Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 23. Number 2

Moscow
2017

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 23. Номер 2

Москва
2017

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2017. Volume 23. Number 2

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал
2017. Том 23. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00. – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 308
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Сайт: `http://iph.ras.ru/login.htm`

TABLE OF CONTENTS

Non-classical Logic

Philosophical Logic

В НОМЕРЕ

Неклассическая логика

Философская логика

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 9–24
УДК 510.64

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 9–24
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-9-24

Неклассическая логика
Non-classical Logic

И.А. Горбунов

Дедуктивные логики и их связь с интуиционистской логикой[1]

Горбунов Игорь Анатольевич
Математический факультет,
Тверской государственный университет.
Российская федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

В работе [5] ([6]) Р. Вуйцицкий ввел понятия хорошо определенной (well-determined) логики и дедуктивного (deductive) множества формул. Логика называется хорошо определенной, если она обладает свойством конъюнкции (т. е. $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha)C(\beta)$) и для нее верна теорема о дедукции в следующей ослабленной форме:

$$\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta.$$

Множество формул L называется *дедуктивным*, если $L = C(\varnothing)$, где C — операция добавления следствий некоторой хорошо определенной логики. Хорошо определенные логики интересны тем, что присущее им отношение логического следования выразимо средствами самой логики, т. е. для хорошо определенной логики C (в некотором фиксированном языке) верно условие

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_C \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta \in C(\varnothing).$$

Здесь рассматриваются хорошо определенные логики, для которых теорема о дедукции выполняется в полном объеме, т. е. такие, что для любого множества формул X и любых формул α и β выполнено условие

$$X, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow\ X \vdash \alpha \to \beta.$$

Логики, обладающие таким свойством, будем называть дедуктивными. Множество формул L называем *сильно дедуктивным*, если существует такая дедуктивная логика C, что $C(\varnothing) = L$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №14–06–00298-а, №16–07–01272-а и №17-03-00818-а.

В работе вводится операция добавления следствий над теориями и рассматриваются некоторые ее свойства. Приводятся некоторые свойства дедуктивных логик. Доказано, что теории всякой дедуктивной логики замкнуты относительно правила modus ponens. Введено понятие минимальной дедуктивной логики. Основными результатами работы являются: критерий сильной дедуктивности множества формул и доказательство того факта, что множество тавтологий минимальной дедуктивной логики совпадает с конъюнктивно-импликативным фрагментом интуиционистской логики.

Ключевые слова: теорема о дедукции, дедуктивные пропозициональные системы, сильно дедуктивное множество, интуиционистская логика

1. Введение

Обозначим посредством S множество всех формул некоторого пропозиционального языка, т. е. языка в алфавите, состоящем из множества пропозициональных переменных Var и конечного множества Σ конечноместных логических связок. Буква E будет обозначать множество всех подстановок (эндоморфизмов из S в S). Посредством C обозначим определенную на множестве формул S операцию добавления следствий, которую мы будем называть также *следованием.*

Следование C будем называть *структурным*, если для любой подстановки $\varepsilon \in E$ и любого множества формул X выполняется условие $\varepsilon(C(X)) \subseteq C(\varepsilon(X))$.

Следование будем называть *финитарным*, если для любого X верно, что $C(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} C(Y)$, где Y — конечное множество формул.

Пару $\langle S, C \rangle$, где C — структурное и финитарное следование, будем называть *дедуктивной системой* или *пропозициональной логикой*, поскольку задание операции следования эквивалентно заданию на S отношения логического следования. Множество $C(\varnothing)$ будем называть множеством тавтологий логики $\langle S, C \rangle$.

Логику $\langle S, C \rangle$ будем называть *хорошо определенной*, если для нее выполняются следующие условия:

$$\alpha \to \beta \in C(\varnothing) \iff \beta \in C(\alpha),$$

$$C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha, \beta).$$

Поскольку мы будем рассматривать логики в языке, содержащем две двухместные связки $\to$ и $\wedge$, которые мы, пока условно, назовем импликацией и конъюнкцией, то далее будем использовать следующие обозначения. Посредством квазиформулы $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ будем обозначать конъюнкцию формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, взятых в произвольном порядке и с произвольной (но правильной) расстановкой скобок. Запись $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \;\to\;\; \alpha]$ будет обозначать множество всех импликаций, в посылках которых стоят различные конъюнкции, соответствующие данной квазиформуле. Пусть X — некоторое конечное непустое множество формул; посредством $X^\wedge$ будем обозначать квазиформулу, имеющую вид конъюнкции всех формул из этого множества. Формулы, содержащие в качестве связки только конъюнкцию, везде далее будем обозначать строчными греческими буквами с индексом $\wedge$, например, $\alpha^\wedge$.

Множество следствий конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ будем обозначать $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множество следствий из множества $\{\alpha\} \cup X$ зачастую будем обозначать как $C(\alpha, X)$.

Интуиционистская пропозициональная логика Int будет пониматься нами как пара $\langle S, C^{Int} \rangle$, где операция добавления следствий определяется так же, как в [3] (т. е. $C^{Int}(X)$ — это множество всех формул, выводимых из множества формул X). Все определения, касающиеся используемых здесь синтаксиса и семантики интуиционистской логики, содержатся в [4].

2. Дедуктивная логика

Пусть C — операция добавления следствий на множестве формул S некоторого языка, которая определяет на нем дедуктивную систему. Как говорилось выше, множество связок этого языка содержит связки импликация $\to$ и конъюнкция $\wedge$.

Теорией данной логики будем называть замкнутое множество формул, т. е. множество, для которого верно, что $X = C(X)$. Для всякой теории T этой дедуктивной системы определим операцию $C_T : 2^S \to 2^S$ следующим образом:

$$C_T(X) = C(X \cup T).$$

Операцию C_T будем называть *следованием над теорией* T. Заметим, что для нее верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой теории* T *и множеств формул* X *и* Y *верно, что* $C_T(X \cup Y) = C_{C_T(Y)}(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $C(T \cup X \cup Y) \subseteq C(C(T \cup Y) \cup X)$. По определению, $C(T \cup X \cup Y) = C_T(X \cup Y)$, $C(T \cup Y) = C_T(Y)$ и $C(C(T \cup Y) \cup X) = C(C_T(Y) \cup X) = C_{C_T(Y)}(X)$. Следовательно, $C_T(X \cup Y) \subseteq C_{C_T(Y)}(X)$.

С другой стороны, $C(T \cup Y) \cup X \subseteq C(T \cup X \cup Y)$. Следовательно, $C(C(T \cup Y) \cup X) \subseteq C(T \cup X \cup Y)$. Таким образом, получаем, что $C_{C_T(Y)}(X) \subseteq C_T(X \cup Y)$. □

Будем говорить, что *хорошо определенной логике присуща теорема о дедукции* (или что логика является *дедуктивной*), если для любого множества формул X, любого конечного непустого множества формул Y и любой формулы α верно, что

$$X, Y \vdash \alpha \Leftrightarrow\ X \vdash [Y^{\wedge} \to \alpha],$$

или в другой записи $\alpha \in C_{C(X)}(Y) \Leftrightarrow [Y^{\wedge} \to \alpha] \subseteq C(X)$.

Отсюда следует, что логика дедуктивна тогда и только тогда, когда для любой теории T конъюнкция и импликация связаны с C_T следующим образом:

A1. $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to\ \alpha] \subseteq T\ \ \Leftrightarrow\ \ \alpha \in C_T(\alpha_1,\ \ldots\ ,\alpha_n)$.

Поскольку это условие верно и для $T = C(\varnothing)$, то всякая дедуктивная логика является хорошо определенной (см. [5] или [1]).

Верно следующее утверждение:

Теорема 2. *Условие* A1 *эквивалентно следующему множеству условий:*

B1. C_T *— финитарное следование;*
B2. $\alpha \to \beta \in T\ \ \Leftrightarrow\ \ \beta \in C_T(\alpha)$;
B3. $C_T(\alpha \wedge \beta) = C_T(\alpha,\ \beta)$.

Его доказательство мы приводить не будем, поскольку оно почти дословно, с точностью до замены C на C_T, повторяет доказательство Теоремы 5 из работы [1], за исключением структурности, которая не утверждается.

Теорема 3. *Всякая теория T дедуктивной логики замкнута относительно правила modus ponens (MP).*

Доказательство. Пусть $p \in T$ и $p \to q \in T$. Из последнего, по пункту B2, следует, что $q \in C_T(p) = C(T \cup \{p\})$. В силу первого, $T \cup \{p\} = T$. Таким образом, $q \in C(T) = T$. □

Теорема 4. *Всякая теория T дедуктивной логики содержит все подстановочные случаи следующих формул:*

(si) $p \to (q \to p)$;

(fr) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;

(ea) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q)$;

(el) $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$.

Доказательство.

(si) Пусть $\varepsilon \in E$ и T — некоторая теория. Так как $\varepsilon p \in C_T(\varepsilon p)$, то для любой переменной $q \neq p$

$$\varepsilon p \in C_T(\varepsilon p, \varepsilon q) = C_{C_T(\varepsilon p)}(\varepsilon q).$$

Отсюда по пункту B2 получим, что $\varepsilon q \to \varepsilon p \in C_T(\varepsilon p)$ и, таким образом, $\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \epsilon p) \in T$.

(fr) Покажем, что для любой подстановки ε и теории T верно, что $\varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p)$. В силу Теоремы 3, множество $C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p) = F$ замкнуто относительно (MP), откуда следует, что $\varepsilon q \to \varepsilon r \in F$ и $\varepsilon q \in F$. Следовательно, $\varepsilon r \in F$.

В силу Теоремы 1 и пункта B2, получим следующую цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon r \in C_{(C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q)}(\varepsilon p),$$

$$\varepsilon p \to \varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$\varepsilon p \to \varepsilon r \in C_{(C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r))}(\varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$(\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \to \varepsilon r) \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)),$$

$$(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)) \to ((\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \to \varepsilon r)) \in T.$$

(ea) Так как $p \wedge r \to p \in C(\varnothing)$, то для любой подстановки ε формула $\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon p$ принадлежит любой теории T. Поэтому, по правилу (MP), $\varepsilon q \in C_T(\varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p \wedge \varepsilon r)$. Как и в предыдущем доказательстве, получим цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon q \in C_T(\varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$(\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon q) \in T.$$

(el) Вследствие пункта B3, верно равенство

$$C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p, \varepsilon q) = C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p \wedge \varepsilon q).$$

Поэтому, в силу замкнутости по (MP), $\varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p, \varepsilon q)$. Таким образом, получаем цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon q \to \varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p),$$

$$\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r) \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r),$$

$$(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r) \to (\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)) \in T.$$

$\square$

3. Сильно дедуктивные множества

Множество формул L будем называть *сильно дедуктивным*, если существует такая дедуктивная логика $\langle S, C\rangle$, что $C(\varnothing) = L$.

В работе [1] для произвольного множества формул L была введена следующая операция присоединения следствий:

$$(1)\quad \alpha \in \vec{L}(X) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X \cup L\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L).$$

Эту операцию мы будем называть *импликативным следованием над* множеством L. При этом доказано, что для любого дедуктивного множества L эта операция задает хорошо определенную логику, для которой $\vec{L}(\varnothing) = L$. В той же работе приведен критерий дедуктивности множества формул, здесь мы приведем его в несколько измененной форме, а именно:

ТЕОРЕМА 8*. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*

2. *Для любых формул $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ верно, что если имеет место включение $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то $\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \in L$.*

3. *Множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r} \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2} \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q}$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r} \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q} \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

(Нумерация теоремы приведена по [1].)

Несложно заметить, что в силу того, что для следования любой хорошо определенной логики выполняется условие $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha,\ \beta)$, то все теории любой хорошо определенной логики замкнуты относительно правила вывода (AD). Теперь заметим, что верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть L — дедуктивное множество, содержащее формулу (fr), тогда любая теория его импликативного следования замкнута относительно правила (MP).*

Доказательство. Пусть T — некоторая теория $\vec{L}$ (т. е. существует такое множество формул X, что $T = \vec{L}(X)$) и для некоторых формул α и β верно, что $\alpha \in T$ и $\alpha \to \beta \in T$. По определению $\vec{L}$ это значит, что:

(2) $\exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in X \cup L\ (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \to \alpha \in L)$.

(3) $\exists\, \delta_1, \ldots, \delta_m \in X \cup L\ (\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_m \to (\alpha \to \beta) \in L)$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, $\bar{\Gamma} = \Gamma X$, $\bar{\Delta} = \Delta X$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma L$ и $\tilde{\Delta} = \Delta L$.

Из пунктов (2) и (3) следует, что формула $\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \tilde{\Gamma}^\wedge \to \alpha \in L$ и формула $\bar{\Delta}^\wedge \wedge \tilde{\Delta}^\wedge \to (\alpha \to \beta) \in L$. Поскольку L — дедуктивное множество (и значит, удовлетворяет условию Теоремы 8*), то по правилу (CV) получим, что $\bar{\Gamma}^\wedge \to \alpha \in L$ и $\bar{\Delta}^\wedge \to (\alpha \to \beta) \in L$. Отсюда по правилу (EA) получаем, что $\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to \alpha \in L$ и $\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to (\alpha \to \beta) \in L$. Поскольку множество L содержит все подстановочные случаи формулы (fr), то

$$(\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to (\alpha \to \beta)) \to ((\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to \alpha) \to (\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to \beta)) \in L.$$

Применяя два раза (MP) получим, что $\bar{\Gamma}^\wedge \wedge \bar{\Delta}^\wedge \to \beta \in L$, и значит, по определению следования, $\vec{L}$, $\beta \in T$. □

Как доказано в [1], если L — дедуктивное множество, то хорошо определенная логика $\langle S, C\rangle$, для которой $L = C(\varnothing)$, совпадает с импликативным следованием для этого множества. Тогда, как следствие из Теоремы 5, получим теорему:

Теорема 6. *Если для хорошо определенной логики $\langle S, C\rangle$ верно, что формула $(fr) \in C(\varnothing)$, то любая теория этой логики замкнута относительно правила (MP).*

Теорема 7. *Пусть L — дедуктивное множество, содержащее формулы (si), (fr), (ea) и (el), тогда операция $\vec{L}$ образует дедуктивную логику.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что логика $\vec{L}$ дедуктивна, достаточно показать, что для любой ее теории T выполняется условие:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T \ \Leftrightarrow \ \alpha \in \vec{L}(T \cup \{\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n\}).$$

Обозначим множества $\{\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n\}$ посредством A. Заметим, что выполняется цепочка эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
&\alpha \in \vec{L}(T \cup A) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ \exists\, \beta_1, \ldots, \beta_m \in L \cup T \cup A \ (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \to \alpha \in L) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ \exists\, \beta_1, \ldots, \beta_m \in T \cup A \ (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \to \alpha \in L).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Введем следующие обозначения: $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, $\Gamma = B \backslash A$ и $\Delta = BA$.

Пусть $\Delta \neq \varnothing$. Так как T замкнуто по (AD), то $\Gamma^\wedge \in T$. Поскольку L содержит формулу (el) и $L \subseteq T$, то T содержит формулу $(\Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge \to \alpha) \to (\Gamma^\wedge \to (\Delta^\wedge \to \alpha))$. Заметим, что $\Gamma \cup \Delta = (B \setminus A) \cup (BA) = B$, и значит, $B^\wedge = \Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge$, таким образом, $\Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge \to \alpha \in T$. Так как L содержит формулу (fr), то по Теореме 5 любая ее теория замкнута по (MP). Отсюда получаем, что $\Gamma^\wedge \to (\Delta^\wedge \to \alpha) \in T$, и затем, что $\Delta^\wedge \to \alpha \in T$.

Обозначим посредством Λ множество $A \setminus \Gamma$. В силу формулы (ea), $(\Delta^\wedge \to \alpha) \to (\Delta^\wedge \wedge \Lambda^\wedge \to \alpha) \in T$, тогда и $\Delta^\wedge \wedge \Lambda^\wedge \to \alpha \in T$. Таким образом, $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$.

Пусть $\Delta = \varnothing$, и значит, $\Gamma = B$. Так как $\Gamma^\wedge \in T$ и $\Gamma^\wedge \to \alpha \in T$, то $\alpha \in T$. По формуле (si), $\alpha \to (A^\wedge \to \alpha) \in T$. Тогда получаем, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$.

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$. Тогда $A^\wedge \to \alpha \in \vec{L}(T \cup A)$. Так как $\vec{L}(T \cup A)$ — теория хорошо определенной логики $\vec{L}$ и $(si) \in L$, то она замкнута по (AD) и (MP). Следовательно, $\alpha \in \vec{L}(T \cup A)$. □

Следующее утверждение является критерием сильной дедуктивности множества:

Теорема 8. *Множество формул L является сильно дедуктивным тогда и только тогда, когда оно дедуктивно и имеет место включение* $\{(si), (fr), (ea), (el)\} \subseteq L$.

Доказательство. Если множество L сильно дедуктивно, то существует дедуктивное следование C такое, что $C(\varnothing) = L$. Так как $C(\varnothing)$ — теория этого следования, то по Теореме 4 имеем, что $\{(si), (fr), (ea), (el)\} \subseteq L$. Достаточность следует из Теоремы 7. □

Приведем еще один критерий сильной дедуктивности. Для этого заметим, что при доказательстве теорем 5 и 7 формула (fr) требовалась для замкнутости теорий по правилу (MP), однако замкнутости по (MP) можно добиться и другим образом.

Теорема 9. *Теории хорошо определенной логики $\langle S, C\rangle$ замкнуты относительно (MP) тогда и только тогда, когда формула $(mp) = p \wedge (p \to q) \to q \in C(\varnothing)$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть все теории C замкнуты по (MP). Тогда $q \in C(p, p \to q) = C(p \wedge (p \to q))$, и следовательно, получим, что $p \wedge (p \to q) \to q \in C(\varnothing)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $(mp) \in C(\varnothing)$ и для некоторой теории T и формул φ и $\varphi \to \psi$ верно, что $\varphi \in T$ и $(\varphi \to \psi) \in T$. Так как $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi \in C(\varnothing)$, то $\psi \in C(\varphi \wedge (\varphi \to \psi))$. Поскольку $C(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) = C(\varphi, \varphi \to \psi) \subseteq T$, то $\psi \in T$. □

Таким образом, по Теореме 3, для всякой дедуктивной логики $\langle S, C\rangle$ верно, что $(mp) \in C(\varnothing)$ и, следовательно, в формулировке теорем 7 и 8 формулу (fr) можно заменить на (mp). Доказательства при этом практически не изменятся. Таким образом, верен следующий критерий сильной дедуктивности:

Теорема 10. *Множество формул L является сильно дедуктивным тогда и только тогда, когда оно дедуктивно и имеет место включение $\{(si), (mp), (ea), (el)\} \subseteq L$.*

4. Минимальная дедуктивная логика и конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики

Обозначим посредством D минимальную дедуктивную логику в языке со множеством связок $\Sigma = \{\wedge, \to\}$. Из доказанного выше и Теоремы 2 из [2] следует, что она аксиоматизируется следующим образом:

1. Множество тавтологий логики D — это множество формул, выводимых в исчислении со следующими множествами схем аксиом и правил вывода:

$$\begin{aligned} &Ax = \{p \to p, p \to p \wedge p, p \wedge q \to q, (si), (fr), (ea), (el)\};\\ &R = \{(TR), (CM), (AD), (CV), (MP), (EA)\}. \end{aligned}$$

2. Все теории этой логики замкнуты относительно правил (AD) и (MP).

(Вопрос минимальности этой аксиоматизации здесь не рассматриваем.)

Обозначим посредством $\mathbf{Ax}$ множество, состоящее из формул, задающих множество схем аксиом Ax: посредством $\mathbf{Int}$ — множество тавтологий интуиционистской логики, посредством $\mathbf{Int}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ — конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики (здесь под логикой мы понимаем множество ее тавтологий), посредством $\mathbf{D}$ — множество тавтологий логики D.

Используя семантику Крипке, непосредственной проверкой каждой формулы из множества $\mathbf{Ax}$ можно убедиться в том, что имеет место включение $\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{Int}$. Используя ту же семантику, также можно показать, что правила (TR), (CM), (AD), (CV) и (EA) выводимы в Int. Таким образом, верна

Теорема 11. $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{Int}_{\boldsymbol{\Sigma}}$.

Выясним, верно ли обратное включение.

Обозначим посредством Th множество всех теорий логики D. Заметим, что пара $\langle Th, \subseteq\rangle$ образует шкалу интуиционистской логики.

Рассмотрим отображение ν из множества пропозициональных переменных во множество подмножеств множества Th, заданное следующим образом: для любого мира T шкалы $\langle Th, \subseteq\rangle$ верно, что $T \in \nu(p) \Leftrightarrow p \in T$.

Несложно доказать, что это отображение является интуиционистской оценкой переменных на шкале $\langle Th, \subseteq\rangle$. Для этого достаточно заметить, что для любых теорий T_1, T_2 и произвольной формулы

φ естественно выполняется, что если $T_1 \subseteq T_2$ и $\varphi \in T_1$, то $\varphi \in T_2$. Отсюда, в силу определения, для отображения ν будет выполняться следующее условие: если $T_1 \subseteq T_2$ и $T_1 \in \nu(p)$, то $T_2 \in \nu(p)$, которое и определяет интуиционистскую оценку на шкале $\langle Th, \subseteq \rangle$.

Шкала $\langle Th, \subseteq \rangle$ с указанной оценкой ν образует интуиционистскую модель, которую мы будем называть *естественной моделью* логики D и обозначать $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — это интуиционистская модель. Запись вида $\mathfrak{M}, x \models \varphi$ будет означать, что в мире x модели $\mathfrak{M}$ истинна формула φ.

Лемма 1. *Для любой формулы φ и любой теории $T \in Th$ верно, что $\varphi \in T \Leftrightarrow \mathfrak{D}, T \models \varphi$.*

Доказательство. Лемму будем доказывать индукцией по построению формулы.

Базис непосредственно следует из определения оценки ν.

Шаг.

1) Пусть $\varphi = \psi \wedge \chi$ и $\varphi \in T$. В силу того, что формулы $p \wedge q \to q$ и $p \wedge q \to p$ являются тавтологиями логики D и все теории этой логики замкнуты по правилам (MP) и (AD), то утверждение о том, что $\psi \wedge \chi \in T$, равносильно утверждению того, что $\psi \in T$ и $\chi \in T$. Последнее, по индукционному предположению, равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi$ и $\mathfrak{D}, T \models \chi$. По определению истинности формулы в мире модели это равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi \wedge \chi$.

