными частями линии» и, наконец, просто «неделимыми» или «атомами». Сам Галилей неоднократно указывает на непостижимость этого понятия для человеческого ума, поскольку оно парадоксально по своей природе: оно предполагает отождествление точки и линии, что в сущности разрушает предпосылки греческой математики.

Утверждая, что континуум составляется из бесконечного числа бесконечно малых (неделимых), природа которых совершенно непостижима, поскольку они не являются ни конечной величиной, ни нулем, Галилей в сущности возвращается к парадоксам Зенона. Но если у Зенона парадоксы призваны были играть разрушительную роль (с их помощью греческий философ пытался доказать, что ни множество, ни движение невозможно мыслить, не впадая при этом в противоречие, и что, стало быть, ни то, ни другое реально не существует), то у Галилея дело обстоит иначе. С одной стороны, он с помощью парадокса разрушает античную теорию континуума, отвергая ее вместе с аристотелевской физикой. Но, с другой стороны, он хотел бы с помощью нововведения – актуальной бесконечности – выполнить вполне конструктивную задачу – обосновать возможность новой математики, которая, в отличие от математики античной, была бы математикой движущихся объектов. И действительно, первоначальная форма дифференциального исчисления базировалась на понятии бесконечно-малой, введенной Галилеем. Однако это понятие-парадокс постоянно вызывало неудовлетворение математиков и побуждало их искать путь иного обоснования дифференциального исчисления. Об этом свидетельствуют работы Лейбница, Ньютона, Карно и многих математиков XVII—XVIII вв. Удивительнее всего, что парадоксальность, связанная с понятием актуальной бесконечности, не вполне удовлетворяла и самого Галилея, о чем свидетельствует его критика собственного ученика Кавальери, который, опираясь на предложенный Галилеем метод неделимых, написал работу «Геометрия, изложенная новым способом с помощью неделимых непрерывного» (1635). Из переписки Кавальери известно, что Галилей не признавал правомерность понятий «все плоскости данного тела» и «все линии данной плоскости», поскольку они предполагают допущение актуальной бесконечности.

Возвращение к потенциальной бесконечности при обосновании дифференциального исчисления намечается в математике второй половины XVIII в., хотя полностью преодолеть трудности, связанные с понятием бесконечно малого и с пониманием континуума как составленного из актуально бесконечного числа неделимых, и создать теорию пределов, опирающуюся на методологические принципы, близкие к античному методу исчерпывания, удалось только позднее, усилиями К.Ф.Гаусса, Б.Больцано, О.Коши и особенно К.Вейерштрасса.

Как видим, на формирование новоевропейской науки – математики и механики – оказали влияние те изменения, которые произошли в характере мышления и мировосприятия в эпоху Возрождения, когда такой выдающийся мыслитель, как Николай Кузанский, своим учением о совпадении противоположностей в сущности снял тот непереходимый водораздел, который существовал в средние века между Творцом и творением. Тем самым понятия, которые прежде применялись лишь по отношению к Богу, становятся употребительными и по отношению к тварному миру. Это прежде всего относится к понятию актуально бесконечного, оперирование с которым предполагало существенную переоценку также и познавательных возможностей человеческого разума. Не случайно именно в эпоху Возрождения человек нередко приравнивается к Богу и получает даже характеристику «второго Бога». Именно эти сдвиги, происшедшие в европейской культуре на заре нового времени, в значительной мере обусловили становление новой науки.