2) Пусть $\varphi = \psi \to \chi$ и $\varphi \in T$. В силу замкнутости всех теорий по правилу (MP) это равносильно тому, что для любой теории T', такой, что $T \subseteq T'$, верно, что $\psi \in T' \Rightarrow \chi \in T'$. В силу индукционного предположения, последнее равносильно тому, что для любого мира T', такого, что $T \subseteq T'$, верно, что $\mathfrak{D}, T' \models \psi \Rightarrow \mathfrak{D}, T' \models \chi$. Согласно определению истинности формулы в мире модели, это равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi \to \chi$. □

Теорема 12. $\mathbf{Int_\Sigma} \subseteq \mathbf{D}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{D}$, тогда существует такая теория $T \in Th$, что $\varphi \notin T$. В силу Леммы 1, это означает, что формула φ

опровергается в мире T естественной модели. Таким образом, $\varphi \notin$ **Int**, а значит, и $\varphi \notin \mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}}$. $\square$

Из Теоремы 11 и Теоремы 12 непосредственно следует

Теорема 13. *Множество тавтологий минимальной дедуктивной логики совпадает с конъюнктивно-импликативным фрагментом тавтологий интуиционистской логики.*

5. Заключение

Стоит заметить, что из критериев дедуктивности и сильной дедуктивности следует, что всякое расширение дедуктивного множества является дедуктивным или сильно дедуктивным. Расширение сильно дедуктивного множества всегда сильно дедуктивно.

В силу Теоремы 9 из [1] о единственности хорошо определенной логики для каждого дедуктивного множества формул верно, что для каждого сильно дедуктивного множества L существует единственное дедуктивное следование C, для которого $C(\varnothing) = L$, и это следование совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$.

Таким образом, между сильно дедуктивными множествами и дедуктивными логиками устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Отсюда и из теорем 8 и 10 настоящей работы следует, что любая дедуктивная логика содержит множество тавтологий логики D, или (что, в силу Теоремы 13, то же самое) конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики. Таким образом, получаем следующий необходимый критерий дедуктивности логики.

Теорема 14. *Пусть язык логики $\langle S, C\rangle$ содержит связки $\wedge$ и $\to$. Если логика $\langle S, C\rangle$ дедуктивна, то $\mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}} \subseteq C(\varnothing)$.*

Заметим также, что в процессе доказательства нами была получена некоторая аксиоматика (аксиоматика множества тавтологий логики D) конъюнктивно-импликативного фрагмента интуиционистской логики.

Литература

[1] *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логические исследования. Вып. 17. М.; СПб.: ЦГИ, 2011. С. 95–108.

[2] *Горбунов И.А.* Эффективный критерий дедуктивности множеств формул логики // Вестн. ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 107–115.

[3] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М: Наука, 1972. С. 214.

[4] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. P. 25–26.

[5] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // www.studialogica.org/wojcicki (дата обращения: 01.06.2017)

[6] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // Ossolineum. Wroclaw, 1984.

I.A. Gorbunov

Deductive Logics and Their Relation to Intuitionistic Logic[1]

Gorbunov Igor Anatolievich
Mathematical Faculty, Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: `i_gorbunov@mail.ru`

R. Wojcicki introduced the notion of well-defined logic [5]. A propositional logic is called well-determined if it satisfies conjunction property and weak deduction theorem. The weak deduction theorem has the following form: $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta$. Well-determined logics are interested because their logical consequence may be certainly represented by means of the logic.

We consider well-determined logics for which the following deductive theorem holds: for any set of formulas X and any formulas α and β it is true that $X, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow\ X \vdash \alpha \to \beta$. Logics with this property we call deductive. We call a set of formulas L *strongly deductive* if there exists a deductive logic C such that $C(\varnothing) = L$.

In this paper we introduce an operation of adding of consequences under a theory and study some its properties. We prove that any theory under a deductive logic is closed under modus ponens. The notion of minimal deductive logic is introduced. The main results are a criterion of strong deductivity for a set of formulas and the proof that the set of tautologies of minimal deductive logic coincides with the conjunctive and implicative fragment of intuitionistic logic.

Keywords: deduction theorem, deductive propositional systems, strongly-deductive set of sentences, minimal deductive logic, intuitionistic logic

References

[1] Gorbunov, I.A. “Khorosho opredelennye logiki” [Well-determined logics] *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. Moscow; St. Petersburg: TsGI, 2011, vol. 17 pp. 95–108. (In Russian)

[1]The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №14–06–00298-a, №16–07–01272-a and №17-03-00818-a.

[2] Gorbunov, I.A. “Effektivnyy kriteriy deduktivnosti mnozhestva formul logiki” [An effective criterion of deductivity for sets of formulas of a logic]. *Vestnik TvGU*. Seriya: Prikladnaya matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, No.1, pp. 107—115. (In Russian)

[3] Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathematics*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa, 1963.

[4] Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997. P. 25–26.

[5] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*. [www.studialogica.org/wojcicki, accessed on 01.06.2017].

[6] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*. Ossolineum. Wroclaw, 1984.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 25–59
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 25–59
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-25-59

В.М. Попов

К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $x < y)$. Часть II[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4
E-mail: pphiloslog@mail.ru

В этой статье, продолжающей работу, проводимую в [1], изучается проблема табличности I-логик васильевского типа (пропозициональная логика называется табличной, если она имеет конечную характеристическую матрицу). Основной результат, полученный в данной статье: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle x,y\rangle}$ таблична (класс всех таких логик является бесконечным подклассом класса всех I-логик васильевского типа). Предлагаемое исследование основано на использовании результатов, полученных в [1], и на применении авторской кортежной семантики. Для достижения указанного основного результата мы показываем, как по произвольным целым неотрицательным числам m и n, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m, n)$, которая является конечной характеристической матрицей логики $I_{\langle x,y\rangle}$. Поскольку носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m, n)$ есть некоторое множество 0-1-кортежей, семантику, базирующуюся на этой логической матрице, естественно называть кортежной семантикой. Важное замечание: статья публикуется в два приема, что обусловлено исключительно внешними для данной статьи факторами. Перед вами вторая (заключительная) часть исследования, первая часть которого опубликована в первом номере «Логических исследований» за 2017 год.

Ключевые слова: I-логика $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, двузначная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, кортежная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$

Определение 21. Кортежным напарником $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, (v\text{-}q\text{-cort})\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 16-03-00224а.

Замечание 10. Разумеется, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки существует единственный кортежный напарник этой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки.

Соглашение 16: Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v обозначаем ее кортежного напарника через (cort,v).

Лемма 15. Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v (cort, v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка.

Докажем лемму 15.

(1) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

Опираясь на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что

(2) (cort,v) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид ,(v-q-cort) $\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

(3) $\alpha \in$ (cort,v) (допущение).

(4) Существует такая пропозициональная переменная z языка L, что $\alpha = \langle \text{z}, (v\text{-z-cort})\rangle$ (из (2) и (3)).

Пусть (5) z есть пропозициональная переменная языка L,
$\alpha = \langle z, (v\text{-}z\text{-cort})\rangle$.

(6) z есть пропозициональная переменная языка L (из (5)).

(7) $\alpha = \langle z, (v\text{-}z\text{-cort})\rangle$ (из (5)).

(8) (v-z-cort) есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (1) и (6), по лемме 14).

Из утверждения (8), используя замечание 4, получаем, что

(9) (v-z-cort) $\in C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждения (6) и (9), получаем, что

(10) $\langle z, (v\text{-}z\text{-cort})\rangle$ принадлежит декартову произведению $\mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.[1]

(11) $\alpha \in \mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (7) и (10)).

Снимая допущение (3) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого α: если $\alpha \in (\mathrm{cort}, v)$, то $\alpha \in \mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Но тогда (13) (cort, v) включается в $\mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(14) q есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Опираясь на утверждение (1), (14), на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что (15) $\langle q, (v\text{-}q\text{-cort})\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$.

(16) Существует такой X, что $\langle q, \mathrm{X}\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$ (из (15)).

(17) $\langle q, X_1\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$ и $\langle q, X_2\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$ (допущение).

Опираясь на утверждение (17), на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что (18) $X_1 = (v\text{-}q\text{-cort})$ и $X_2 = (v\text{-}q\text{-cort})$.

(19) $X_1 = X_2$ (из (18)).

Снимая допущение (17) и обобщая, получаем, что

(20) для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q, \mathrm{Y}\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$ и $\langle q, \mathrm{Z}\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$, то $\mathrm{Y} = \mathrm{Z}$.

(21) Существует такой X, что $\langle q, \mathrm{X}\ \rangle \in (\mathrm{cort}, v)$, и для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q, \mathrm{Y}\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$ и $\langle q, \mathrm{Z}\rangle \in (\mathrm{cort}, v)$, то $\mathrm{Y} = \mathrm{Z}$ (из (16) и (20)).

Снимая допущение (14) и обобщая, получаем, что

---

[1] Вспомним соглашение о том, что через Prop_L обозначается множество всех пропозициональных переменных языка L. Далее ссылки на это соглашение не указываем.

(22) для всякой пропозициональной переменной q языка L: существует такой X, что $\langle q$,X $\rangle \in$ (cort,v), и для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q$,Y$\rangle \in$ (cort,v) и $\langle q$,Z$\rangle \in$ (cort,v), то Y = Z.

В свете утверждений (13), (22) и стандартного определения отображения множества в множество ясно, что

(23) (cort,v) есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка L в $C_{\langle m,n\rangle}$.[2]

(24) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (23), по определению 16).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 15. Лемма 15 доказана.

Определение 22. 0-1-напарником $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle \neg^{[k]}(q),\ \rho(q)(k{+}1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.

Замечание 11. Конечно, для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки существует единственный 0-1-напарник этой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки.

Соглашение 17. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ обозначаем ее 0-1-напарника через (two, ρ).

Лемма 16. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка.

Докажем лемму 16.

(1) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

Опираясь на утверждение 1, на определение 22 и на соглашение 17, получаем, что (2) (two, ρ) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle \neg^{[k]}(q),\ \rho(q)(k{+}1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.

---

[2]Определение, о котором идет речь, гласит, что f есть отображение множества M_1 в множество M_2, если выполняются следующие условия (а), (б) и (в): (а) f включается в декартово произведение $M_1 \times M_2$, (б) для всякого x из M_1 существует такой y, что $\langle$x, y$\rangle \in f$, (в) для всяких x, y и z: если $\langle$x, y$\rangle \in f$ и $\langle$x, z$\rangle \in f$, то y=z.

(3) (two, ρ) включается в декартово произведение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество {0,1}.

Докажем утверждение (3).

(3.1) $\alpha \in$ (two, ρ) (допущение).

Опираясь на утверждения (2) и (3.1), получаем, что

(3.2) существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, которое $\leq n$, что $\alpha = \langle \neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$.

Пусть (3.3) r есть пропозициональная переменная языка L, l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$.

(3.4) r есть пропозициональная переменная языка L (из (3.3)).

(3.5) l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (3.3)).

(3.6) $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$ (из (3.3)).

Опираясь на утверждения (3.4), (3.5) и на замечание 2, получаем, что

(3.7) $\neg^{[l]}(r)$ есть квазиэлементарная L-формула длины l.

(3.8) $\rho(r) \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1),(3.4), по определению 16).

Опираясь на утверждение (3.8) и на замечание 4, получаем, что

(3.9) $\rho(r)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(3.10) $l{+}1$ есть целое положительное число, которое $\leq n{+}1$ (из (3.5)).

(3.11) $\rho(r)(l{+}1) \in$ {0,1}(из (3.9) и (3.10), по определению 6).

В свете утверждений (3.5), (3.7) и (3.11), ясно, что

(3.12) $\langle \neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$ принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0{,}1\}$.

(3.13) α принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0{,}1\}$ (из (3.6) и (3.12)).

Снимая допущение (3.1) и обобщая, получаем, что

(3.14) для всякого α: если $\alpha \in$ (two, ρ), то принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0{,}1\}$.

Опираясь на утверждение (3.14) и на определение теоретико-множественного включения, устанавливаем справедливость утверждения (3). Утверждение (3) доказано.

(4) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q длины $\leq n$ существует x, для которого $\langle$Q,x$\rangle \in$ (two,ρ).

Докажем утверждение (4).

(4.1) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $\leq n$ (допущение).

Понятно, что верны следующие утверждения (4.2) и (4.3).

(4.2) $h(Q) \leq n$. (4.3) $h(Q)$ есть целое неотрицательное число.

В свете замечания 2 ясно, что (4.4) для всякого целого неотрицательного числа k: Q есть квазиэлементарная L-формула длины k тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}$(q) для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

(4.5) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$ тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[h(Q)]}$(q) для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.3) и (4.4)).

Разумеется, что (4.6) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$.

(4.7) Q есть $\neg^{[h(Q)]}$(q) для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.5) и (4.6)).

(4.8) Существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое положительное число k, что Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}$(q) и k $\leq n$ (из (4.2), (4.3) и (4.7)).

Пусть (4.9) s есть пропозициональная переменная языка L, j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, Q есть $\neg^{[j]}(s)$.

(4.10) s есть пропозициональная переменная языка L (из (4.9)).

(4.11) j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (4.9)).

(4.12) Q есть $\neg^{[j]}(s)$ (из (4.9)).

(4.13) $\rho(s)\in\ C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (4.10), по определению 16).

Опираясь на утверждение (4.13) и на замечание 4, получаем, что

(4.14) $\rho(s)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(4.15) $j{+}1$ есть целое положительное число, которое $\leq n$ (из (4.11)).

(4.16) $\rho(s)(j{+}1)\in$ {0,1} (из (4.14) и (4.15), по определению 6).

В свете утверждений (4.10) и (4.11) ясно, что

(4.17) $\langle\neg^{[j]}(s),\ \rho(s)(j{+}1)\rangle \in (\mathrm{two},\rho)$.

(4.18) $\langle Q, \rho(s)(j{+}1)\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$ (из (4.12) и (4.17)).

(4.19) Существует такой x, что $\langle Q,\ \mathrm{x}\rangle \in (\mathrm{two},\rho)$ (из (4.18)).

Снимая допущение (4.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (4). Утверждение (4) доказано.

(5) Для всяких x, y и z: если $\langle \mathrm{x},\ \mathrm{y}\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$ и $\langle \mathrm{x},\ \mathrm{z}\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$, то y= z.

Докажем утверждение (5).

(5.1) $\langle x, y\rangle \in$ (two, ρ) и $\langle x, z\rangle \in$ (two, ρ) (допущение).

Опираясь на утверждение (5.1), на определение 22 и на соглашение 17, легко показать, что

(5.2) существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, что x есть $\neg^{[\mathrm{k}]}$(q) и k $\leq n$, выполняющие условия: $\langle x, y\rangle = \langle\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$ и $\langle x, z\rangle = \langle\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$.

Используя утверждение (5.1) и применяя известную теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, что (5.3) $y = z$.

Снимая допущение (5.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (5). Утверждение (5) доказано.

В свете утверждений (3),(4), (5) и стандартного определения отображения множества в множество ясно, что

(6) (two, ρ) есть отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0,1\}$.

(7) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценка (из (6), по определению 1).

(8) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q:
если $m \leq h(Q) < n$ и (two, ρ)(Q)=1, то (two, ρ)(($\neg$Q))$=0$.

Докажем утверждение (8).

(8.1) Q есть квазиэлементарная L-формула, $m \leq h(Q) < n$ и (two, ρ)(Q)=1 (допущение).

(8.2) Q есть квазиэлементарная L-формула (из (8.1)).

(8.3) $m \leq h(Q) < n$(из (8.1)).

(8.4) (two, ρ)(Q)=1(из (8.1)).

Подобно тому, как это сделано в построенном выше доказательстве утверждения (4), можно показать, что

(8.5) Q есть $\neg^{[h(Q)]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

Поскольку $h(Q)$ есть целое неотрицательное число, то в свете утверждений (8.3) и (8.5) ясно, что верно следующее утверждение (8.6).

(8.6) Существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, что Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ и $m \leq \mathrm{k} < n$.

Пусть (8.7) s есть пропозициональная переменная языка L, j есть целое неотрицательное число, Q есть $\neg^{[j]}(s)$ и $m \leq j < n$.

(8.8) s есть пропозициональная переменная языка L (из (8.7)).

(8.9) j есть целое неотрицательное число (из (8.7)).

(8.10) Q есть $\neg^{[j]}(s)$ (из (8.7)).

(8.11) $m \leq j < n$ (из (8.7)).

(8.12) $(\mathrm{two}, \rho)(\neg^{[j]}(s))=1$ (из (8.4) и (8.10)).

В свете утверждений (6) и (8.12) ясно, что

(8.13) $\langle \neg^{[j]}(s), 1\rangle \in (\mathrm{two}, \rho)$.

Опираясь на утверждение (8.13), на теорему о равенстве упорядоченных пар, на определение 22 и на соглашение 17, получаем, что

(8.14) $1= \rho(s)(j+1)$.

(8.15) $\rho(s) \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (8.8), по определению 16).

Используя утверждение (8.15) и замечание 4, получаем, что

(8.16) $\rho(s)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(8.17) Для всякого целого числа i: $m+1 \leq \mathrm{i} < n+1$ и $\rho(s)(\mathrm{i})=1$, то $\rho(s)(\mathrm{i}+1)=0$ (из (8.16) по определению 6).

(8.18) j+1 есть целое неотрицательное число (из (8.9)).

(8.19) m+1$\leq j$+1$< n$+1 (из (8. 11)).

(8.20) $\rho(s)(j+2)$=0 (из (8.14), (8.17), (8.18) и (8.19)).

(8.21) j+1$\leq n$ (из (8.18) и (8.19)).

(8.22) $\langle\neg^{[j+1]}(s),\, \rho(s)(j+2)\rangle \in$ (two, ρ) (из (8.8) и (8.21), по определению 22 и по соглашению 17).

(8.23) $\langle\neg^{[j+1]}(s),\, 0\rangle \in$ (two, ρ) (из (8.20) и (8.22)).

Разумеется, что (8.24) $\rho^{[j+1]}(s)$ есть квазиэлементарная L-формула, длина которой $\leq n$.

В свете утверждений (8.23) и (8.24) ясно, что

(8.25) (two, ρ) ($\neg^{[j+1]}(s)$)=0.

Понятно, что (8.26) $\neg^{[j+1]}(s)$ есть $(\neg\neg^{[j]}(s))$.

(8.27) (two, ρ)($(\neg Q)$)=0 (из (8.10), (8.25) и (8.26)).

Снимая допущение (8.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (8). Утверждение (8) доказано.

(9) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (7) и (8), по определению 2).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 16. Лемма 16 доказана.

Очевидно, что для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v существует единственное множество упорядоченных пар, которому принадлежат все те и только те упорядоченные пары, каждая из которых имеет вид $\langle i, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[\mathrm{i}-1]}(\mathrm{A}))\rangle$, где $i \in \{1,\ldots,n,n+1\}$, при этом понятно, что указанное множество $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$ есть отображение множества $\{1,\ldots,n,n+1\}$ в множество $\{0,1\}$.

Лемма 17. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 17.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

Условимся обозначать множество $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots,$ $\langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$ через Ψ. Покажем, что Ψ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж. Как было доказано ранее, верно, что (3) Ψ есть отображение множества $\{1, \ldots, n, n+1\}$ в множество $\{0, 1\}$.

(4) i есть целое число (допущение).

(5) $m+1 \leq i < n+1$ и $\Psi(i)=1$ (допущение).

(6) $m+1 \leq i < n+1$ (из (5)).

(7) $\Psi(i)=1$ (из (5)).

(8) $m \leq i-1 < n$ (из (6)).

Разумеется, что (9) $(\neg\neg^{[i-1]}(A))$ есть $\neg^{[i]}(A)$.

Очевидно, что (10) $\Psi(i)= \Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))$.

(11) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))=1$ (из (7) и (10)).

(12) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Опираясь на утверждение (8), легко показать, что

(13) $m \leq h(\neg^{[i-1]}(\mathrm{A}))$.

Ясно, что (14) $h(\neg^{[i-1]}(A)) < n$ или $h(\neg^{[i-1]}(A)) \geq n$.

(15) $h(\neg^{[i-1]}(A)) < n$ (допущение).

Опираясь на утверждения (12), (15), на определение 3 и на соглашение 4, получаем, что

(16) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A)) = v(\neg^{[i-1]}(A))$.

(17) $v(\neg^{[i-1]}(A))=1$ (из (11) и (16)).

(18) $v((\neg\neg^{[i-1]}(A))=0$ (из (2), (12), (13), (15) и (17), по определению 2).

(19) $v(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (8) и (18)).

В свете утверждения (15) ясно, что (20) $h(\neg^{[i]}(A))\leq n$.
Понятно, что (21) $\neg^{[i]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула.
Опираясь на утверждения (20), (21), на определение 3 и на соглашение 4, получаем, что

(22) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A)) = v(\neg^{[i]}(A))$.

(23) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (19) и (22)).

Снимая допущение (15), получаем, что

(24) если $h(\neg^{[i-1]}(A)) < n$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(25) $h(\neg^{[i-1]}(A))\geq n$ (допущение).

Опираясь на утверждения (2), (12), (25) и используя лемму 1, определение 3 и соглашение 4, получаем, что

(26) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[i-1]}(A)))=0$.

(27) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^[i](A))=0$ (из (9) и (26)).

Снимая допущение (25), получаем, что

(28) если $h(\neg^{[i-1]}(A))\geq n$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(29) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (14), (24), (28)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(30) если $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(31) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой (допущение).

Опираясь на утверждения (2),(31) и используя лемму 1, определение 3 и соглашение 4, получаем, что

(32) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[i-1]}(\mathrm{A})))=0$.

(33) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (9) и (32)).

Снимая допущение (31), получаем, что

(34) если $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

Разумеется, что (35) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула или $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой.

(36) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (29), (34) и (35)).

(37) $i < n+1$ (из (6)).

(38) $i+1\leq n+1$ (из (4) и (37)).

Опираясь на утверждение (38), легко показать, что

(39) $\Psi(i+1)= \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))$.

(40) $\Psi(i+1)=0$ (из (36) и (39)).

Снимая допущения (4) и (5) и обобщая, получаем, что

(41) для всякого целого числа i: если $m+1\leq$ i$<$ $n+1$ и $\Psi(i)=1$, то $\Psi(i+1)=0$.

(42) Ψ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (3) и (41), по определению 6).

Опираясь на утверждение (42) и на замечание 4, получаем, что

(43) $\Psi \in C_{\langle m,n\rangle}$.

(44) $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (43) и соглашения об использовании Ψ в качестве обозначения).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 17. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Для всякой L-формулы* A *и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки* v*: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A})) = 1$, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(\mathrm{A})) = 0$.*

Докажем лемму 18.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))=1$(допущение).

Очевидно, что верны следующие утверждения (4) и (5)).

(4) $(\neg\neg^{[n]}(A))$ есть $\neg^{[n+1]}(A)$.

(5) $h(\neg^{[n]}(A))\geq n$.

Разумеется, что (6) $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула.

(7) $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(8) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$ (из (2), (5) и (7), по определению 3 и по соглашению 4).

Опираясь на утверждения (2), (6), (8) и применяя лемму 1, получаем, что

(9) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$.

(10) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ (из (3) и (9)).

(11) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (4) и (10)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(12) если $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$ (из (2), (6) и (13), по определению 3 и соглашению 4).

Опираясь на утверждения (2), (6), (14) и применяя лемму 1, получаем, что

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$.

(16) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ (из (3) и (15)).

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (4) и (16)).

Снимая допущение (13), получаем, что

(18) если $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

(19) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (12) и (18)).

Снимая допущение 3, получаем, что

(20) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 18. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A})) = 0$, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(\mathrm{A})) = 1$.

Докажем лемму 19.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0(допущение).

Очевидно, что верны следующие утверждения (4) и (5)).

(4) $(\neg\neg^{[n]}(A))$ есть $\neg^{[n+1]}(A)$.

(5) $h(\neg^{[n]}(A))\geq n$.

Разумеется, что (6) $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула.

(7) $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(8) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))$=1 тогда и только тогда, когда $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0 (из (2), (5) и (7), по определению 3 и по соглашению 4).

(9) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))$=1 (из (3) и (8)).

(10) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=1 (из (4) и (9)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(11) если $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=1.

(12) $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))=1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$ (из (2), (6) и (12), по определению 3 и по соглашению 4).

(14) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))=1$ (из (3) и (13)).

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (4) и (14)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(16) если $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (11) и (16)).

Снимая допущения (3), получаем, что

(18) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 19. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})} = \{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$.

Докажем лемму 20 методом индукции по построению L-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка L и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{q}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}=\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{q}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{q}))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{q}))\rangle\}$.

Докажем базис.

(1) s есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (2), по лемме 15).

(4) (cort,v) есть кортежный напарник $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v (из (2), по соглашению 16).

Опираясь на утверждение (4) и на определение 21, получаем, что

(5) (cort,v) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, (v\text{-}q\text{-cort})\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

В свете утверждения (1), (2), определения 20 и соглашения 15 ясно, что

(6) (v-s-cort) есть $\{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle,\ldots,\langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n{+}1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$.

(7) $\langle s,(v\text{-}s\text{-cort})\rangle \in$ (cort,v) (из (1) и (5)).

(8) $\langle s,\{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle,\ldots,\langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n{+}1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}\rangle \in$ (cort,v)(из (6) и (7)).

(9) (cort,v) есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка L (из (3), по определению 16).

Опираясь на утверждения (1), (8) и (9), получаем, что

(10) (cort,v)(s)$=\{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle,\ldots,\langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n{+}1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$.

В свете утверждений (1),(3), определения 17 и соглашения 14 ясно, что

(11) $|s|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = (\mathrm{cort}, v)(s)$.

Очевидно, что (12) $\neg^{[0]}(s),\ldots, \neg^{[n-1]}(s), \neg^{[n]}(s)$ являются квазиэлементарными L-формулами, длина каждой из которых $\leq n$.

Опираясь на утверждения (1), (2), (12), определение 3 и соглашение 4, устанавливаем, что

(13) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(s))= v(\neg^{[0]}(s)),\ldots, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(s))= v(\neg^{[n-1]}(s))$, $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(s))= v(\neg^{[n]}(s))$.

(14) $|s|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(s))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$ (из (10), (11) и (13)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство базиса. Базис доказан.

Индукционный шаг для негативных L-формул.

Для всякой L-формулы A: <u>если</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle,$ $\langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$, <u>то</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|(\neg\mathrm{A})|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((\neg\mathrm{A})))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((\neg\mathrm{A})))\rangle,$ $\langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((\neg\mathrm{A})))\rangle\}$.

Докажем индукционный шаг для негативных L-формул.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})} =$ $\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (допущение).

(3) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(4) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$(из (2) и (3)).

В свете утверждения (4) ясно, что

(5) $\neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}) = \neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,$ $\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})$.

(6) $\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n + 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle\}}$ (из (1) и (3), по лемме 17).

Опираясь на утверждение (6), на определение 15, на соглашение 12 и на лемму 13, убеждаемся, что

(7) <u>если</u> $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$, <u>то</u> $\langle m,n\rangle(\{\langle\ 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 1\rangle\}$, а <u>если</u> $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$, <u>то</u> $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\ \rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\ \rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 0\rangle\}$.

(8) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)){=}0$ (допущение).

(9) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}){=}\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle,$ $\langle n+1, 1\rangle\}$ (из (7) и (8)).

(10) Если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)){=}0$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)){=}1$ (из (1) и (3), по лемме 19).

(11) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)){=}1$ (из (8) и (10)).

(12) $\langle m,n\rangle(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ \ldots,$ $\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (9) и (11)).

Снимая допущение (8), получаем, что

(13) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$, то $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,$ $\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$.

(14) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)){=}1$ (допущение).

(15) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}){=}\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(\mathrm{A}))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 0\rangle\}$(из (7) и (14)).

(16) Если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=0 (из (1) и (3), по лемме 18).

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=0 (из (14) и (16)).

(18) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (15) и (17)).

Снимая допущение (14), получаем, что

(19) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, то $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$.

Опираясь на утверждение (3) и тот факт, что $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула, получаем, применяя лемму 1, что

(20) либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0.

(21) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (13), (19) и (20)).

(22) $\neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}) = \{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$(из (5) и (21)).

(23) $|(\neg A)\ |^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = \neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)})$ (из (3), по определению 17 и по соглашению 14).

Ясно, что (24) для всякой L-формулы A и для всякого i из $\{1, \ldots, n, n+1\}\neg^{[\mathrm{i}]}(A)$ есть $\neg^{[\mathrm{i}-1]}((\neg A))$.

Опираясь на утверждение (1) и (24), получаем, что

(25) $\neg^{[1]}(A)$ есть $\neg^{[0]}((\neg A))$,..., $\neg^{[n]}(A)$ есть $\neg^{[n-1]}((\neg A))$, $\neg^{[n+1]}(A)$ есть $\neg^{[n]}((\neg A))$.

(26) $|(\neg A)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}((\neg A)))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}((\neg A)))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}((\neg A)))\rangle\}$ (из (22), (23) и (25)).

Снимая последовательно допущения (3), (2), (1) и проводя надлежащие обобщения, завершаем доказательство индукционного шага для негативных L-формул. Индукционный шаг для негативных L-формул доказан.

Индукционный шаг для конъюнктивных L-формул.

Для всякой L-формулы A и для всякой L-формулы B: <u>если</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{B}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(B))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(B))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(B))\rangle\}$, <u>то</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|(\mathrm{A}\&\mathrm{B})|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle\}$.

Докажем индукционный шаг для конъюнктивных L-формул.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) B есть L-формула (допущение).

(3) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})}=\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})}=\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(B))\rangle,\ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(B))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(B))\rangle\}$ (допущение).

(4) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(5) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$(из (3) и (4)).

(6) $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(\ B))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}(B))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}(\ B))\rangle\}$(из (3) и (4)).

(7) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (4), по лемме 15).

(8) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\&_{\langle m,n\rangle}|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ (из (1), (2), (7), по определению 17 и по соглашению 14).

(9) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ принадлежат множеству $C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1), (2), (7), по определению 17 и по соглашению 14).

В силу утверждений (5), (6) и (9) очевидно, что

(10) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)= \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)= \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(B))$.

Опираясь на утверждение (9), на лемму 10 и и на соглашение 9, получаем, что

(11) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$.

В свете утверждения (10) и определения 12 ясно, что

(12) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$1_{\langle m,n\rangle}$ или
$|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$0_{\langle m,n\rangle}$.

Очевидно, что существует единственное множество упорядоченных пар, которому принадлежат все те и только те упорядоченные пары, каждая из которых имеет вид $\langle i,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\ \neg^{[i-1]}((A\&B)))\rangle$, где $\in\{1,\ldots,n,n{+}1\}$.

Нетрудно доказать, что (13) множество
$\{\langle 1,\ \ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\ \ \langle n,\ \ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ является нормальным $\langle m,n\rangle$-кортежем.

(14) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$1_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

(15) $1_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$ (из (11) и (14)).

Используя утверждение (9), (15) и определение 12, получаем, что

(16) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)=1$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)=1$.

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))=1$ и $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(B))=1$ (из (10) и (16)).

Опираясь на утверждения (4), (17), на определение 3, на соглашение 1 и на соглашение 4, убеждаемся, что (18) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))=1$.

Принимая во внимание утверждения (13), (18), определение 10 и договоренность об обозначении единичного $\langle m,n\rangle$-кортежа, получаем, что

(19) $\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,\ \langle n+1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}=1_{\langle m,n\rangle}$.

(20) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n+1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (8), (14) и (19)).

Снимая допущение (14), получаем, что

(21) если $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \&_{\langle m,n\rangle} |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = 1_{\langle m,n\rangle}$, то $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}= \{\langle 1,$ $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$ $\langle n+1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$.

(22) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \&_{\langle m,n\rangle} |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=0_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

(23) $0_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$ (из (11) и (22)).

Используя утверждения (9), (23) и определение 12, получаем, что

(24) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)\neq 1$ или $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)\neq 1$.

(25) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A)){\neq}1$ или $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(B)){\neq}1$ (из (10) и (24)).

Опираясь на утверждения (4), (25), на определение 3, на соглашение 1 и на соглашение 4, убеждаемся, что (26) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B))){\neq}1$. Разумеется, что (27) $\neg^{[0]}((A\&B))$ есть L-формула.

(28) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))=0$ (из (4), (26) и (27), по лемме 1).

Принимая во внимание утверждения (13), (28), определение 11 и договоренность об обозначении нулевого $\langle m,n\rangle$-кортежа, убеждаемся, что

(29) $\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}=0\langle m,n\rangle$.

(30) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$
$\langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,\langle n{+}1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (8), (22) и (29)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(31) если $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\&_{\langle m,n\rangle}|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=0_{\langle m,n\rangle}$, то $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=$
$\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$.

(32) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$
$\langle n,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,\langle n{+}1,\ \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (12), (21) и (31)).

Снимая допущения с (4) по (1) и проводя надлежащие обобщения, завершаем доказательство индукционного шага для конъюнктивных L-формул. Индукционный шаг для конъюнктивных L-формул доказан.

Доказательство индукционного шага для дизъюнктивных L-формул и доказательство индукционного шага для импликативных L-формул аналогичны предложенному доказательству индукционного шага для конъюнктивных L-формул и здесь не приводятся. Лемма 20 доказана.

Лемма 21. Для всякой L-формулы А и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})=1$ тогда и только тогда, когда $|\mathrm{A}|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 21.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\ \rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\} \in\ C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (2), по лемме 17).

(4) $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (3)).

Ясно, что верны следующие утверждения (5) и (6)).

(5) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))$ есть первый член $\langle m,n\rangle$-кортежа
$\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$.

(6) $\neg^{[0]}(A)$ есть A.

(7) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$ есть первый член $\langle m,n\rangle$-кортежа
$\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (из (5) и (6)).

(8) $|A|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$
$\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (из (1) и (2), по лемме 20).

(9) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (7), (8), (9) и на замечание 4, получаем, что

(10) $|A|_{(\mathrm{cort,v})}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Снимая допущение (9), получаем, что

(11) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1, то $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$

(12) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (7), (8), (12) и на замечание 4, получаем, что

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Снимая допущение (12), получаем, что

(14) если $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\ A)$=1.

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1 тогда и только тогда, когда $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 21. Лемма 21 доказана.

Лемма 22. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что (cort, (two, ρ))= ρ.

Докажем лемму 22.

(1) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

(2) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (1), по лемме 16).

(3) (cort, (two, ρ)) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q$,((two, ρ)-q-cort)$\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L (из (2), по определению 21 и по соглашению 16).

(4) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1$,((two, ρ)- p_1-cort)$\rangle$, $\langle p_2$,((two, ρ)- p_2-cort)$\rangle$, $\langle p_3$,((two, ρ)-p_3-cort)$\rangle$,...$\}$ (из (3)).

Опираясь на утверждение (2) и на определение 20, можно показать, что

(5) для всякой пропозициональной переменной q языка L верно, что $\{\langle 1$, (two, ρ)($\neg^{[0]}$(q))$\rangle$,...,$\langle n$, (two, ρ)($\neg^{[n-1]}$(q))$\rangle$, $\langle n$+1, (two, ρ)($\neg^{[n]}$(q))$\rangle\}$ является (two, ρ)-q-кортежем.

(6) Для всякой пропозициональной переменной q языка L ((two, ρ)-q-cort)=$\{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(\mathrm{q}))\rangle,\ldots,\langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(\mathrm{q}))\rangle, \langle n{+}1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(\mathrm{q}))\rangle\}$ (из (5), по соглашению 15).

(7) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_1))\rangle,\ldots,$ $\langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_1))\rangle, \langle n{+}1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_1))\rangle\}\rangle,$ $\langle p_2, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_2))\rangle,\ldots, \langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_2))\rangle,$ $\langle n{+}1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_2))\rangle\}\rangle, \langle p_3, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_3))\rangle,\ldots,$ $\langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_3))\rangle, \langle n{+}1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_3))\rangle\}\rangle,\ldots\}$ (из (4) и (6)).

Опираясь на утверждение (1), на определение 22, на соглашение 17 и тот имеющийся в силу леммы 16 факт, что (two, ρ) есть отображение, получаем, что (8) для всякой пропозициональной переменной q языка L и всякого целого неотрицательного числа k, которое $\leq n$ (two, $\rho)(\neg^{[k]}(\mathrm{q}))= \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)$.

(9) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1,\{\langle 1, \rho(p_1)(1)\rangle,\ldots,\langle n, \rho(p_1)(n)\rangle,$ $\langle n{+}1, \rho(p_1)(n{+}1)\rangle\}\rangle, \langle p_2,\{\langle 1, \rho(p_2)(1)\rangle,\ldots,\langle n, \rho(p_2)(n)\rangle,$ $\langle n{+}1, \rho(p_2)(n{+}1)\rangle\}\rangle, \langle p_3,\{\langle 1, \rho(p_3)(1)\rangle,\ldots,\langle n, \rho(p_3)(n)\rangle,$ $\langle n{+}1, \rho(p_3)(n{+}1)\rangle\}\rangle,\ldots\}$(из (7) и (8)).

В свете утверждения (9) легко усмотреть, что

(10) (cort, (two, ρ)) есть такое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L, что для всякой пропозициональной переменной q языка L (cort, (two, ρ))(q)=$\{\langle 1, \rho(\mathrm{q})(1)\rangle,\ldots, \langle n, \rho(\mathrm{q})(n)\rangle, \langle n{+}1, \rho(\mathrm{q})(n{+}1)\rangle\}$.

Понятно, что (11) для всякой пропозициональной переменной q языка L $\rho(\mathrm{q})$ есть такое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L, что $\rho(\mathrm{q})= \{\langle 1, \rho(\mathrm{q})(1)\rangle,\ldots,\langle n, \rho(\mathrm{q})(n)\rangle,$ $\langle n{+}1, \rho(\mathrm{q})(n{+}1)\rangle\}$.

(12) (cort, (two, ρ))= ρ (из (10) и (11)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 22. Лемма 22 доказана.

Лемма 23. Для всякой L-формулы A и для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ: $\mid \mathrm{A} \mid_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})=1$.

Докажем лемму 23.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

(3) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (2), по лемме 16).

(4) $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{A} \mid_{(\mathrm{cort},(\mathrm{two},\rho))}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (3), по лемме 21).

Опираясь на утверждения (2) и (4) и на лемму 22, получаем, что

(5) $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{A} \mid_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

(6) $\mid \mathrm{A} \mid_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ (из (5)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 23. Лемма 23 доказана.

Лемма 24. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A, то из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A.

Докажем лемму 24 методом от противного.

(1) Неверно, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A, то из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A (допущение).

(2) Существует такое множество M L-формул и существует такая L-формула A, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A и неверно, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A (из (1)).

Пусть (3) M есть множество L-формул, A есть L-формула, из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A, неверно, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A.

(4) M есть множество L-формул (из (3)).

(5) A есть L-формула (из (3)).

(6) Из $M\, I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (3)).

(7) Неверно, что из $M\, \mathfrak{M}(m,n)$-следует A (из (3)).

(8) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$(B)=1 для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$(A)=1 (из (6), по определению 4).

Опираясь на утверждения (4), (5), (7) и на определение 19, получаем, что

(9) неверно, что для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ: если $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

(10) Существует такая $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка ρ, для которой верно как то, что $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, так и то, что $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$ (из (9)).

Пусть (11) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка, $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$.

(12) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (11)).

(13) $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M (из (11)).

(14) $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$ (из (11)).

(15) Для всякой L-формулы A: $|\ \mathrm{A}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}$(A)=1 (из (12), по лемме 23).

(16) Для всякой L-формулы B из M: $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}$(B)=1 (из (15)).

(17) Для всякой L-формулы B из M $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}$(B)=1 (из (13) и (16)).

(18) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (12), по лемме 16).

(19) Если $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}$(B)=1 для всякой L-формулы B из M, то $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1(из (8) и (18)).

(20) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1 (из (17) и (19)).

(21) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{\rho} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1 (из (5) и (12), по лемме 23).

(22) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{\rho} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (20) и (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда верна лемма 24. Лемма 24 доказана.

Лемма 25. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, то из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A.

Докажем лемму 25 методом от противного.

(1) Неверно, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, то из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (допущение).

(2) Существует такое множество M L-формул и существует такая L-формула A, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A и неверно, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (1)).

Пусть (3) M есть множество L-формул, A есть L-формула, из $M\,\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, неверно, что из $M\,I_{\langle m,n\rangle}$-следует A.

(4) M есть множество L-формул (из (3)).

(5) A есть L-формула (из (3)).

(6) Из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A(из (3)).

(7) Неверно, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (3)).

(8) Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что если $\mid \mathrm{B} \mid_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (6), по определению 19). Опираясь на утверждение (4), (5), (7) и на определение 4, получаем, что

(9) неверно, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$.

(10) Существует такая $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка v, для которой верно как то, что $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, так и то, что $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$ (из (9)).

Пусть (11) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$.

(12) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (11)).

(13) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M (из (11)).

(14) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$(из (11)).

(15) Для всякой L-формулы A: $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{A} \mid_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (12), по лемме 21).

(16) Для всякой L-формулы B из M: $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{B} \mid_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (15)).

(17) Для всякой L-формулы B изM| B $|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (13) и (16)).

(18) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (12), по лемме 15).

(19) Если $|\ \mathrm{B}\ |^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (8) и (18)).

(20) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (17) и (19)).

(21) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(A)$=1 тогда и только тогда, когда $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (12), по лемме 21).

(22) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(A)$=1 (из (20) и (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда верна лемма 25. Лемма 25 доказана.

Очевидным следствием лемм 24 и 25 является теорема 3.

Теорема 3. Для всякого множества М L-формул и для всякой L-формулы А: из М $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А тогда и только тогда, когда из М $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А.

Теорема 4. Для всякой L-формулы А: А$\in I_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда А есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула.

Докажем теорему 4.
Разумеется, что (1) $\varnothing$ есть множество L-формул.

(2) Для всякой L-формулы А: из $\varnothing$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А тогда и только тогда, когда из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А (из (1), по теореме 3).

Очевидно, что справедливо следующие утверждения (3) и (4).

(3) Для всякой L-формулы А: из $\varnothing$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А тогда и только тогда, когда А есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула.

(4) Для всякой L-формулы А: из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А тогда и только тогда, когда А есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула.

(5) Для всякой L-формулы А: А есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула тогда и только тогда, когда А есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула (из (2), (3) и (4)).

(6) Для всякой L-формулы A: $A \in I_{\langle m,n \rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула (из (5), по теореме 2).

Теорема 4 доказана.

В свете теоремы 4 ясно, что $\mathfrak{M}(m,n)$ является характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n \rangle}$. А поскольку $C_{\langle m,n \rangle}$ есть конечное множество, то понятно, что логическая матрица $\mathfrak{M}(m,n)$ конечна. Таким образом, справедлива следующая теорема 5.

Теорема 5. Логика $I_{\langle m,n \rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle m,n \rangle}$.

Опираясь на теорему 5 и учитывая, что m и n — произвольные целые неотрицательные числа, первое из которых меньше второго, приходим к следующему обобщению: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle x,y \rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle x,y \rangle}$.

Литература

[1] *Попов В. М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа // Логические исследования 2016. Т. 22. № 1. С. 33–69.

V.M. Popov

To the Problem of Characterization of Logic of the Vasiliev Type: on Tabularity $I_{\langle x,y \rangle}$($x, y \in${0, 1, 2,...} and $x < y$). Part II

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

In this article, continuing the work carried out in [1], the problem of tabularity of the I-logics of the Vasiliev type (propositional logic is called tabular if it has a finite characteristic matrix). The main result obtained in this article: for any non-negative integers x and y, the first of which is less than the second, the logic $I_{\langle x,y \rangle}$ is tabular (the class of all such logics is an infinite subclass of the class of all I-logics of the Vasiliev type). The proposed study is based on the use of the results obtained in [1], and on the use of the authors' "cortege semantics". To achieve the above main result, we show how on arbitrary nonnegative integer numbers m and n, satisfying the inequality $m < n$, is constructed logic matrix $\mathfrak{M}(m, n)$, which is the finite characteristic matrix of logic $I_{\langle x,y \rangle}$. Since the carrier of the logical matrix $\mathfrak{M}(m, n)$ is some set of 0-1-corteges, the semantics based on this logical matrix is naturally called the cortege semantics. Important note: the article is published in two parts, which is due solely to external factors for this article. Before you, the second (final) part of the study, the first part of which was published in the first issue of "Logical Investigations" for 2017.

Keywords: I-logic $I_{\langle m,n \rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the two-valued semantics of the I-logic $I_{\langle m,n \rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the cortege semantics of the I-logic $I_{\langle m,n \rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$

References

[1] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya i semantika I-logik vasil'evskogo tipa" [Sequential axiomatization and semantics I-logic of the Vasiliev type], *Logicheskie issledovaniya* [Logical research], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 33–69. (In Russian)

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 60–75
УДК 510.643

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 60–75
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-60-75

М.Н. Рыбаков

Неразрешимость модальных логик одноместного предиката[1]

Рыбаков Михаил Николаевич
Математический факультет,
Тверской государственный университет.
Российская федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
E-mail: `m_rybakov@mail.ru`

Рассматриваются модальные предикатные логики в языке, содержащем только одноместные предикатные буквы. Показано, что любая логика, содержащаяся в **QS5**, **QGLLin** или **QGrz.3** является алгоритмически неразрешимой в языке с одной одноместной предикатной буквой (как при наличии, так и при отсутствии в логике формулы Баркан). Также показано, что логики конечных шкал Крипке (как с расширяющимися, так и с постоянными областями) для **QK**, **QT**, **QD**, **QK4**, **QS4**, **QS5**, **QGL**, **QGrz** и многих других не являются рекурсивно перечислимыми в языке с одной одноместной предикатной буквой. Тем не менее табличные логики и логики шкал Крипке с ограничением на число миров, достижимых из произвольного мира, разрешимы в языке с бесконечным множеством одноместных предикатных букв.

Ключевые слова: модальная логика, логика первого порядка, разрешимость

1. Введение

А. Чёрч и А. Тьюринг доказали, что логика предикатов **QCL** не является алгоритмически разрешимой [8, 9, 16, 17], т. е. не существует такой эффективной процедуры, которая по произвольной формуле логики предикатов выясняет, является ли эта формула тождественно истинной. Тем не менее **QCL** содержит довольно выразительные разрешимые фрагменты. Например, разрешимым является монадический фрагмент **QCL**, т. е. фрагмент **QCL**, образованный формулами в языке, содержащем только одноместные предикатные буквы. Действительно, с помощью одноместных предикатных букв $P_1, \ldots, P_n$ в

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 16–07–01272 и 17–03–00818.

модели можно различить не более чем 2^n элементов, а значит, чтобы выяснить, является ли тождественно истинной формула, содержащая в качестве предикатных букв только $P_1, \ldots, P_n$, достаточно проверить, истинна ли она в моделях, число элементов которых не превышает 2^n. Незначительная модификация этой идеи позволяет получить разрешающие процедуры для монадического фрагмента **QCL** с равенством, см. [1], глава 25; более того, доказана даже разрешимость монадических фрагментов **QCL**, в которых дополнительно используются и бинарные буквы, но с определенными ограничениями [14].

Для неклассических логик предикатов ситуация с разрешимостью их монадических фрагментов выглядит совершенно иначе. С.Крипке показал [13][2], что формула вида $R(x, y)$ может быть промоделирована в **QS5** формулой вида $\Diamond(P(x) \wedge Q(y))$. С учетом того, что фрагмент **QCL** в языке с одной бинарной предикатной буквой алгоритмически неразрешим (см., например, [1], глава 25), мы сразу получаем, что фрагмент **QS5** в языке с двумя одноместными предикатными буквами также алгоритмически неразрешим; более того, этот результат автоматически распространяется на любую модальную предикатную логику, допускающую шкалу Крипке, содержащую мир, множество достижимых миров из которого бесконечно. Чуть позже С.Ю.Маслов, Г.Е. Минц и В.П. Оревков показали, что для неразрешимости интуиционистской логики предикатов вообще достаточно использовать одну одноместную предикатную букву [3], откуда следует неразрешимость **QS4** в языке с одной одноместной предикатной буквой (см.также [4, 10]). Отметим также, что во введении работы [11] утверждается неразрешимость логики **QS5** в языке с одной одноместной предикатной буквой, но в [11] этот результат приводится без каких-либо пояснений.

Мы покажем, что неразрешимыми являются «почти все» модальные логики предикатов: для неразрешимости достаточно одной одноместной буквы в языке и отсутствия в логике формул, ограничивающих ширину ветвления в ее шкалах (при этом полнота по Крип-

---

[2]Русский перевод этой статьи можно найти в [6].

ке не требуется). Во многих логиках формулу $\Diamond(P(x)\wedge Q(y))$ можно промоделировать формулой $\Diamond(P(x)\wedge\Diamond P(y))$: для этого достаточно, чтобы логика допускала иррефлексивные деревья высоты 2, в которых из корня достижимо бесконечно много миров. Этому условию удовлетворяют, например, все логики, содержащиеся в **QGL**. Но, скажем, в случае **QS5** сталкиваемся с затруднением: в **QS5** формула $\Diamond(P(x)\wedge\Diamond P(y))$ эквивалентна формуле $\Diamond P(x)\wedge\Diamond P(y)$, и соответствующее ей бинарное отношение R обладает некоторыми специфическими свойствами (например, из истинности $R(x,y)$ следует, что истинны также $R(y,x)$, $R(x,x)$ и $R(y,y)$). Конечно, если в языке имеются две **S5**-модальности, то $R(x,y)$ моделируется, например, формулой $\Diamond_1(P(x)\wedge(\neg P(y)\to\Diamond_2 P(y))\wedge(P(y)\to\Diamond_2\neg P(y)))$. Ниже будет показано, как обойти указанное затрудение, используя лишь одну модальность.

2. Синтаксис и семантика

Будем считать, что модальный предикатный язык содержит счетное множество предметных переменных, счетное множество предикатных букв (для любой местности), символы связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, логическую константу $\bot$, модальность $\Box$, кванторный символ $\forall$, скобки и запятую. Формулы строятся обычным образом из элементарных формул вида $\bot$ и $P(x_1,\ldots,x_n)$, где P — n-местная предикатная буква, а $x_1,\ldots,x_n$ — предметные переменные, с помомощью связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, модальности $\Box$ и кванторов вида $\forall x$, где x — предметная переменная.

Шкалой Крипке называем набор $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$, где W — непустое множество, R — бинарное отношение на W. Элементы W называем мирами, а отношение R — отношением достижимости.

Шкалой Крипке с предметной областью (или предикатной шкалой Крипке) называем набор $\mathfrak{F}(D)=\langle W,R,D\rangle$, где $\langle W,R\rangle$ — шкала Крипке, а D — функция, которая каждому миру $w\in W$ сопоставляет непустое множество $D(w)$, причем функция D удовлетворяет следующему условию: если wRw', то $D(w)\subseteq D(w')$. Множество $D(w)$ называем предметной областью мира w.

Шкалу $\mathfrak{F}(D) = \langle W, R, D\rangle$ называем шкалой с постоянными областями, если из wRw' следует, что $D(w) = D(w')$.

Моделью Крипке называем набор $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I\rangle$, где $\langle W, R, D\rangle$ — шкала с предметной областью, а I — интерпретация предикатных букв в мирах множества w, т. е. функция, сопоставляющая каждому миру $w \in W$ и каждой n-местной предикатной букве P некоторое n-местное отношение $I(w, P)$ на множестве $D(w)$.

Интерпретация предметных переменных — это функция g, которая каждой предметной переменной x сопоставляет некоторый элемент $g(x)$. Содержательно $g(x)$ можно мыслить как элемент предметной области некоторого мира модели, но, вообще говоря, для дальнейших формальных определений это не имеет принципиального значения.

Определим рекурсивно отношение истинности формулы φ в мире w модели $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I\rangle$ при интерпретации g. Если это отношение выполнено, то пишем $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$. Итак:

- $\mathfrak{M}, w \not\models^g \bot$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\langle g(x_1), \ldots, g(x_n)\rangle \in I(w, P)$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi' \wedge \varphi''$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi'$ и $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi''$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi' \vee \varphi''$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi'$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi''$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi' \to \varphi''$, если $\mathfrak{M}, w \not\models^g \varphi'$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi''$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \neg\varphi'$, если $\mathfrak{M}, w \not\models^g \varphi'$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \Box\varphi'$, если для любого $w' \in W$ из условия wRw' следует, что $\mathfrak{M}, w' \models^g \varphi'$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \forall x\, \varphi'$, если для любой интерпретации g', отличающейся от g только, быть может, значением на x, и такой, что $g'(x) \in D(w)$, выполняется $\mathfrak{M}, w \models^{g'} \varphi'$.

Формулу φ считаем истинной в мире w модели $\mathfrak{M}$, если φ истинна в w при любой интерпретации предметных переменных, которая интерпретирует каждую свободную переменную формулы φ элементом из $D(w)$; в этом случае пишем $\mathfrak{M}, w \models \varphi$. Формулу φ считаем истинной в модели $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ для каждого мира w модели $\mathfrak{M}$; в этом случае пишем $\mathfrak{M} \models \varphi$. Формулу φ считаем истинной в шкале $\mathfrak{F}(D)$, если φ истинна в каждой модели, определенной на $\mathfrak{F}(D)$; в этом случае пишем $\mathfrak{F}(D) \models \varphi$. Формулу φ считаем истинной в шкале $\mathfrak{F}$, если φ истинна в каждой шкале вида $\mathfrak{F}(D)$; в этом случае пишем $\mathfrak{F} \models \varphi$. Наконец, формулу φ считаем истинной в классе шкал, если она истинна в каждой шкале из этого класса.

Если $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$ — формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и $a_1, \ldots, a_n$ — элементы предметной области некоторого мира некоторой модели, то в этом случае иногда будем использовать запись $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, понимая ее так, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ интерпретируются элементами $a_1, \ldots, a_n$, соответственно.

3. Несколько вспомогательных фактов

Для доказательства неразрешимости **QS5** в языке с одной одноместной предикатной буквой нам понадобится несколько известных фактов, касающихся неразрешимости некоторых теорий бинарных отношений.

Пусть **SIB** — теория симметричного иррефлексивного бинарного отношения, т. е. множество всех первопорядковых формул в языке с одной бинарной предикатной буквой, истинных в моделях, где эта буква интерпретируется симметричным иррефлексивным отношением.

ФАКТ 1. *Теория* **SIB** *алгоритмически неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] в главе 25 приводится доказательство неразрешимости логики предикатов в языке с одной двухместной предикатной буквой. В [12] в §10 показано, как бинарные отношения можно промоделировать симметричными иррефлексивными отношениями (см.также [15]). Как следствие получаем неразрешимость **SIB**. $\square$

Пусть $sib = \forall x \forall y(P(x,y) \to P(y,x)) \wedge \forall x \neg P(x,x)$. Истинность формулы sib в модели означает, что букве P в этой модели сопоставлено симметричное иррефлексивное бинарное отношение.

Замечание 1. $\varphi \in \mathbf{SIB} \Longleftrightarrow sib \to \varphi \in \mathbf{QCL}$.

Пусть **FSIB** — теория конечных моделей теории **SIB**.

ФАКТ 2. *Теория* **FSIB** *не является рекурсивно перечислимой.*

Доказательство. В силу теоремы М.А. Трахтенброта [5], теория конечных моделей не является рекурсивно перечислимой. Используя аргументацию из [1] и [12], получаем неперечислимость **FSIB**. □

Замечание 2. $\varphi \in \mathbf{FSIB} \Longleftrightarrow sib \to \varphi \in \mathbf{FQCL}$.

4. Погружение

Для первопорядковой формулы ψ в языке с одной бинарной предикатной буквой P обозначим через ψ^* модальную формулу, получающуюся из ψ заменой каждого вхождения вида $P(x,y)$ вхождением $\Box(\neg Q(x) \vee \neg Q(y))$.

Утверждение 1. *Если φ — безмодальная первопорядковая замкнутая формула в языке с одной бинарной предикатной буквой P, то*

$$\varphi \in \mathbf{SIB} \Longleftrightarrow (sib \to \varphi)^* \in \mathbf{QS5}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{SIB}$. Тогда $sib \to \varphi \in \mathbf{QCL}$, и значит, $sib \to \varphi \in \mathbf{QS5}$. Логика **QS5** замкнута по правилу подстановки, а $(sib \to \varphi)^*$ получена из $sib \to \varphi$ с помощью этого правила, следовательно, $(sib \to \varphi)^* \in \mathbf{QS5}$.

Пусть $\varphi \notin \mathbf{SIB}$. Тогда формула φ опровергается в некоторой алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, S \rangle$, где A — непустая предметная область, S — симметричное иррефлексивное бинарное отношение на A, соответствующее букве P.

Пусть $W = A \times A$, $R = W \times W$, $D(w) = A$ для каждого $w \in W$. Определим модель $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$, положив для всяких $a, b, c \in A$

$$\mathfrak{M}, \langle a, b \rangle \models Q[c] \quad \leftrightharpoons \quad c \in \{a, b\} \text{ и неверно, что } aSb.$$

Тогда для любых $a, b \in A$

$$\mathfrak{M} \models \Box(\neg Q[a] \vee \neg Q[b]) \iff aSb,$$

из чего заключаем, что $\mathfrak{M} \not\models \varphi^*$. Осталось заметить, что $\mathfrak{M} \models sib^*$, а значит, $\mathfrak{M} \not\models (sib \to \varphi)^*$. Следовательно, $(sib \to \varphi)^* \notin$ **QS5**. $\Box$

Извлечем следствия из доказанного утверждения.

Следствие 1. *Логика* **QS5** *в языке с одной одноместной предикатной буквой не является алгоритмически разрешимой.*

На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Следствие 2. *Пусть L — произвольное множество формул в модальном языке первого порядка с одной одноместной предикатной буквой, содержащее в себе все подстановочные примеры формул из* **QCL** *и содержащееся в* **QS5**. *Тогда L не является разрешимым.*

Доказательство. Достаточно показать, что если φ — безмодальная первопорядковая замкнутая формула в языке с одной бинарной предикатной буквой P, то

$$\varphi \in \mathbf{SIB} \iff (sib \to \varphi)^* \in L.$$

Если $\varphi \in$ **SIB**, то $sib \to \varphi \in$ **QCL**, и тогда $(sib \to \varphi)^* \in L$, так как все подстановочные примеры формул из **QCL** содержатся в L. Если же $\varphi \notin$ **SIB**, то, как было показано, $(sib \to \varphi)^* \notin$ **QS5**, а значит, $(sib \to \varphi)^* \notin L$, поскольку $L \subseteq$ **QS5**. $\Box$

Следствие 3. *Логики* **QK**, **QK4**, **QT**, **QD**, **QS4** *в языке с одной одноместной предикатной буквой не являются алгоритмически разрешимыми.*

Заметим, что в доказательстве утверждения 1 можно считать, что A — счетное множество (в силу теоремы Лёвенгейма–Сколема; см., например, [2], следствие 2.16), поэтому, по сути, важно лишь то, чтобы логика допускала шкалу, где имеется мир, из которого достижимо бесконечно много других миров. Другими словами, справедлива следующая «техническая» лемма.

Лемма 1. *Пусть L — логика, допускающая шкалу Крипке, содержащую мир, из которого достижимо бесконечно много других миров. Тогда если φ — безмодальная первопорядковая замкнутая формула в языке с одной бинарной предикатной буквой P, то*

$$\varphi \in \mathbf{SIB} \iff (sib \to \varphi)^* \in L.$$

Из этой леммы мы получаем, что предикатные модальные логики, не имеющие ограничений на ширину ветвления, неразрешимы даже в языке с одной одноместной предикатной буквой; то же касается и логик, допускающих транзитивные шкалы с бесконечными цепями миров, видимыми из некоторого мира. Пусть bd_2 — формула, ограничивающая высоту шкалы Крипке числом 2 (так, можно взять $bd_2 = \Diamond(\Box p_2 \wedge \neg(\Diamond\Box p_1 \to p_1)) \to p_2$, где p_1 и p_2 — пропозициональные переменные; см., например, [7, с. 81]).

Следствие 4. *Логики $\mathbf{QGL} \oplus bd_2$, $\mathbf{QGrz} \oplus bd_2$, $\mathbf{QGLLin}$, $\mathbf{QGrz.3}$ в языке с одной одноместной предикатной буквой не являются алгоритмически разрешимыми.*

Отметим также, что все результаты останутся справедливыми, если к рассмотренным выше логикам добавить формулу Баркан $bf = \forall x\, \Box Q(x) \to \Box \forall x\, Q(x)$, требующую постоянства предметных областей: эта формула принадлежит логике $\mathbf{QS5}$ и не мешает описанной конструкции.

Подведем итог.

Теорема 1. *Пусть логика L содержит $\mathbf{QCL}$ и содержится в одной из логик $\mathbf{QS5}$, $\mathbf{QGL} \oplus bd_2 \oplus bf$, $\mathbf{QGrz} \oplus bd_2 \oplus bf$, $\mathbf{QGLLin} \oplus bf$, $\mathbf{QGrz.3} \oplus bf$. Тогда фрагмент L с одной одноместной предикатной буквой не являются алгоритмически разрешимыми.*

Теперь рассмотрим несколько случаев, когда условия леммы 1 не выполнены.

5. Табличные логики

Пусть L — модальная предикатная логика. По аналогии с пропозициональным случаем будем называть L табличной, если L совпадает со множеством формул, истинных в некоторой конечной шкале Крипке.

Пусть L — табличная модальная предикатная логика и пусть $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ — конечная шкала, относительно которой полна L. Обозначим элементы множества W через $w_1, \dots, w_m$. Пусть φ — формула, содержащая лишь одноместные предикатные буквы $P_1, \dots, P_n$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}(D) \not\models \varphi$. Тогда существует такая шкала $\mathfrak{F}(D')$, что $\mathfrak{F}(D') \not\models \varphi$, $|D'(w_1)\cup\ldots\cup D'(w_m)| \leqslant 2^{m(n+1)}$, причем если $\mathfrak{F}(D)$ — шкала с постоянными областями, то $\mathfrak{F}(D')$ — тоже шкала с постоянными областями.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I\rangle$ — модель на предикатной шкале $\mathfrak{F}(D)$, в некотором мире w_k которой опровергается формула φ. Пусть $\mathfrak{D} = D(w_1) \cup \ldots \cup D(w_m)$. Введем на множестве $\mathfrak{D}$ отношение эквивалентности $\sim$, положив $a \sim b$, если для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ и каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ выполнены следующие условия:

(1) $a \in D(w_i) \Longleftrightarrow b \in D(w_i)$;

(2) $\mathfrak{M}, w_i \models P_j[a] \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, w_i \models P_j[b]$.

Пусть $\overline{a} = \{c \in \mathfrak{D} : c \sim a\}$. Пусть также для каждого $w_i \in W$

$$D'(w_i) = D(w_i)/{\sim} = \{\overline{a} : a \in D(w_i)\}.$$

Поскольку из условия $D(w_i) \subseteq D(w_j)$ следует, что $D'(w_i) \subseteq D'(w_j)$, получаем, что $\mathfrak{F}(D')$ — шкала Крипке. Определим на $\mathfrak{F}(D')$ модель $\mathfrak{M}' = \langle W, R, D', I'\rangle$, положив

$$I'(w_i, P_j) = \{\langle\overline{a}\rangle : \langle a\rangle \in I(w_i, P_j)\}.$$

Другими словами,

$$\mathfrak{M}', w_i \models P_j[\overline{a}] \iff \mathfrak{M}, w_i \models P_j[a].$$

Последняя эквивалентность несложно распространяется и на другие формулы. Если $\psi(x_1, \ldots, x_s)$ — подформула формулы φ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_s$, то

$$\mathfrak{M}', w_i \models \psi[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s] \iff \mathfrak{M}, w_i \models \psi[a_1, \ldots, a_s].$$

В частности, получаем, что $\mathfrak{M}', w_k \not\models \varphi$.

Осталось заметить, что эквивалентность, определяемая лишь условием (1), разбивает $\mathfrak{D}$ на не более чем 2^m классов, при этом каждый такой класс разбивается эквивалентностью, определяемой лишь условием (2), на не более чем 2^{mn} классов. Следовательно, $|D'(w_1) \cup \ldots \cup D'(w_n)| \leqslant 2^{m(n+1)}$. Кроме того, если $\mathfrak{F}(D)$ — шкала с постоянными областями, то $\mathfrak{F}(D')$ — тоже шкала с постоянными областями. $\square$

Утверждение 2. *Унарный фрагмент табличной логики алгоритмически разрешим.*

Доказательство. Пусть L — табличная логика. Тогда существует конечная шкала $\mathfrak{F}$, относительно которой полна L. Пусть m — число миров в $\mathfrak{F}$. Пусть φ — произвольная формула из унарного фрагмента, n — число одноместных предикатных букв в φ. Рассмотрим все модели на шкале $\mathfrak{F}$, число элементов в предметных областях которых не превосходит $2^{m(n+1)}$. Эти модели образуют конечное множество (если их рассматривать с точностью до изоморфизма, конечно). Для каждой из этих моделей проверим, истинна ли в ней формула φ. Если нет, то $\varphi \notin L$. Если да, то, согласно лемме 2, $\varphi \in L$. $\square$

Замечание 3. *Унарный фрагмент табличной логики, содержащей формулу Баркан, алгоритмически разрешим.*

Стоит также отметить, что алгоритмическая разрешимость монадического фрагмента сохранится и для некоторых нетабличных логик. Например, она сохранится для логик, определяемых шкалами, в которых из каждого мира достижимо не более чем k миров, где k — фиксированное число. Действительно, если тестируемая формула φ содержит n одноместных предикатных букв и имеет модальную глубину $\mathrm{md}(\varphi)$, то для проверки истинности φ в мире w модели с ветвлением, ограниченным числом k, достаточно рассмотреть лишь часть этой модели, образованной мирами, достижимыми из w не более чем за $\mathrm{md}(\varphi)$ шагов. С каждым шагом число новых миров возрастает не более чем в k раз, поэтому общее количество интересующих нас миров не превосходит числа $m = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{\mathrm{md}(\varphi)}$, т. е. числа

$$m = \frac{k^{\mathrm{md}(\varphi)+1} - 1}{k - 1}.$$

В этом случае, используя аргументацию доказательства леммы 2, мы получаем, что для выяснения принадлежности формулы φ логике L, определяемой подобным классом шкал, достаточно рассматривать конечные шкалы глубины $\mathrm{md}(\varphi)$ с указанным числом миров, предметная область которых содержит не более чем $2^{m(n+1)}$ элементов.

Пусть ba_k — формула, ограничивающая количество миров, достижимых из произвольного мира шкалы, числом k. Например, можно взять $ba_k = \Box\alpha_1 \vee \ldots \vee \Box\alpha_{k+1}$, где $\alpha_m = p_1 \wedge \ldots \wedge p_{m-1} \wedge \neg p_m \wedge p_{m+1} \wedge \ldots \wedge p_{k+1}$ ($p_1, \ldots, p_{k+1}$ — пропозициональные переменные).

Следствие 5. *Монадические фрагменты логик* $\mathbf{QK} \oplus ba_k$, $\mathbf{QT} \oplus ba_k$, $\mathbf{QD} \oplus ba_k$, $\mathbf{QKB} \oplus ba_k$, $\mathbf{QK} \oplus ba_k \oplus bf$, $\mathbf{QT} \oplus ba_k \oplus bf$, $\mathbf{QD} \oplus ba_k \oplus bf$, $\mathbf{QKB} \oplus ba_k \oplus bf$ *алгоритмически разрешимы.*

6. Логики конечных моделей

Ситуация в корне меняется, если число миров, достижимых из некоторого мира, может быть сколь угодно большим. Пусть $\mathfrak{C}$ — класс конечных шкал Крипке, в котором для каждого n имеется шкала, из некоторого мира которой достижимо не менее n миров. Пусть $L(\mathfrak{C})$ — логика этого класса, т. е. множество формул, истинных в каждой шкале из $\mathfrak{C}$.

В этом случае перевод, заменяющий подформулы вида $P(x, y)$ на $\Box(\neg Q(x) \vee \neg Q(y))$, погружает рекурсивно неперечислимую теорию $\mathbf{FSIB}$ в $L(\mathfrak{C})$.

Утверждение 3. *Если φ — безмодальная первопорядковая замкнутая формула в языке с одной бинарной предикатной буквой P, то*

$$\varphi \in \mathbf{FSIB} \Longleftrightarrow (sib \to \varphi)^* \in L(\mathfrak{C}).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{FSIB}$. Для того, чтобы доказать, что $(sib \to \varphi)^* \in L(\mathfrak{C})$, предположим, что это не так. Тогда в $\mathfrak{C}$ существует такая шкала $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, что для некоторой модели $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$ и некоторого мира $w_0 \in W$ имеем $\mathfrak{M}, w_0 \not\models (sib \to \varphi)^*$. Пусть m — число элементов в W. Согласно лемме 2 можно считать, что $D(w_0)$ содержит не более чем 2^{2m} элементов (т.к. в нашем случае $n = 1$). Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle D(w_0), S \rangle$, где S — это бинарное отношение, определенное следующим образом:

$$aSb \;\; \leftrightharpoons \;\; \mathfrak{M}, w_0 \models \Box(\neg Q[a] \vee \neg Q[b]).$$

Тогда $\mathfrak{A}$ — конечная алгебра, в которой S — симметричное иррефлексивное отношение (так как $\mathfrak{M}, w_0 \models sib^*$), при этом если букву P интерпретировать отношением S, то получим, что $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ (так как $\mathfrak{M}, w_0 \not\models \varphi^*$). Получили противоречие с тем, что $\varphi \in \mathbf{FSIB}$. Значит, $(sib \to \varphi)^* \in L(\mathfrak{C})$.

Пусть теперь $(sib \to \varphi)^* \in L(\mathfrak{C})$. Предположим, что $\varphi \notin \mathbf{FSIB}$. В этом случае существует конечная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, S \rangle$, где S — симметричное иррефлексивное бинарное отношение на A, в которой опровергается φ. Пусть $n = |A|$. В классе $\mathfrak{C}$ выберем шкалу $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, в которой существует мир w_0, из которого достижимо не менее чем n^2 миров, отличных от w_0. Во множестве миров, достижимых из w_0 и отличных от w_0, выберем подмножество из n^2 элементов, после чего его элементы проиндексируем двойными индексами из A; получим множество элементов вида $w_{a,b}$, где $a, b \in A$. Положим $D(w) = A$ для каждого $w \in W$. Определим модель $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$, положив для всякого $w \in W$ и всякого $c \in A$

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{M}, w \models Q[c] & \leftrightharpoons & \text{существует такие } a, b \in A, \text{ что } c \in \{a, b\}, \\ & & w = w_{a,b} \text{ и неверно, что } aSb. \end{array}$$

Тогда для любых $a, b \in A$

$$\mathfrak{M}, w_0 \models \Box(\neg Q[a] \vee \neg Q[b]) \iff aSb,$$

из чего заключаем, что $\mathfrak{M}, w_0 \not\models \varphi^*$. Теперь осталось заметить, что $\mathfrak{M}, w_0 \models sib^*$, а значит, $\mathfrak{M}, w_0 \not\models (sib \to \varphi)^*$. Следовательно, $(sib \to \varphi)^* \notin L(\mathfrak{C})$, что не так. Значит, $\varphi \in$ **FSIB**. $\Box$

Замечание 4. *Утверждение останется справедливым, если ограничиться шкалами с постоянными предметными областями.*

Для модальной предикатной логики L обозначим через $\mathbf{F}L$ логику конечных шкал логики L.

Следствие 6. *Логики* **FQK**, **FQT**, **FQK4**, **FQD**, **FQS4**, **FQS5**, **FQGL**, **FQGrz** *в языке с одной одноместной предикатной буквой не являются рекурсивно перечислимыми.*

Поскольку во всех случаях используется один и тот же перевод, последнее утверждение можно усилить, распространив его на бесконечные классы логик. При этом учтем возможность ограничения на высоту шкал и на постоянство предметных областей.

Теорема 2. *Пусть L — модальная предикатная логика, причем $\mathbf{FQK} \subseteq L \subseteq \mathbf{FQGL} \oplus bd_2 \oplus bf$, или $\mathbf{FQK} \subseteq L \subseteq \mathbf{FQGrz} \oplus bd_2 \oplus bf$, или $\mathbf{FQK} \subseteq L \subseteq \mathbf{FQS5}$. Тогда фрагмент L с одной одноместной предикатной буквой не являются рекурсивно перечислимым.*

Литература

[1] *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

[2] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

[3] *Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П.* Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные // Докл. АН СССР. Т. 163. № 2. 1965. С. 295–297.

[4] *Рыбаков М.Н.* Об алгоритмической выразительности модального языка с одной лишь одноместной предикатной буквой // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука. 2002. С.179–201.

[5] *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах // Докл. АН СССР. Т. 70. № 4. 1950. С. 569–572.

[6] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука. 1974.

[7] *Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[8] *Church A.* An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory // American Journal of Mathematics. 1936. Vol. 58. P. 345–363.

[9] *Church A.* A note on the Entscheidungsproblem // Journal of Symbolic Logic. 1936. Vol. 1. P. 40–41.

[10] *Gabbay D.M.* Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic // Synthese Library. Vol. 148. Reidel; Dordrecht: 1989.

[11] *Gabbay D.M., Shehtman V.B.* Undecidability of Modal and Intermediate First-Order Logics with Two Individual Variables // The Journal of Symbolic Logic. Sept. 1993. Vol. 58. № 3. P. 800–823.

[12] *Kremer P.* On the Complexity of Propositional Quantification in Intuitionistic Logic // The Journal of Symbolic Logic. 1997. Vol. 62. № 2. P. 529–544.

[13] *Kripke S.* The Undecidability of Monadic Modal Quantificational Theory // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1962. Vol. 8. P. 113–116.

[14] *Motohashi N.* A Decision Method for a Set of First Order Classical Formulas and its Applications to Decision Problem for Non-Classical Propositional Logics // J. Math. Soc. Japan. 1990. Vol. 42. № 1. P. 127–132.

[15] *Nerode A., Shore R.* Second Order Logic and First Order Theories of Reducibility Orderings // The Kleene Symposium, J. Barwise, H. J. Keisler, K. Kuner, eds., North-Holland, Amsterdam. 1980. P. 181–200.

[16] *Turing A.M.* On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem // Proc. London Maths. Soc. 1936. ser. 2. Vol. 42. P. 230–265.

[17] *Turing A.M.* On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. A Correction // Proc. London Maths. Soc. 1937. ser. 2. Vol. 43. P. 544–546.

M.N. Rybakov

Undecidability of Modal Logics of Unary Predicate[1]

Rybakov Mikhail Nikolaevich
Mathematical Faculty, Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: `m_rybakov@mail.ru`

We consider first-order modal logics with unary predicate letters only. We show that any sublogic of **QS5**, **QGLLin**, or **QGrz.3** is undecidable in the language with just one unary predicate letter (with or without Barcan formula). We also show that logics of finite Kripke models (with expanding or constant domains) for **QK**, **QT**, **QD**, **QK4**, **QS4**, **QS5**, **QGL**, **QGrz**, and some others are not recursively enumerable in the language with one unary letter. Nevertheless tabular logics and logics of Kripke frames with restrictions on the number of worlds accessible from any world are decidable in the language with infinitely many unary predicate letters.

Keywords: modal logic, first-order logic, decidability

References

[1] Boolos, G.S., Jeffrey, R.C. *Computability and Logic.* Third Edition. Cambrige University Press, 1989.

[2] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic.* D. van Nostrand Company, Inc., 1964.

[3] Maslov, S.Yu., Mints, G.E., Orevkov, V.P. "Nerazreshimost' v konstruktivnom ischislenii predicatov nekotoryh klassov formul, soderzhaschih tol'ko odnomestnye predikatnye peremennye" [Undecidability in constructive first-order calculus of some classes of formulas with only unary predicate letters], *Doklady AN SSSR* [Proceedings of AS USSR], 1965, vol. 163, № 2, pp. 295–297. (In Russian)

[4] Rybakov, M.N. "Ob algoritmicheskoy vyrasitel'nosti modal'nogo yazyka s odnoy lish' odnomestnoy predikatnoy bukvoy" [On algorithmic power of modal language with one unary predicate letter only], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2002, vol. 9. Moscow, Nauka, pp. 179–201. (In Russian)

[1]The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №16–07–01272 and №17-03-00818.

[5] Trakhtenbrot, B.A. "Nevozmozhnost' algoritma dlya problemy razreshimosti na konechnyh klassah" [Impossibility of an algorithm for decidability problem on finite classes], *Doklady AN SSSR* [Proceedings AS USSR], 1950, vol. 70, № 4, pp. 569–572. (In Russian)

[6] Feys, R. *Modal'naya Logika* [Modal Logic]. Moscow, Nauka, 1974. (In Russian).

[7] Chagrov, A.V., Zakharyaschev, M.V. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997.

[8] Church, A. "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, 1936, vol. 58, pp. 345–363.

[9] Church, A. "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, 1936, vol. 1, pp. 40–41.

[10] Gabbay, D.M. "Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic", *Synthese Library*, 1989, vol. 148, Reidel, Dordrecht.

[11] Gabbay, D.M., Shehtman, V.B. "Undecidability of Modal and Intermediate First-Order Logics with Two Individual Variables", *The Journal of Symbolic Logic*, Sept. 1993, vol. 58, № 3, pp.800–823.

[12] Kremer, P. "On the Complexity of Propositional Quantification in Intuitionistic Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, 1997, vol. 62, № 2, pp. 529–544.

[13] Kripke, S. "The Undecidability of Monadic Modal Quantificational Theory", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1962, vol. 8, pp. 113–116.

[14] Motohashi, N. "A Decision Method for a Set of First Order Classical Formulas and its Applications to Decision Problem for Non-Classical Propositional Logics", *J. Math. Soc.* Japan, 1990, vol. 42, № 1, pp. 127–132.

[15] Nerode, A., Shore, R. "Second Order Logic and First Order Theories of Reducibility Orderings", *The Kleene Symposium*, J.Barwise, H.J.Keisler, K.Kuner, eds., North-Holland, Amsterdam, 1980, pp. 181–200.

[16] Turing, A.M. "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proc. London Maths. Soc.*, 1936, ser. 2, vol. 42, pp. 230–265.

[17] Turing, A.M. "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. A Correction", *Proc. London Maths. Soc.*, 1937, ser. 2, vol. 43, pp. 544–546.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 76–95
УДК 510.64

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 76–95
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-76-95

V.L. Vasyukov[1]

Potoses: Categorical Paraconsistent Universum for Paraconsistent Logic and Mathematic[2]

Vladimir Leonidovich Vasyukov
Department of the History and Philosophy of Science
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation
E-mail: `vasyukov4@gmail.com`

It is well-known that the concept of da Costa algebra [3] reflects most of the logical properties of paraconsistent propositional calculi C_n, $1 \leq n \leq \omega$ introduced by N.C.A. da Costa. In [10] the construction of topos of functors from a small category to the category of sets was proposed which allows to yield the categorical semantics for da Costa's paraconsistent logic. Another categorical semantics for C_n would be obtained by introducing the concept of *potos* – the categorical counterpart of da Costa algebra (the name "potos" is borrowed from W.Carnielli's story of the idea of such kind of categories)

Keywords: paraconsistent logic, categorical semantics, potos, paraconsistent set theory, da Costa algebra

1. Introduction

It is well-known that the conception of da Costa algebra [3] renders the majority of the logical properties of paraconsistent propositional calculus C_n, $1 \leq n \leq \omega$ introduced by N.C.A. da Costa. In [10] the construction of the topos of functors from a small cateory to Set was proposed which allows to obtain the categorical semantics of da Costa's paraconsitent logics. Another categorical semantics of C_n would be introduced considering the construction of a *potos* or *da Costa topos* — a categorical equivalent of da Costa algebra.

[1]This resarch is supported by RFH grant № 16-03-00364.

[2]The paper is an improved, extended and modified English version of early published in "Logical Investigations" (vol. 17) paper "Paraconsistent Categories for Paraconsistent Logic" (in Russian).

A potos is a paraconsistent universe in which paraconsistent mathematics would be developed the way it was done in case of intuitionistic mathematics in topos. But while in case of [10] all paraconsistency instances appear only as partial constructions in the intuitionistic universe (as some local artefacts) in a potos this paraconsistency is absolutely immanent and, moreover, it underlies all the constructions, it is global and fundamental. Here the classical mathematics emerges now as an artefact in paraconsistent universe, as some local deviation from paraconsistent regularity. Thus e.g. interpreting C_n-systems one would implement non-truth-functional valuation while truth-functional valuation becomes featuring just the case of Boolean toposes which are now only the particular case of potoses.

In [11] the construction of a potos as the Cartesian closed category (with the initial object 0 and the terminal object 1) along with distinguished object Ω which is an implicit da Costa algebra was proposed, i.e. there are arrows $\boldsymbol{true} : 1 \to \Omega, \boldsymbol{false} : 1 \to \Omega, \neg : \Omega \to \Omega, \cap : \Omega \times \Omega \to \Omega, \cup : \Omega \times \Omega \to \Omega, \supset : \Omega \times \Omega \to \Omega$ which satisfy da Costa algebra conditions from $[1, p.81]$ But the shortcoming of such a definition of potos is that the arrow of negation instead of other arrows is introduced only "locally" and has no connections with any categorical constructions.

In order to overcome this shortcoming we introduce the notion of so-called *complementary closedness* of Cartesian closed category. This allows to yield the arrows of negation "globally" following the recipe of the definition of other truth-arrows.

As the consequence of the new construction introduced we need to consider a new category of paraconsistent sets $PSet$ where as the objects the ZF_1-sets of paraconsistent set theory are exploited. The system ZF_1 is correlates with Zermelo–Fraenkel set theory ZF_0 the same way the paraconsistent first-order predicate calculus with identity correlates with the classical one. And at the same time category $PSet$ turns out to be not a topos but a potos of sets.

Such type of considerations is based on J. Benabou's proposal (cf. [1]) to accept as minimal set-theoretical basis of category theory any set theory in ZF_0-language exploiting only the extensionality axiom and the comprehension scheme. For any model of such a theory its elements will be the sets while the "meta-sets" of the universe of discourse (where the model is chosen) will represent the classes. Following Benabou we can define the set theory required as any theory formulated in ZF_1 and choose any model of such a theory from the universe of discourse (in fact, extending our universe to the universe of all non-classical "meta-sets"). Then so-called Yoneda's map will assign to every set its representative class relative to our "paraconsistent" model while our sets will be exactly the sets we need for considering $PSet$.

In section 2 the minimal information concerning the theory of da Costa algebras is adduced which is required for the further considerations since the last are essentially exploited and substantially determine the potos construction itself.

In section 3 the notion of a potos is introduced, its properties and set-theoretical foundations are analyzed and the potos $PSet$ is considered.

In section 4 an algebraic interpretation of da Costa systems $C_n$in terms of da Costa algebra is yielded along with potos-theoretic interpretation of those essentially based on this algebra. The completeness of the systems is proved in respect to the interpretation given. Besides, non-truth-functional valuation of C_1 is considered and the completeness of this system is proved exploiting this valuation.

Finally in section 5 the interpretation in potos $PSet^A$ is considered and the completeness of C_1 in respect to such semantics is proved.

2. Da Costa Algebras

W.A. Carnielli and L.P. Alcantara in 1984 [3] formulated the notion of da Costa algebra reflected the most of logical properties of logic C_n. It was shown that da Costa algebra is isomorphic to a paraconsistent set algebra which would be counted as an counterpart of Stone representation theorem for Boolean algebra. However, such an analogy works only if we takes a non-classical point of view: some operations in paraconsistent set algebra are formulated not in usual set-theoretical terms.

Since our theoretic-categorical constructions are essentially based on da Costa algebra then for the further proceedings the complete definitions are adduced.

Definition 1. [3, p. 81] By a da Costa algebra we mean a structure

$A = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$

such that for every a, b, c in S the following conditions hold:

1. $\leq$ is a quasi-order;
2. $a \wedge b \leq a, a \wedge b \leq b$;
3. if $c \leq a$ and $c \leq b$ then $c \leq a \wedge b$;
4. $a \wedge a = a, a \vee a = a$;
5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
6. $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$;
7. if $a \leq c$ and $b \leq c$ then $a \vee b \leq c$;
8. $a \wedge (a \supset b) \leq b$;
9. if $a \wedge c \leq b$ then $c \leq (a \supset b)$;
10. $0 \leq a, a \leq 1$;
11. $x^o \leq (x')^o$, where $x^o = (x \wedge x')'$;
12. $x \vee x' \equiv 1$, where $a \equiv b$ iff $a \leq b$ and $b \leq a$;
13. $x'' \leq x$, where x'' abbreviates $(x')'$;
14. $a^o \leq (b \supset a) \supset ((b \supset a') \supset b')$;
15. $x^o \wedge (x^o)' \equiv 0$.

If there exists $x \in S$ such that it is not true that $x \wedge x' \equiv 0$ the algebra A is said to be *a proper da Costa algebra.*

Let us note that it would be much more natural to consider congruences instead of equations in items 4 and 5 in definition 1. This is the choice made e.g. by Carlos Caleiro and Ricardo Gonçalves developed so-called Behavioral algebraization of da Costa's C-systems (cf. [2]).

Proposition 1. [3, p. 82] *If $A = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ is a da Costa algebra then the following properties are verified:*

($C1$) $y \leq x$ *iff* $x \wedge y \equiv y$*;*
($C2$) $x \wedge 0 \equiv 0, x \vee 1 \equiv 1$*;*
($C3$) $x \vee 0 \equiv x, x \wedge 1 \equiv x$*;*
($C4$) $x \vee y \equiv y \vee x, x \wedge y \equiv y \wedge x$*;*
($C5$) *if* $x = y$ *then* $x \equiv y$;
($C6$) *if* $a \equiv b$ *and* $x \equiv y$ *then* $x \wedge a \equiv y \wedge b$;
($C7$) *if* $a \equiv b$ *and* $x \equiv y$ *then* $x \vee a \equiv y \vee b$*;*
($C8$) $y \leq x$ *iff* $y \vee x \equiv x$*;*

($C9$) *if* $x \vee y \equiv 0$ *then* $x \equiv 0$ *and* $y \equiv 0$;
($C10$) *if* $x \leq y^o$ *and* $x \leq (y^o)'$ *then* $x \equiv 0$;
($C11$) $p \vee (p' \wedge p^o) \equiv 1$, $p' \vee (p' \wedge p^o) \equiv 1$;
($C12$) $x \wedge y \equiv 0$ *iff* $x \leq y' \wedge y^o$;
($C13$) $x \wedge (y \wedge y^o) \equiv 0$ *iff* $x \leq y'$;
($C14$) $x \wedge x' \wedge x^o \equiv 0$;
($C15$) *if* $x \wedge (x')^o \equiv 0$ *then* $x \equiv x''$;
($C16$) *if* $x' \wedge (x')^o \equiv 0$ *then* $x \equiv x''$;
($C17$) *if* $x \wedge y \equiv 0$ *then* $x \leq y'$;
($C18$) *if* $y \equiv y^o$ *then* $x \wedge y \equiv 0$ *iff* $x \leq y'$;
($C19$) $x \wedge y' \wedge y^o \equiv 0$ *iff* $x \leq y$.

PROOF. Obvious. $\square$

Hereafter $\square$ means the end of the proof.

THEOREM 1. [3, p. 83] *Every proper da Costa algebra has at least three elements.*

DEFINITION 2. [3, p. 83] A paraconsistent algebra of sets is a structure
$A = \langle S, \varnothing, I, \leq \cap, \cup, \Rightarrow, ' \rangle$
where
1. $\cap$ and $\cup$ are the set operations of intersection and union;
2. $\leq$ is a preorder;
3. $S \subseteq \wp(I)$;
4. S is closed with respect to the binary operations $\cap$, $\cup$, and the unary operation $'$;
5. $a \cap b \leq a$, $a \cap b \leq b$;
6. if $c \leq a$ and $c \leq b$ then $c \leq a \cap b$;
7. $a \leq a \cup b, b \leq a \cup b$;
8. $a \cap (a \Rightarrow b) \leq b$;
9. if $a \cap c \leq b$ then $c \leq (a \Rightarrow b)$;
10. $\varnothing \leq a, a \leq I$;
11. $x \cup x' \Leftrightarrow I$, where $a \Leftrightarrow b$ iff $a \leq b$ and $b \leq a$;
12. $x'' \leq x$;
13. $x^o \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow ((y \Rightarrow x') \Rightarrow y')$, where $x^o = (x \cap x')'$;
14. $x^o \cap (x^o)' \Leftrightarrow \varnothing$;

15. $x^o \leq (x')^o$;

Let $S_0 = \{x : x \in S \text{ and } x \cap x' \not\Leftrightarrow \varnothing\}$. If $S_0 \neq \varnothing$, we have a *proper paraconsistent algebra of sets.* Every paraconsistent algebra of sets is a proper da Costa algebra while every Boolean algebra of sets is a non-proper paraconsistent algebra of sets.

If one consider a natural notion of congruence on da Costa algebra and then to define the notion of homomorphic image of a da Costa algebra (= isomorphism (projection on quotient by a congruence)) then the following result obviously will take place:

THEOREM 2. *Every proper da Costa algebra is isomorphic to a quotient to a proper paraconsistent algebra of sets.*

In [3, p. 84], in fact, more weaker notion of isomorphism was considered which is not symmetric indeed. Given an equivalence relation $\sim$ two da Costa algebras A and B are said to be $\sim$-isomorphic if there exists a function f from A onto B preserving the operations and being $\sim$ $-$*injective* that is, if $x \nsim y$ then $f(x) \neq f(y)$. And the following result take place

THEOREM 3. [3, p. 84] *Every proper da Costa algebra is* $\equiv -$*isomorphic to a proper paraconsistent algebra of sets.*

In [9, p. 273] the following theorem was proved:

THEOREM 4. *A set of principal filters of the proper da Costa algebra is* $\equiv -$*isomorphic to a proper da Costa algebra.*

Taking into account that every principal filter is determined by the single element of a da Costa algebra then this $\equiv -$isomomorphism will be symmetric one.

3. Potoses

A potos is, in fact, a topos with some additional structure. In essence, we would equally well use the name "paraconsistent topos" or "da Costa topos". The name "potos" was borrowed from W.Carnielli's story of the idea of such kind of categories originated from some Brasilian mathematician.

Definition 3. A **potos** C is a Cartesian closed category which is also complementary closed and has a subobject classifier. That is:

(i) C has finite products $\langle -, -\rangle$,$[-, -]$ and C is distributive relative to those, i.e. $\langle [a, b], [a, c]\rangle \cong [a, \langle b, c\rangle]$ for any objects a, b, c in C;

(ii) C allows an exponentiation;

(iii) C has a terminal object 1 and an initial object 0;

(iv) $a \to b$ is an arrow in C iff $a \Rightarrow b \cong 1$, for any two objects a, b in C where $a \Rightarrow b$ is an exponential;

(v) for any object a of C there is an object a' with the respective operations (functions) in C:

$()' : obj(C) \to obj(C)$ such that $a \mapsto a'$,

$dn : obj(C) \to Hom(C)$ such that $a \mapsto dn(a) : a'' \to a$,

$hdn : Hom(C) \to Hom(C)$ such that $d \to a \mapsto hdn(a, d) : d \to a'$,

$()^o : obj(C) \to obj(C)$ such that $a \mapsto a^o = \langle a, a'\rangle'$,

$cert : obj(C) \to Hom(C)$ such that $a \mapsto cert(a) : a^o \to (a')^o$,

$hcert : Hom(C) \to Hom(C)$ such that $d \to a^o \mapsto hcert(a, d) : d \to (a')^o$,

where $dn(a)$ and $cert(a)$ are monic and we have a fixed choice of coproducts $[-, -]$ and of products $\langle -, -\rangle$ for each pair of objects in the respective operations in C;

(vi) there is an operation $triv : obj(C) \to Hom(C)$ in C such that $a \mapsto triv(a) : a^o \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow a') \Rightarrow b')$ and $triv(a)$ is monic;

(vii) $1 \cong [a, a'], 0 \cong \langle a^o, a^{o\prime}\rangle$(with, possibly, binary coproducts and products);

$(viii)$ a subobject classifier for C is a C-object Ω together with an arrow $true : 1 \to \Omega$ that satisfies the following axiom: for each monic $f : a \rightarrowtail d$ there is one and only one arrow $\chi_f : d \to \Omega$ such that

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

is a pullback square.

Here complementary closedness of C is given by $(v)-(vii)$. To put this another way, complementary closedness is given by:

(v) *for any object* a *of* C *there is an object* a', *such that*:

for any arrow $f : d \to a$ *we have monos* $f' : d \to a', dn(f) : a'' \to a$ *and* $cert(f) : a^o \to (a')^o$ *where* $a^o = \langle a, a' \rangle'$,

(vi) *for any two objects* a, b *in* C *there is a mono* $triv(a, b) : a^o \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow a') \Rightarrow b')$;

(vii) $1 \cong [a, a'], 0 \cong \langle a^o, a^{o\prime} \rangle$(*with, possibly, binary coproducts and products*).

PROPOSITION 2. *In a potos* C *the set* $Sub(d)$ *of subobjects of* d *(= set of equivalence classes of monos with codomain* d*) is a da Costa algebra.*

PROOF. Since any potos C is a Cartesian closed category then for any object d in C the collection $Sub(d)$ of all C-arrows that are monic with d as codomain will be preordered bounded distributive lattice. This gives us that the conditions 1-7 and 10 of the definition of da Costa algebra are fulfiled in $Sub(d)$. The conditions 8-9 are the consequences of the exponentiation diagram. The conditions (v)-(vii) of the definition of potos provides us the conditions 11–15 are to be held. □

It is easy to see that in potos we have $Sub(d) \cong Hom(d, \Omega)$ and thus $Hom(d, \Omega)$ will be a da Costa algebra. But in this case the problem arises concerning the category Set of sets. The matter of fact is that in Set we have $Sub(D) \cong \wp(D)$ where $\wp(D) = \{x : x \text{ is a subset of the set } D\}$ Since $\wp(D)$ is a Boolean algebra of subsets and not the paraconsistent algebra of sets as we can expect from the theorem 5, then we come to the conclusion that Set cannot be a potos. But according the definition of a paraconsistent algebra of sets there are some sets which form such an algebra. So either such sets generates the subcategory $PSet$ of Set or Set is, in a sense, a subcategory of $PSet$.

It is known (cf. [5]) that there is a system ZF_1 of paraconsistent set theory that related to Church's version of Zermelo–Fraenkel set theory ZF_0 with a universal set as a da Costa paraconsistent first-order logic $C_1^=$ is related to the clasical first-order predicate calculus $C_0^=$. In essence, "ZF_1 should be 'partially' included in ZF_0, though the latter is is also to be contained, in a certain sense, in the former" [5, p. 170]. The basic set-theoretic concepts of ZF_1 are analogous to those of ZF_0, although the concepts involving negation give rise to two notions: one involving the weak negation ($\neg$) and the other the strong negation ($\neg *$). As a result we have, for instance, two empty sets: $\varnothing = \{x : x \neq x\}$ and $\varnothing^* = \{x : \neg * (x = x)\}$.

The collection of all sets, plus $\varnothing, V, \cap, \cup, ^C$ (where $V = \{x : x = x\}$ and $x^C = \{y : y \notin x\}$) form in ZF_0 a complete Boolean algebra. For ZF_1 we obtain the following result:

PROPOSITION 3. *In ZF_1 the collection of all sets, plus $\varnothing^*, V, \cap, \cup, ^{C^*}$ form a paraconsistent algebra of sets.*

PROOF. By immediate checking (putting $x \Rightarrow y = \{z : z \in x \to z \in y\}$). $\square$

Each axiom scheme of ZF_0 generates two corresponding axiom schemes of ZF_1, one with the strong negation and another with the weak one. Thus, we can say that ZF_1 includes ZF_0 and hence, Set is actually, in a sense, a subcategory of $PSet$. But what does it means to be a category of sets other than Set?

Shepherdson in 1952 [9] introduced a notion of an "inner model" of a logic L. He means a model whose universe is a subset of the universe of L, and in which the "true" statements are those statements of the model which are provable in L. Shepherdson assumes that the universe of L contains classes, sets, and possibly additional objects. The models have classes and sets and a membership relation $\in_m$. For every non-empty class A of L, there is a member $y \in A$ such that $z \in_m y$ for every member z of A.

Later J. Benabou in [1, p. 18] trying to find the minimal set theoretical foundations for category theory defines *a set theory* as any theory T written in the language of Zermelo–Fraenkel set theory ZF and satisfying at least the extensional axiom E and the comprehension scheme CS.

Let us for any model M of such a theory the elements of M will be called sets and denoted by $S, T, ...$ and the formal membership and equality of sets will be denoted by $S \in^* T$ and $S \doteq T$. Then the "metasets" of the universe of discourse $\mathbf{U}$ where the model M is taken will be called classes and denoted by **S**,**C**,... while the membership and equality in **U** is denoted by the usual notations $\in$ and $=$. A subclass **S** of M will be *representable* if there is a set S, called a *representative* of **S**, such that for all $T \in M$ we have $T \in \mathbf{S}$ iff $T \in^* S$. The *Yoneda map* assign to each set S the representative class $\hat{S} = \{T \in M : T \in^* S\}$

The extensionality axiom, for example, read thus:

(E) For all sets S and T, $\hat{S} = \hat{T}$ iff $S \doteq T$.

Unfortunately, it is known that such naive set theory is inconsistent and the source of it is the exploitation of classical logic underlying such theory. To overcome this troublesome case we can e.g. use in the role of T Grishin's LST theory (cf. [8]) which is the set theory with the unlimited comprehension scheme based on the modified linear Girard's logic and which is free of the mentioned shortcomings. But in our case it does not matter since we have to consider paraconsistent set theory and we are concerned just with the universe of discourse **U** which is hypothetically contains any kind of sets.

Following Benabou's course we can now define a set theory as any theory T written in the language of ZF_1 and choose any model M of such a theory from the universe of discource **U** (in fact, extending it to the universe of all non-classical "meta-sets"). Then Yoneda map will assign to each set S the representative class $\hat{S} = \{T \in M : T \in^* S\}$ relative to our "paraconsistent" model M and our sets will be exactly the sets we need for considering the category $PSet$.

Proposition 4. *$PSet$ is a potos.*

Proof. According to proposition 10 for any set I we always have [3, p. 84] a paraconsistent algebra of sets $\langle S, \varnothing, I, \leq \cap, \cup, \Rightarrow, ' \rangle$ where $\cap$ and $\cup$ are the set operations of intersection and union, $\leq$ is a preorder, $S \subseteq \wp(I), S$ is closed with respect to the $\cap$, $\cup$, and the unary operation $'$. If we consider inclusion functions as arrows then we can define $x \leq y$ iff $x \hookrightarrow y \cup \{b\}$, where $b \in S$. We define $x' = x^c$ if $x \notin S_0$ and $x' = x^c \cup \tau$ if $x \in S_0$, taking $S_0 = \{x \in S$: there exists $\tau = \{a, b\}$ such that $x \cap \tau \neq \varnothing, x^c \cap \tau \neq \varnothing$ and $\neg(x \subset \{a, b\})\} \neq \varnothing$, x^c being the set-theoretical complement of x. Finally, we define $x \Rightarrow y$ is $x' \cup y$.

It is easy to see that in our algebra $x^o = I$ if $x \notin S_0$ and $x^o = I - \{b\}$ if $x \in S_0$, for $b \in x \cap \tau$. Also $\leq$ is a proper preorder for if $b \in x$ then we have $x \cup \{b\} \leq x$ and $x \leq x \cup \{b\}$ but $x \cup \{b\} \neq x$. Hence, defining $x \Leftrightarrow y$ iff $x \leq y$ and $y \leq x$ we get an equivalence relation other than equality. Moreover, if $x \subseteq y$ (and thus there is an inclusion arrow $x \hookrightarrow y$) then $x \leq y$ and $x = y$ imply $x \Leftrightarrow y$. Our equivalence relation is $\Leftrightarrow$ is not compatible with $'$, since if we take x such that $\neg(\tau \subset x)$ then $x \cup \tau \Leftrightarrow x \cup \{a\}$ where $\tau = \{a, b\}$. But $(x \cup \tau)' = (x \cup \tau)^c = x^c - \tau$ and $(x \cup \{a\})' = (x \cup \{a\})^c \cup \tau = x^c = \tau$. Thus, $x^c - \tau \not\Leftrightarrow x^c \cup \tau$.

So, we can conclude that in $PSet$ we have $Sub(d) \cong \wp(d)$ and $Sub(d)$ will be a paraconsistent set algebra and so do $\wp(d)$. But in this case we cannot take 2 as the classifying object exploiting the fact that$\wp(d) \cong 2^d$ because this gives rise to the Boolean algebra of characteristic arrows as in Set. Actually, if we will try to define

$$\chi_A(x) = \{1, \text{ if } x \in A0, \text{if } x \notin A$$

then we need to take into account that in $PSet$ we have two negations and hence the right definition will be

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in A \\ 2, \text{if } x \notin A \\ 0, \text{ if } \neg * (x \in A) \end{cases}$$

This means that in the role of classifying object in $PSet$ we should take not the two-element Boolean algebra but the three-element da Costa algebra (according theorem 3 every proper da Costa algebra has at least three elements). An example of such an algebra would be found in [1, p. 83] where the operations are defined by the following tables:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\supset$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	0
2	0	1	1

$0' = 1,\ 1' = 0,\ 2' = 1;\ 0 \leq 2 \leq 1.$

So, we have $\wp(d) \cong 3^d$ and the set $3 = \{\varnothing^*, \varnothing, \{\varnothing^*\}\}$ together with the function $true : 1 \to 3$ such that $true(\varnothing^*) = 1$ (where $1 := \{\varnothing^*\}$)

playing the role of the subobject classifier in $PSet$. Also here we have arrows, $false : 1 \to 3$ (such that $false(\varnothing^*) = \varnothing$) and $false^* : 1 \to 3$ (such that $false^*(\varnothing^*) = \varnothing^*$). $\square$

We define now truth-arrows in potos in general case. Let us **C** will be a potos with the subobject classifier $true : 1 \to \Omega$. Then the negation $\neg : \Omega \to \Omega$ will be the unique arrow for which the diagram

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "false"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

will be the pullback in **C**. Thus, $\neg = \chi_{false}$. The negation $\neg^* : \Omega \to \Omega$ will be the unique arrow for which the diagram

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "false*"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg*"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

will be the pullback in **C**. In this case we have $\neg^* = \chi_{false^*}$

1. Since potos is a Cartesian closed category then other truth-arrows will be defined standardly:

$\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ is a character of the product of arrows $\langle true, true \rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$ in a potos **C**;

$\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ is by definition a character of the image of **C**$-$**arro**w $[\langle true_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, true_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$;

$\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ is a character of the monic $c : \circledast \rightarrowtail \Omega \times \Omega$, which is an equalizer of the pair

$$\Omega \times \Omega \underset{pr_1}{\overset{\cap}{\rightrightarrows}} \Omega$$

where pr_1 is a projection on the first member of the product $\Omega \times \Omega$.

4. An Interpretation of Paraconsistent Logic in a Potos

Let us give an interpretation in terms of potoses of the following list of axioms and rule of inference [4, p. 3790]:

$A1.\ \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
$A2.\ (\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$
$A3.\ \alpha \wedge \beta \supset \alpha$
$A4.\ \alpha \wedge \beta \supset \beta$
$A5.\ \alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)$
$A6.\ \alpha \supset \alpha \vee \beta$
$A7.\ \beta \supset \alpha \vee \beta$
$A8.\ (\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta \supset \gamma))$
$A9.\ \alpha \vee \neg\alpha$
$A10.\ \neg\neg\alpha \supset \alpha$
$A11.\ \beta^o \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg\beta) \supset \neg\alpha))$
$A12.\ \alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \wedge \beta)^o$
$A13.\ \alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \vee \beta)^o$
$A14.\ \alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \supset \beta)^o$
$A15.\ \alpha^o \supset (\neg\alpha)^o$
$R1.\ \dfrac{\alpha \quad \alpha \supset \beta}{\beta}$

Here α^o is an abbreviation for $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.This axiomatic describes, in fact, the system C_1 of da Costa paraconsistent logic.

We can define a valuation $v : \Phi_0 \to A$ of the system C_1 in da Costa algebra A assigning to an every propositional letter π_i some truth-value $V(\pi_i) \in A$. It uniquely would be extended in a following way:

(1) $v(\neg\alpha) = v(\alpha)'$;
(2) $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$;
(3) $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$;
(4) $v(\alpha \supset \beta) = v(\alpha) \supset v(\beta)$.

to the function $v : \Phi \to A$. The sentence α such that $v(\alpha) = 1$ for every A-valuation v is called A-valid and this is denoted as $A \models \alpha$.

THEOREM 5. *For any da Costa algebra A, $A \models \alpha$ iff $\vdash_{C_1} \alpha$.*

PROOF. From left to right we check immediately C_1-validity of all C_1-axioms and detachement rule. For obtaining the proof of the claim from right to left we will use the theorem 6. Putting into the correspondence to each element x of an algebra A the principal filter $[x) = \{q : x \leq q\}$ where $q \in A$ we come to the conclusion that an algebra A^+ of principal filters will be $\equiv$ -isomorphic da Costa algebra. Let us define A^+-valuation as a function $v_c : \Phi_0 \to A^+$ by means of the formula $v_c(\pi_i) = [v(\pi_i))$. The rest is obvious.

There is one more way to prove this theorem if we will use the non-truth-functional valuation of C_1. Following [6] we can introduce a valuation $V' : \Phi_0 \to A$ where Φ_0 is a set of propositional letters and extend this to the set Φ of all formulas in the following way:

(5) $V'(\alpha) = 0 \Rightarrow V'(\neg\alpha) = 1$;

(6) $V'(\neg\neg\alpha) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 1$;

(7) $V'(\beta^\circ) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 0$;

(8) $V'(\alpha \supset \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 0$ or $V'(\beta) = 1$;

(9) $V'(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = V'(\beta) = 1$;

(10) $V'(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 1$ or $V'(\beta) = 1$;

(11) $V'(\alpha^\circ) = V'(\beta^\circ) = 1 \Rightarrow V'((\alpha \supset \beta)^\circ) = V'((\alpha \wedge \beta)^\circ) = V'((\alpha \vee \beta)^\circ) = 1$.

According to [6, p. 623] $A \models \alpha$ iff $\vdash_{C_1} \alpha$ i.e. α is valid for every valuation V'. $\square$

Let us define now an interpretation of the system considered in an arbitrary potos C. The truth-value in potos we will call an arrow of the type $1 \to \Omega$ and the collection of all such C-arrows will be the set $C(1, \Omega)$.

C-valuation will be a function $V : \Phi_0 \to C(1, \Omega)$ assigning to an every propositional variable π_i some truth-value $V(\pi_i) : 1 \to \Omega$. This function might be extended to the set Φ of all formulas in the following way:

(12) $V(\alpha) = \mathit{false} \Rightarrow V(\neg\alpha) = \mathit{true}$:

(13) $V(\neg\neg\alpha) = \mathit{true} \Rightarrow V(\alpha) = \mathit{true}$;

(14) $V(\beta^\circ) = V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha \supset \neg\beta) = \mathit{true} \Rightarrow V'(\beta^\circ) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 1$;

(15) $V(\alpha \supset \beta) = \mathit{true} \Leftrightarrow V(\alpha) = \mathit{false}$ or $V(\beta) = \mathit{true}$;

(16) $V(\alpha \wedge \beta) = \mathit{true} \Leftrightarrow V(\alpha) = V(\beta) = \mathit{true}$;

(17) $V(\alpha \vee \beta) = true \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$ or $V(\beta) = true$;

(18) $V(\alpha^{\circ}) = V(\beta^{\circ}) = true \Rightarrow V'(\alpha^{\circ}) = V'(\beta^{\circ}) = 1$.

Thus, we extend the valuation V in such a way that to each sentence α corresponds some C-arrow $V(\alpha){:}1 \to \Omega$. C-validity of α (which is denoted $C \models \alpha$) means that $V(\alpha) = true : 1 \to \Omega$ for all V.

Since a potos is a particular kind of topos, we have $Sub(d) = C(1, \Omega^{d})$ then $Sub(d) = C(d, \Omega)$ ($Sub(d)$ and not its quotient is $\equiv$-isomorphic to $C(d, \Omega)$, using the definition of $\equiv$-isomorphism given above), i.e. taking into correspondence to some subobject f its character χ_f we transfering the structure of da Costa algebra from $Sub(d)$ on $C(d, \Omega)$. The connection between potos semantics and considered theory as in case of Heyting algebra (cf. [7]) consists in that for any potos

$$C \models \alpha \text{ iff } C(1, \Omega) \models \alpha \text{ iff } Sub(1) \models \alpha$$

Hence, the validity in any potos C is equal to the validity in da Costa algebras $C(1, \Omega)$ and $Sub(1)$. This implies the following theorem:

Theorem 6. *If* $\vdash_{C_1} \alpha$ *then for any potos* C *we have* C $\models \alpha$.

Proof. Let α be some C_1-theorem. Then α is valid in da Costa algebra by theorem 12. In particular, $C(1, \Omega) \models \alpha$ from which $C \models \alpha$ according to the previous claim.

We would define the way V relates to V' from above while putting $V(\pi_i) = true$ if $V'(\pi_i) = 1$, and $V(\pi_i) = false$ otherwise. Then we extend this to the set Φ of all formulas in the following way:

(19) $V(\alpha) = false \Leftrightarrow V'(\neg\alpha) = 1$:

(20) $V(\neg\neg\alpha) = true \Leftrightarrow V'(\neg\neg\alpha) = 1$;

(21) $V(\beta^{\circ}) = V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha \supset \neg\beta) = true \Leftrightarrow V'(\beta^{\circ}) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 0$;

(22) $V(\alpha \supset \beta) = true \Leftrightarrow V'(\alpha \supset \beta) = 1$;

(23) $V(\alpha \wedge \beta) = true \Leftrightarrow V'(\alpha \wedge \beta) = 1$;

(24) $V(\alpha \vee \beta) = true \Leftrightarrow V'(\alpha \vee \beta)$;

(25) $V(\alpha^{\circ}) = V(\beta^{\circ}) = true \Leftrightarrow V'((\alpha \supset \beta)^{\circ}) = V'((\alpha \wedge \beta)^{\circ}) = V'((\alpha \vee \beta)^{\circ}) = 1$.

It is easy to prove that $V(\alpha) = true$ iff $V'(\alpha) = 1$ that allows us to obtain the proof of

Lemma 1. $V(\alpha) = true$ iff $V'(\alpha) = 1$.

PROOF. In case $\alpha = \pi_i$ lemma is true by the definition.

Let $\alpha = \neg\beta$ and $V(\beta) = false$. Then $V'(\neg\beta) = 1$ and $V'(\alpha) = 1$ and the other way round.

In case of $\alpha = \neg\neg\beta$ and $V(\neg\neg\beta) = true$ we have $V'(\neg\neg\beta) = 1$ and $V'(\alpha) = 1$.

For $\alpha = \beta^\circ$ and $V(\beta^\circ) = V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha \supset \neg\beta) = true$ we have $V'(\beta^\circ) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 0$ and thus $V'(\alpha) = 0$.

For $\alpha = \gamma \supset \beta$ we have $V(\alpha \supset \beta) = true \Leftrightarrow V'(\alpha \supset \beta) = 1$.

In case of $\alpha = \gamma \wedge \beta$ we have $V(\gamma \wedge \beta) = true \Leftrightarrow V'(\gamma \wedge \beta) = 1$.

In case of $\alpha = \gamma \vee \beta$ we have $V(\gamma \vee \beta) = true \Leftrightarrow V'(\gamma \vee \beta) = 1$.

Finally, taking $V(\alpha^\circ) = V(\beta^\circ) = true$ we obtain $V^{'}((\alpha \supset \beta)^\circ) = V'((\alpha \wedge \beta)^\circ) = V'((\alpha \vee \beta)^\circ) = 1$.

The rest we obtain in a similar way. □

□

THEOREM 7. *For any potos* C *and propositional fromula* α *the following statement is true:*

C $\models \alpha$ *iff* $\vdash_{C_1} \alpha$.

PROOF. Suppose $\nvdash_{C_1} \alpha$ then, by the completeness result in [6], there is a valuation V' such that $V'(\alpha) \neq 1$ and, by Lemma 4.3, the associated V is such that $V(\alpha) \neq true$, and this means $C \nvDash \alpha$. □

5. An Interpretation of Paraconsistent Logic in a Potos $PSet^A$

For obtaining an interpretation of C_1 in a topos Set^A in [10] as the categorical counterpart of da Costa algebra so-called CN-categories have been implemented. But since $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$ is not a valid property concerning the paraconsistent negation in C_1 then we need to reformulate the definition of CN-categories.

DEFINITION 4. A CN-category C is a preorder category such that

(i) C has finite products $\langle -, - \rangle$, coproducts $[-, -]$ and C is distributive relative to those, i.e. $\langle [a, b], [a, c] \rangle \cong [a, \langle b, c \rangle]$ for any objects a, b, c in C;

(ii) C allows an exponentiation;

(iii) $a \to b$ is an arrow in C iff $a \Rightarrow b \cong 1$, for any two objects a, b in C where $a \Rightarrow b$ is an exponential;

(iv) C has a terminal object 1 and an initial object 0;

(v) for any object a of C there is an object Na such that we have arrows $NNa \to a$ and $a^o \to (Na)^o$ in C where $a^o = N\langle a, Na\rangle$ and for any arrow $d \to a$ there is an arrow $d \to Na$ in C;

(vi) for any two objects a, b in C there is an arrow $a^o \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow Na) \Rightarrow Nb)$;

(vii) $1 \cong [a, Na]$ and $0 \cong \langle a^o, Na^o\rangle$.

It is easy to check that any CN-category has the following properties:a

an exponential $a \Rightarrow b$ in C will be a residual,

C is cartesian closed,

$y \to x$ is an arrow in C iff $\langle x, y\rangle \cong y$ and $[x, y] \cong x$,

$\langle\langle \mathbf{N}a, a^o\rangle, a\rangle \cong 0, [\langle \mathbf{N}a, a^o\rangle, a] \cong 1$,

every CN-category has at least three objects.

In order to build the category $PSet^A$ as a potos we will use the theorem 7. According to this theorem a set A^+ of all principal filters i.e. of sets $[p) = \{q : p \leq q\}$ is a da Costa algebra $\equiv$-isomorphic to A and this will be true for $[p)^+$ where $[p)^+$ is the relativization of A^+.

Now we consider the functor $\mathbf{\Omega} : A \to PSet$ which will represent the classifying object in potos $PSet^A$. Hereafter we will use A both as an algebra and the category. For any functor $\mathbf{F} : A \to PSet$ we denote by $\mathbf{F}_p$ the value $\mathbf{F}(p)$ of functor $\mathbf{F}$ for object p from A. For any q and p such that $p \leq q$ a functor $\mathbf{F}$ defines the function from $\mathbf{F}_p$ to $\mathbf{F}_q$ which we denote $\mathbf{F}_{pq}$. A functor $\mathbf{F}$ will be treated as the collection $\{\mathbf{F}_p : p \in A\}$ of sets indexed by elements of the set A from an algebra A and endowed with the transition mapping $\mathbf{F}_{pq} : \mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_q$ under $p \leq q$ (in particular, $\mathbf{F}_{pp}$ will an identity function on $\mathbf{F}_p$).

We continue in this fashion putting $\mathbf{\Omega}_p = [p)^+$ and for p and q such that $p \leq q$ the function $\mathbf{\Omega}_{pq} : \mathbf{\Omega}_p \to \mathbf{\Omega}_q$ maps every $S \in [p)^+$ into $S \cap [q) \in [q)^+$, i.e. $\mathbf{\Omega}_{pq}(S) = S_q$.

A constant functor $1 : A \to PSet$ which is a terminal object of the category $PSet^A$ might be defined with a help of conditions $1_p = \{0\}$ for $p \in A$ and $1_{pq} = id_{\{0\}}$ under $p \leq q$. A subobject classifier $true : 1 \to \mathbf{\Omega}$

is a natural transformation whose p-th component $true_p : \{0\} \to \mathbf{\Omega}_p$ will be determined by the equality $true_p(0) = [p)$. Thus, the function $true$ chooses the greatest element from every da Costa algebra of $[p)^+$ type.

Let $\tau : \mathbf{F} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} G$ be an arbitrary subobject of $PSet^A$-object $\mathbf{G}$. An every component τ_p is injective and can be treated as the inclusion function $\mathbf{F}_p \hookrightarrow \mathbf{G}_p$. The p-th component $(\chi_\tau)_p : \mathbf{G}_p \to [p)^+$ of a characteristic arrow $\chi_\tau : \mathbf{G} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$ will be defined by the equality

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q : p \leq q \text{ and } \mathbf{G}_{pq}(x) \in \mathbf{F}_q\}$$

for every $x \in \mathbf{G}_p$.

Now we construct truth arrows in a potos $PSet^A$. Let us start with an arrow $false$.

An initial object $0 : A \to PSet$ of category $PSet^A$ is the constant functor such that $0_p = \varnothing^*$ and $0_{pq} = id_{\varnothing *}$ for $p \leq q$. Components of a natural transformation $0 \underset{\bullet}{\rightarrowtail} 1$ are the inclusions $\varnothing^* \hookrightarrow \{0\}$ (the same component for any p). According to the usual definition an arrow $false$ is the characteristic arrow of subobject $! : 0 \underset{\bullet}{\rightarrowtail} 1$. For its component $false_p : \{0\} \to \mathbf{\Omega}_p$ we have $false_p(0) = \{q : p \leq q \text{ and } 1_{pq}(0) \in 0_q\} = \{q : p \leq q \text{ and } 0 \in \varnothing^*\} = \varnothing^*$ and hence a natural transformation chooses the null element from an every da Costa algebra.

Conjunction and disjunction can be handled in same way as in case of topos Set^P (cf. [7]), i.e. we, in fact, need for $\cap : \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}$ and $\cup : \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}$ the definitions of their p-th components in a form of

$$\cap_p(\langle S, T\rangle) = S \cap T;$$
$$\cup_p(\langle S, T\rangle) = S \cup T.$$

The negation is $\neg : \mathbf{\Omega} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$ whose p-th component $\neg_p : \mathbf{\Omega}_p \to \mathbf{\Omega}_p$ in case of indentifying $false_p$ with the inclusion $\{\varnothing^*\} \hookrightarrow \mathbf{\Omega}_p$ (and since $\neg : \mathbf{\Omega} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$ is a characteristic arrow of subobject $false$) is as follows:

$\neg_p(S) = \{q : p \leq q \text{ and } \mathbf{\Omega}_{pq}(S) \in \{\varnothing^*\}\} = \{q : p \leq q \text{ and } S \cap [q) = \varnothing^*\} = [p) \cap \neg S = (\neg S)_p$.

A negation $\neg^* : \mathbf{\Omega} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$ is obtained by deducing that the p-th component $\neg^*_p : \mathbf{\Omega}_p \to \mathbf{\Omega}_p$ of negation satisfies equality

$$\neg^*_p(S) = (\neg S)_p \cap_p (\neg S^o)_p = \cap_p(\langle \neg_p(S), \neg_p(S^o)\rangle) = (S')_p.$$

An implication $\Rightarrow : \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$ we have by defining the p-th component as

$\Rightarrow_p (\langle S, T \rangle) = (S \Rightarrow T)_p.$

Finally, we *will call* $PSet^A$-valuation a function $V : \Phi_0 \to PSet^A(1, \mathbf{\Omega})$ assigning to every propositional variable π_i some truth-value $V(\pi_i) : 1 \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \mathbf{\Omega}$. This function might be extended to the set Φ of all formulas in the following way:

(12) $V(\alpha) = false \Rightarrow V(\neg\alpha) = true$:

(13) $V(\neg\neg\alpha) = true \Rightarrow V(\alpha) = true$;

(14) $V(\beta^\circ) = V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha \supset \neg\beta) = true \Rightarrow V'(\beta^\circ) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 1$;

(15) $V(\alpha \supset \beta) = true \Leftrightarrow V(\alpha) = false$ or $V(\beta) = true$;

(16) $V(\alpha \wedge \beta) = true \Leftrightarrow V(\alpha) = V(\beta) = true$;

(17) $V(\alpha \vee \beta) = true \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$ or $V(\beta) = true$;

(18) $V(\alpha^\circ) = V(\beta^\circ) = true \Rightarrow V'(\alpha^\circ) = V'(\beta^\circ) = 1$.

We say that the formula α be $PSet^A$-valid (we write $PSet^A \models \alpha$) if $V(\alpha) = true : 1 \to \mathbf{\Omega}$ for all $PSet^A$-valuations V.

Using da Costa-Alves valuation $V' : \Phi_0 \to \{0, 1\}$ from above it is easy to prove at the same way the following theorem:

THEOREM 8. *For any potos $PSet^A$, $PSet^A \models \alpha$ iff $\vdash_{C_1} \alpha$ (i.e. α is provable in C_1).*

References

[1] Benabou, J. “Fibered Categories and the Foundations of Naive Category Theory”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1983, Vol. 50, No. 4, pp. 9–37.

[2] Caleiro, C., Gonçalves, R. “Behavioral algebraization of da Costa’s C-systems”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2009, Vol. 19, No. 2, pp. 127–148.

[3] Carnielli, W.A., Alcantara, L.P. “Paraconsistent algebras”, *Studia Logica*, 1984, Vol. XLIII, No. 1/2, pp. 79–87.

[4] da Costa, N.C.A. “Calculus propositionnels pour les systemes inconsistants”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1963, T. 257, pp. 3790–3792.

[5] da Costa, N.C.A. "Paraconsistent Mathematics", in: *Frontiers of Paraconsistent Logic*, D. Batens et al. (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000, pp. 166–179.

[6] da Costa, N.C.A., Alves, E.H. "A Semantical Analyses of the Calculi C_n", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1977, Vol. XVIII, No. 4, pp. 621–630.

[7] Goldblatt, R. *Toposes. The categorial analysis of logic*. Amsterdam, North Holland, 1973.

[8] Grishin, V.N. "Weight of the comprehension axiom in a theory based on logic without contractions", *Mathematical Notes*, 1999, Vol. 66, No. 5, pp. 533–540.

[9] Shepherdson, J.C. "Inner models for set theory", *Journal of Symbolic Logic*, 1951, Vol. 15, pp. 161–190.

[10] Vasyukov, V.L. "Paraconsistency in Categories", in: *Frontiers of Paraconsistent Logic*, D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000, pp. 263–278.

[11] Vasyukov, V.L. Potosy dlya paraneprotivorechivoi logiki [Potoses for Paraconsistent Logics], Modern Logics: Issues of Theory, History and Implementation in Science. Papers from the X-th all-Russian Scientific Conference, SPb, 2008. P. 105–107. (In Russian)

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 96–97
УДК 510.644

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 96–97
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-96-97

V.I. Shalack

Some Remarks on A. Tamminga's Paper "Correspondence Analysis for Strong Three-valued Logic"

Shalack Vladimir Ivanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `shalack@gmail.com`

In this note we present two remarks to the A. Tamminga's paper. The first remark relates to incorrect Definition 1, and the second remark relates to the main theorem of the paper. We propose the necessary corrections.

Keywords: Tamminga, many-valued logic, correspondence analysis

A. Tamminga's paper [1] presents an interesting method that allows us to construct adequate systems of natural deduction for various extensions of Kleene's three-valued logic and can be extended to other finite-valued logics. Some definitions and theorems of the paper are incorrect, but they can be corrected. This must be done, as there are works in which the errors are reproduced.

1. In Definition 1 on page 257 the author introduces the concept of relation *"The truth-table entry E is characterized by an inference scheme* Π/ϕ*"* :

The truth-table entry E is characterized by an inference scheme Π/ϕ*, if E if and only if* $\Pi \models \phi$.

Obviously, in this form the definition is incorrect. One can fix it as follows:

The truth-table entry E is characterized by an inference scheme $\Pi/\phi \Leftrightarrow (E\ if\ and\ only\ if\ \Pi \models \phi)$.

2. On pages 257–259 the main theorem is formulated and proved. It's condition has the following form:

Theorem 1. *Let* $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{L}(\sim)_m(\circ)_n$. *Then...*

Then there are 27 subcases of the theorem.

Let's look at the subcases for $f_\circ(1,1)$.

$$f_\circ(1,1) = \begin{cases} 0, \ iff \ \ \phi \wedge \psi \models \neg(\phi \circ \psi) \\ i, \ iff \ \ \phi \wedge \psi, (\phi \circ \psi) \vee \neg(\phi \circ \psi) \models \chi \\ 1, \ iff \ \ \phi \wedge \psi \models \phi \circ \psi \end{cases}$$

The proposed formulation of the theorem is simply not true. The relation $\Pi \models \phi$ *is valid if and only if for each valuation* v *it holds that if* $v(\phi) = 1$ *for all* ψ *in* Π, *then* $v(\phi) = 1$. Let us apply this definition to $f_\circ(1,1)$, where at least one of the formulas ϕ or ψ is contradictory, i.e. has the form $\varphi \wedge \neg\varphi$. In this case, all three subcases take place:

- $\phi \wedge (\varphi \wedge \neg\varphi) \models \neg(\phi \circ (\varphi \wedge \neg\varphi))$
- $\phi \wedge (\varphi \wedge \neg\varphi), (\phi \circ (\varphi \wedge \neg\varphi)) \vee \neg(\phi \circ (\varphi \wedge \neg\varphi)) \models \chi$
- $\phi \wedge (\varphi \wedge \neg\varphi) \models \phi \circ (\varphi \wedge \neg\varphi)$

But then the value $f_\circ(1,1)$ is not defined. The error can be corrected as follows:

$$f_\circ(1,1) = \begin{cases} 0, \ iff \ \ \dot{\forall}\phi, \psi[\phi \wedge \psi \models \neg(\phi \circ \psi)] \\ i, \ iff \ \ \dot{\forall}\phi, \psi, \chi[\phi \wedge \psi, (\phi \circ \psi) \vee \neg(\phi \circ \psi) \models \chi] \\ 1, \ iff \ \ \dot{\forall}\phi, \psi[\phi \wedge \psi \models \phi \circ \psi] \end{cases}$$

Similarly, for other subcases of the theorem.

References

[1] Tamminga, A. "Correspondence Analysis for Strong Three-valued Logic", *Logical investigations*, 2014, Vol. 20, pp. 255–268.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 98–122
УДК 165.24+316.4.051

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 98–122
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-98-122

Философская логика
Philosophical Logic

А.С. Карпенко

Контрфактуальное мышление[1]

Карпенко Александр Степанович
Сектор логики, Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

Контрфактуальное мышление есть мышление о прошлом, которое не произошло. Грамматическая форма контрфактуалов очень проста: если бы было A, то было бы C. Термин «контрфактуальный» означает «буквально противоположное фактам». Контрфактуальные рассуждения являются базовыми для человеческого мышления и встречаются повсеместно. Принципы контрфактуального мышления и его результаты проявляются в настоящее время в самых различных дисциплинах: логика, философия, психология, когнитивные процессы, социология, экономика, история, политические науки и т. д. Главная особенность контрфактуалов заключается в том, что они являются ментальными имитациями различных вариантов того, что могло бы произойти в прошлом. Установлено, что две уникальные человеческие характеристики — контрфактуальное мышление (представление альтернатив прошлому) и фундаментальное стремление создавать смыслы в жизни — причинно взаимосвязаны. Постепенно пришло понимание того, что мы имеем дело с феноменом исключительной важности.

Ключевые слова: контрфактуалы, контрфактуальное мышление, семантика возможных миров, метафизика модальностей, альтернативная реальность

1. Контрфактуалы

Над человеческим мышлением все большую власть приобретают контрфактуалы[2], и это — общая тенденция. Чтобы понять причины такого явления со всеми вытекающими из него следствиями, рассмотрим функцию контрфактуалов в рассуждениях и возникающие при этом проблемы.

[1]Данная статья была впервые опубликована в сборнике научных трудов «Философские исследования» (вып. 3. Минск: Беларуская навука, 2016).

[2]Термин «контрфактуал» введен в обращение Н. Гудманом [38].

Грамматическая форма контрфактуалов очень проста: *если бы было A, то было бы C*, то есть $A \to C$. Термин «контрфактуальный» означает «буквально противоположное фактам». Например, если бы не большевистский переворот в России 1917 года, то Россия была бы самой экономически развитой страной в мире. Часто в литературе встречается такой прозаический контрфактуал:«Если бы я не пил вечером много, то не страдал бы сегодня от похмелья». Контрфактуальные высказывания представляют собой условные предложения, сослагательная форма которых подразумевает, что реальное положение дел отличного от описываемого антецедентом и консеквентом, взятыми в изъявительной форме[3]. В этом случае возникает логическая проблематика контрфактуальных высказываний, которая состоит в отыскании критериев, позволяющих считать такие высказывания истинными. И это реальная проблема, поскольку приходится оценивать мыслимые ситуации, противоречащие реальным фактам, и не понятно, где искать факты (или «контрфакты»), которые делают контрфактуальные высказывания истинными. Одно из решений заключается в том, что этими фактами обеспечивает нас аппарат семантики возможных миров с отношением *сходства* (similarity) между мирами. Впервые семантика возможных миров для контрфактуалов была предложена Р. Сталнакером [62] и затем модифицирована Д. Льюисом [47][4].

Хотя логическая проблематика контрфактуалов, которая включает в себя больше, чем построение для них семантики возможных миров, очень интересна (см.: [47, 52]), нас будут занимать еще более важные, фундаментальные вопросы: почему человеческие существа имеют строгую предрасположенность генерировать контрфактуалы, порождая этим мыслимые (воображаемые) альтернативы к проис-

[3]См.: [4, 20, 24, 53, 56, 73]

[4]Истинностные условия для контрфактуалов выглядят следующим образом: высказывание ($A \to B$) является истинным, если и только если максимально сходный возможный мир (т. е. сходный с актуальным миром), в котором A истинно, есть мир, в котором C также истинно. В дальнейшем появились многочисленные работы по усовершенствованию данной семантики (см.: [22, 39, 54, 65, 68]). В последней, в основном технической, работе подчеркивается, что вопрос «Что было бы, если...?» лежит в сердцевине философии и научного метода.

шедшему? Что определяет эту способность человека? Наконец, какую основную функцию выполняет контрфактуальное мышление и что оно означает?

Последние два десятилетия интерес к контрфактуалам только увеличивался. Принципы контрфактуального мышления и его результаты привлекли к себе внимание ученых из самых различных областей, таких как логика, философия, психология, когнитивная психология, социальное поведение, экономика, лингвистика, квантовая физика, искусственный интеллект, теория организации, политические науки, историография, литературные исследования и т. д.[5]. Было установлено, что контрфактуальные рассуждения являются базовыми для человеческого мышления и встречаются повсеместно как в естественных рассуждениях, так и в формализованном дискурсе. Они играют значительную роль в различных когнитивных процессах, таких как концептуальное (понятийное) научение, планирование, принятие решений, социальное познание, перемена настроения и повышение производительности.

Еще в самом начале систематических исследований контрфактуального мышления подчеркивалось, что без должного внимания к альтернативному рассмотрению реальности мы вынуждены принять прошлое как бывшее неизбежным и должны верить, что для событий будущего становится характерной такая же неизбежность, при этом применение контрфактуалов дает нам гибкость в мышлении о возможных вариантах будущего и подготавливает на лучшее в этом будущем [42]. Постепенно пришло понимание того, что мы имеем дело с феноменом исключительной важности, в силу которого мышление, использующее идею контрфактуальности, предстает как общее свойство человеческого сознательного ментального ландшафта [34]. Очевидно, что контрфактуалы являются ментальными имитациями различных вариантов того, что могло бы произойти в прошлом. Целые главы фундаментального издания [63] рассматривают контрфактуальное мышление в общем контексте ментального имитирования и ментального путешествия во времени. Характери-

[5] Укажем только следующие работы: [16; 25; 27; 28; 31; 41; 45; 51, Ch. 7 and 8; 64; 67; 74].

стическим свойством контрфактуального мышления является *репликация*: мы можем легко по своему желанию реконструировать происшедшие события.

Уже на экспериментальном уровне показывается, что две уникальные человеческие характеристики — контрфактуальное мышление (представление альтернатив прошлому) и фундаментальное стремление создавать смыслы в жизни — причинно взаимосвязаны [69]. В последнее время экспериментальные исследования приобретают все больший размах. На уровне нейронных сетей показано, что, в отличие от эпизодического мышления о прошлом и будущем, контрфактуальное мышление мобилизует определенные области в мозгу более строго и интенсивно и, кроме этого, активизирует другие области мозга человека. Все это говорит об уникальности нейронных процессов, лежащих в основе контрфактуального мышления. Для нас особенно важно утверждение, сделанное в указанной работе, что контрфактуальные события не являются просто фантазиями — они на самом деле могут заменять реальность.

Каждодневное употребление контрфактуалов поистине удивительно. Это неотъемлемая часть жизнедеятельности человека, начиная с самого раннего возраста. В недавно появившейся обзорной работе [23] отмечается, что многие исследования указывают на способность развития контрфактуального мышления у детей, начиная с трехлетнего возраста. Более того, контрфактуальное мышление в целом свойственно всем нациям и проходит через все культуры [29].

2. История в сослагательном наклонении

В мире контрфактуалов особое место занимают вариации прошлого. В связи с этим обратим внимание на огромный интерес серьезных западных историков к альтернативной истории[6]. Так, Н. Фергюсон в большом введении к [72] говорит о «хаотической» теории прошло-

[6] В наиболее известном контрфактуальном исследовании истории Р. Фогель [37] (лауреат Нобелевской премии по экономике в 1993 г.) построил математическую модель, оценивающую возможное состояние транспортной системы США в случае отсутствия железных дорог. Из многочисленных недавних работ отметим только следующие: [26, 30, 35, 59, 72, 75–77].

го. Когда-то незыблемая и совершенно неизменная ткань прошлого становится легко изменяемой и значительно расширяет представляемый человеком универсум. Сборник научно-исторических альтернатив [76], изложенных видными учеными и повествующих о ключевых моментах истории от античности до нашего времени, под редакцией Р. Коули приобрел известность во всем мире[7]. В научных работах об альтернативной истории утверждается мысль, что контрфактуалы фундаментально необходимы, и лучшие исторические работы должны высвечивать альтернативы, доступные действующим лицам на исторической сцене.

В качестве таких действующих лиц выступают персонажи, во многом определившие тот или иной ход мировых событий. Вот некоторые примеры. Каково было бы развитие западноевропейской философии, если бы Сократ погиб в Пелопонесской войне? Что было бы, если бы Александр Македонский не умер так рано?[8] Часто встречается пример с Юлием Цезарем, который все-таки не перешел Рубикон[9]. Очень много примеров с Наполеоном, который выиграл сражение при Ватерлоо. Есть и такой: что было бы, если бы Гитлер был убит во время Первой мировой войны? Рассматривается также возможная ситуация с Лениным: что было бы, если бы Ленина по распоряжению Временного правительства от 7 июля 1917 г. арестовали как немецкого шпиона[10]? Встречаются также примеры, связанные с убийством президента США Дж. Кеннеди и т. д.

Конечно, трагические события первой половины XX в. с двумя мировыми войнами (невозможно сосчитать, сколько раз люди задавали себе вопрос: что было бы, если бы не убийство 28 июня 1914 г. эрцгерцога Франца Фердинанда, послужившее поводом для

---

[7]Имеется перевод на русский язык [1]. Также были переведены многие другие сборники. Стали появляться и отечественные книги на эту тему (см.: [8]).

[8]Этот вопрос был рассмотрен знаменитым историком Арнольдом Тойнби в 1969 г. См. сокращенный перевод [17]. Оригинальный текст содержится в приложении к [66].

[9]Такая возможность, как альтернативная реальность, представлена в приложении к статье А. С. Карпенко [5, № 7, с. 106–108]. Расширенный вариант см.: [6, № 12, с. 1674–1675], который перепечатан в приложении к данной статье.

[10]В шутливо-иронической форме такой вариант рассмотрен в [15, с. 30–32].

начала Первой мировой войны) способствовали обострению чувства контрфактуальности. Не случайно первые *специальные* работы стали появляться сразу после окончания Второй мировой войны. Однако наблюдается и противоположный эффект. Например, террор, и в особенности государственный, лишает людей способности к контрфактуальному мышлению, препятствуя таким образом развитию и даже делая государство нежизнеспособным, поскольку, контрфактуально оценивая прошлое, мы тем самым прогнозируем будущее с благоприятным исходом, что может иметь практическое значение для выживания в сходной ситуации.

Но если будущего нет или оно раз и навсегда предопределено, то способность к контрфактуальному мышлению отмирает. Наверное, этим объясняется полное отсутствие отечественных работ даже в такой популярной области, как контрфактуальная история, вплоть до начала 1990-х гг.[11]. В известной статье Б. Невского отмечается, что советская историография, ведомая принципами марксизма и партийности, решительно отвергала «альтернативность» развития общества [10]. Статья имеет критическую направленность и призывает к более серьезной разработке альтернативной истории как метода научного анализа. Только в 2006 г. появляется первая отечественная научная монография В. А. Нехамкина, посвященная контрфактуальным исследованиям в истории [11]. В журнальной статье этого же автора [12] рассматриваются генезис, современное состояние и перспективы сослагательных моделей истории. Отметим также работу М. А. Малышева [9], где говорится о том, что пусть виртуально, но можно восстать против судьбы.

Обратим внимание на то, что контрфактуальную историю все же следует отличать от переинтерпретации уже устоявшихся архивных материалов и отчетов, а также от альтернативных историй, описывающих миры, отличные от нашего. Сутью контрфактуальной истории является намеренное отрицание любого исторического события и, вследствие этого, порой неосознанное, активное вмеша-

[11]См.: [2, 14, 19]. В 1999 г. в Институте всеобщей истории Российской академии наук прошел круглый стол на тему «История в сослагательном наклонении?» [13].

тельство субъекта в исторический процесс посредством конструирования альтернативного прошлого. Хотя, как мы увидим далее, все эти разновидности «игр» с прошлым имеют один и тот же источник.

Необходимо сделать еще одно важное замечание. Прошлое как таковое и его возможная вариативность давно привлекли к себе внимание философов. Во-первых, анализ серьезных фаталистических аргументов, начиная от Аристотеля, показывает, что они основываются на посыле о *неизменяемости* прошлого. Но, согласно некоторым детерминистским концепциям, прошлое предопределяет будущее, и в этом случае, если мы не можем воздействовать (affect) на прошлое, то не можем воздействовать и на будущее (см.: [3, 57]). Отсюда можно сделать вывод, что человек имеет свободу воли, *если он имеет власть над прошлым.* Во-вторых, с середины XX в. идет дискуссия, инспирированная видным философом и логиком М. Даммитом, об обратной (backward) каузальности, допускающей воздействие на прошлое (см. обзор [36]). В-третьих, философы (и среди них такие известные, как Д. Льюис [48], П. фон Инваген [71] и многие другие) подвергли глубокому философскому анализу проблему путешествия во времени[12]. В-четвертых, начиная с конца XX в. среди мастистых физиков идет оживленная дискуссия о возможности путешествия во времени, поскольку ни законы теории относительности, ни законы квантовой механики этого не запрещают[13].

Огромный интерес к данной тематике вызван как раз тем, что, с одной стороны, мыслится физическая возможность путешествия в прошлое, а с другой стороны, мыслится логическая невозможность этого в силу возникновения многочисленных логических парадоксов, самый знаменитый из которых «парадокс дедушки»[14]. На самом де-

[12] См. обстоятельный обзор [61].

[13] См. обзоры [21] и [33]. К дискуссии присоединились и знаменитые физики-космологи, в том числе И. Д. Новиков, К. Торн и С. Хокинг [18]. Статья И.Д. Новикова в этом сборнике называется «Можем ли мы изменить прошлое?». См. также раздел «Невозможное» в [6, № 11, с. 1517–1519].

[14] «Парадокс дедушки» означает, что некто отправился в прошлое и убил своего биологического деда до того, как тот встретил бабушку путешественника. Но в этом случае он сам впоследствии не сможет появиться на свет и осуществить свой дурной замысел.

ле логика (возможностное мышление) не запрещает путешествие в прошлое, она лишь конструирует различные сценарии, которые *возможны*. Наиболее распространенное решение парадоксов, связанных с путешествием во времени, состоит в том, что попадание в прошлое ведет к ветвлению Вселенных, и человек оказывается в другой Вселенной, хотя и максимально схожей с нашей[15].

В последнее время, судя по многочисленным обзорам, интерес к указанной проблематике только возрастает. Вариативность прошлого становится объектом тщательного исследования, и это вполне согласуется с общей контрфактуальной направленностью человеческого разума.

3. Контрфактуалы и модальности

При рассмотрении контрфактуалов, особенно при моделировании исторических процессов, появляются различные модальные понятия, в частности следующее: «*Если бы было A, то, возможно (might), было бы C*» ($(A \rightarrow \Diamond C)$, где $\Diamond$ — знак возможности). И для этого есть глубокие логические основания.

Среди тех, кто одним из первых обратил внимание на взаимоотношения между контрфактуальными рассуждениями и модальной логикой, был Н. Решер [55]. При этом важной остается уже упоминавшаяся фундаментальная работа Д. Льюиса [47], в которой сформулирован *принцип дуальности* между контрфактуалами и модальностью «возможно»[16].

То, что *возможность* выводима из независимых принципов контрфактуального рассуждения, имело серьезные последствия, поскольку эта возможность (might-возможность) с полным правом ста-

[15] См. также фундаментальный обзор [60], включающий все указанные направления, кроме анализа фаталистических аргументов, имеются работы и о контрфактуальных моделях для путешествия в прошлое [58].

[16] Принцип дуальности утверждает, что $A \rightarrow \Diamond C =_{Df} \neg(A \rightarrow \neg C)$, где $\neg$ есть операция отрицания. Для многих исследователей это означало, что посредством контрфактуалов можно определить сам оператор возможности $\Diamond$: $\Diamond A =_{Df} \neg(A \rightarrow \neg A)$. То есть A возможно, если и только если не имеет места, чтобы A не было бы, если бы A было. Для оператора необходимости $\Box$ имеем: $\Box A =_{Df} \neg A \rightarrow A$.

ла называться метафизической возможностью. Отсюда следовало, что метафизические модальности есть специальный случай контрфактуальных рассуждений. Независимо друг от друга в одно и то же время появились работы, утверждающие, что наше знание метафизической модальности является специальным случаем нашего знания контрфактуалов и, таким образом, эпистемология метафизической модальности является специальным случаем эпистемологии контрфактуального мышления.

Эти работы, особенно статья, а затем книга Т. Вильямсона, оказали большое влияние на развитие новой эпистемологии метафизической модальности. Об этом свидетельствует, например, статья Т. Кроэдела, который в самом начале делает интересное заявление о том, что «если есть такая вещь, как философское знание, то огромной частью его будет модальное знание» [44, p. 1], а заканчивает допущением того, что именно контрфактуалы помогут нам в объяснении модального знания.

Обратим внимание на то, что главной особенностью контрфактуального мышления является расширение действительного мира посредством представления или воображения того, что могло бы быть. Другими словами, контрфактуальная мыслимость (представимость) непосредственно ведет к метафизической возможности, которая определяется относительно пространства возможных миров. Если высказывание о некоторой ситуации истинно в некотором возможном мире, то она является метафизически возможной. Как отмечается в одной из первых серьезных работ по модальной эпистемологии, многие важные аргументы дедуцируют актуальность из возможности, например аргумент мыслимости Бога, и «это вызывает удивление, как вещи, которые есть или должны быть, могут быть дедуцируемы из посылок о том, как вещи могли бы (might) быть» [70, p. 67].

В том-то и дело, что уже в наше время все большее внимание привлекают аргументы, говорящие о реализации того, что возможно. Например, в книге Д. Льюиса «О множественности миров» [49], которая считается одной из самых значительных работ по метафизике за последние полвека, развивается концепция *модального реализ-*

ма, утверждающая актуальность всех мыслимых возможных миров. Другая очень распространенная теория получила название «многомировой интерпретации квантовой механики» благодаря работам Х. Эверетта (см.: [50]). Эверетт вводит понятие «ветвления», что в многомировой интерпретации обозначает *возможные истории*, все из которых реализуются. И это происходит постоянно при каждом измерении квантового объекта[17].

Не случайно модальные эпистемологи так настойчиво ставят вопрос о механизме модального мышления. Например, Дж. Диверс, написавший более десятка работ о модальностях, поднимает вопрос о функции модальных суждений, о той *принуждающей* силе, которую несут в себе метафизические модальности (см.: [32]).

***

Два главных предрассудка мешают развитию мыслительных способностей человека:

1) глубоко укоренившееся мнение, что у истории нет сослагательного наклонения;

2) надежда на то, что все рано или поздно заканчивается.

Как первое, так и второе говорит о крайней ограниченности мышления современного человека.

Литература

[1] А что, если бы?.. Альтернативная история / Сост. Р. Коули. СПб.: АСТ, 2002. 604 с.

[2] *Бестужев-Лада И. В.* Ретроальтернативистика в философии истории // Вопр. философии. 1997. № 8. С. 112–122.

[3] *Карпенко А. С.* Фатализм и случайность будущего: логический анализ. М.: ЛКИ, 2008. 216 с.

[4] *Карпенко А. С.* Контрфактические высказывания // Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: Канон+, РООИ «Реабилитация», 2009. С. 385–386.

[17] Эти две теории и сходные с ними рассмотрены в [7].

[5] *Карпенко А. С.* Философский принцип полноты. Ч. I // Вопр. философии. 2013. № 6. С. 58–70; Ч. II // Вопр. философии. 2013. № 7. С. 95–108.

[6] *Карпенко А. С.* Философский принцип полноты. Ч. I // Философия и культура. 2013. № 11. С. 1508–1522; Ч. II // Философия и культура. 2013. № 12. С. 1660–1679.

[7] *Карпенко А. С.* Основной вопрос метафизики // Филос. журн. 2014. № 2 (13). С. 51–73.

[8] *Лещенко В.* Ветвящееся время. История, которой не было. М.: АСТ, 2003. 592 с.

[9] *Малышев М. А.* Сослагательное наклонение — виртуальный бунт против судьбы // Науч. ежегодник Ин-та философии и права Урал. отд-ния РАН. 2015. Т. 15. № 1. С. 5–27.

[10] *Невский Б.* А что, если бы? Альтернативная история как наука // Мир фантастики. 2004. № 6. С. 12–16.

[11] *Нехамкин В. А.* Контрфактические исследования в историческом познании: генезис, методология. М.: МАКС-Пресс, 2006. 176 с.

[12] *Нехамкин В. А.* Контрфактические исторические исследования // Историческая психология и социология истории. 2011. Т. 4. № 1. С. 102–120.

[13] Одиссей. Человек в истории 2000: история в сослагательном наклонении? / Отв. ред. А. Я. Гуревич. М.: Наука, 2000. 343 с.

[14] *Померанц Г. С.* История в сослагательном наклонении // Вопр. философии. 1990. № 11. С. 55–66.

[15] Псевдонимы / Сост. А. С. Карпенко. СПб.: ЦГИ, 2011. 224 с.

[16] *Резе Н.* Контрфактуальное мышление // Горизонты когнитивной психологии: хрестоматия / Под ред. В. Ф. Спиридонова, М. В. Фаликман. М.: Яз. славян. культур: Рос. гос. гуманитар. ун-т (РГГУ), 2012. С. 243–254.

[17] *Тойнби А.* Если бы Александр не умер тогда... // Знание — сила. 1979. № 2. С. 39–42.

[18] Будущее пространства и времени / С. Хокинг [и др.]. СПб.: АМФОРА, 2009. 254 с.

[19] *Экштут С. А.* Сослагательное наклонение в истории: воплощение несбывшегося. Опыт историософского осмысления // Вопр. философии. 2000. № 8. С. 79–87.

[20] *Anderson A. R.* A note on subjunctive and counterfactual conditionals // Analysis. 1951. Vol. 11. P. 35–38.

[21] *Arntzenius F.* Time Travel and Modern Physics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2009. URL: http://plato.stanford.edu/entries/time-travel-phys/ (дата обращения: 23.01.2016).

[22] *Arregui A.* On similarity in counterfactuals // Linguistics and Philosophy. 2009. Vol. 32, No. 3. P. 245–278.

[23] Conditional reasoning and emotional experience: A. Review of the development of counterfactual thinking / S. R. Beck [et al.] // Studia Logica. 2014. Vol. 102. No. 4. P. 673–689.

[24] *Bennet J. F.* Philosophical Guide to Conditionals. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2003. 408 p.

[25] *Bigaj T.* Non-Locality and Possible Worlds: Counterfactual Perspective on Quantum Entanglement. Frankfurt: Ontos Verlag, 2006. 294 p.

[26] *Black J. M.* Other Pasts, Different Presents, Alternative Futures. Bloomington: Indiana Univ. Press, 2015. 252 p.

[27] *Byrne R. M. J.* The Rational Imagination: How People Create Alternatives to Reality. Cambridge: MIT Press, 2005. 268 p.

[28] Causation and Counterfactuals / Eds. by J. Collins, N. Hall and L. A. Paul. Cambridge: MIT Press, 2004. 480 p.

[29] Culture and counterfactuals: On the importance of life domains / J. Chen [et al.] // Journal of Cross-Cultural Psychology. 2006. Vol. 37. P. 75–84.

[30] Counterfactual Thinking — Counterfactual Writing / Eds. by D. Birke, M. Butter and T. Köppe. Berlin; Boston: De Gruyter, 2011. 256 p.

[31] Counterfactual Thought Experiments in World Politics: Logical, Methodological, and Psychological Perspectives / Eds. by P. E. Tetlock and A. Belkin. Princeton: Princeton Univ. Press, 1996. 344 p.

[32] *Divers J.* Modal commitments // Modality: Metaphysics, Logic, and Epistemology. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. P. 189–219.

[33] *Earman J.* Time Machines // Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2010. URL: http://plato.stanford.edu/entries/time-machine/ (дата обращения: 17.12.2015).

[34] *Epstude K.* The functional theory of counterfactual thinking // Personality and Social Psychology Review. 2008. Vol. 12. No. 2. P. 168–192.

[35] *Evans R. J.* Altered Pasts: Counterfactuals in History. London: Little, Brown, 2014. 224 p.

[36] *Faye J.* Backward Causation // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2015. URL: http://plato.stanford.edu/entries/causation-backwards/ (дата обращения: 17.12.2015.)

[37] *Fogel R.* Railroads and American Economic Growth: Essays in Econometric History. Baltimore: The John Hopkins Press, 1964. 296 p.

[38] *Goodman N.* The problem of counterfactual conditionals // Journal of Philosophy. 1947. Vol. 44. No. 5. P. 113–128.

[39] *Gunderson L. B.* Outline of a new semantics for counterfactuals // Pacific Philosophical Quarterly. 2004. Vol. 85. No 1. P. 1–20.

[40] *Hill C.* Modality, modal epistemology, and the metaphysics of consciousness // The Architecture of Imagination: New Essays on Pretense, Possibility and Fiction. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006. P. 205–236.

[41] *Ippolito M.* Subjunctive Conditionals: A Linguistic Analysis. Cambridge, MA: MIT Press, 2013. 216 p.

[42] *Johnson M. K.* Constructing and reconstructing the past and the future in the present // Handbook of Motivation and Cognition: Foundations of Social Behavior. N. Y., 1990. Vol. 2. P. 482–526.

[43] *Kment B.* Counterfactuals and the analysis of necessity // Philosophical Perspectives. 2006. Vol. 20. P. 237–302.

[44] *Kroedel T.* Counterfactuals and the epistemology of modality // Philosophers' Imprint. 2012. Vol. 12. P. 1–21.

[45] *Kvart I.* A Theory of Counterfactuals. Indianapolis: Hackett, 1986. 283 p.

[46] From what might have been to what must have been: Counterfactual thinking creates meaning / L. J. Kray [et al.] // J. of Personality and Social Psychology. 2010. Vol. 98. No. 1. P. 106–118.

[47] *Lewis D.* Counterfactuals. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1973. 160 p.

[48] *Lewis D.* The Paradoxes of time travel // American Philosophical Quarterly. 1976. Vol. 13. P. 145–152.

[49] *Lewis D.* On the Plurality of Worlds. Oxford: Blackwell, 1986. 288 p.

[50] Many Worlds? Everett, Quantum Theory, and Reality / eds. by S. Saunders [et al.]. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2010. 618 p.

[51] *Nickerson R.* Conditional Reasoning: The Unruly Syntactics, Semantics, Thematics, and Pragmatics of “If” / R. Nickerson. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2015. 472 p.

[52] *Nute D.* Conditional logic // Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Dordrecht, 2001. Vol. 4. P. 1–98.

[53] *Pollock J.* Subjunctive Reasoning. Dordrecht: Reidel, 1976. 255 p.

[54] *Pollock J.* A refined theory of counterfactuals // Journal of Philosophical Logic. 1981. Vol. 10. P. 239–266.

[55] *Rescher N.* Hypothetical Reasoning. Amsterdam: North Holland, 1964. 95 p.

[56] *Rescher N.* Conditionals. Cambridge: MIT Press, 2007. 260 p.

[57] *Rice H.* Fatalism // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2014. URL: http://plato.stanford.edu/entries/fatalism/4 (дата обращения: 11.12.2015).

[58] *Sider T.* Time travel, coincidences and counterfactuals // Philosophical Studies. 2002. Vol. 110. P. 115–138.

[59] *Sladek O.* On the Worlds of Counterfactual History: Between History and Fiction, 2006. URL: http://narratologie. ehess.fr/index.php?589 (дата обращения: 23.01.2016.)

[60] *Smeenk C* Time travel and time machines // The Oxford Handbook of Philosophy of Time. N. Y., 2011. P. 577–633.

[61] *Smith N. J. J.* Time Travel // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2013. URL: http://plato.stanford. edu/entries/time-travel/ChaPas (дата обращения: 23.01.2016.)

[62] *Stalnaker R.* A theory of conditionals // Studies in Logical Theory. Oxford, 1968. P. 98–112.

[63] The Handbook of Imagination and Mental Simulation / Eds. by K. D. Markman, W. M. P. Klein, and J. A. Suhr. N. Y.: Psychology Press, 2009. 488 p.

[64] The Psychology of Counterfactual Thinking / eds. by D. R. Mandel, D. J. Hilton, and P. Catellani. London: Routledge, 2005. 264 p.

[65] *Tooley M.* The Lewis-Stalnaker approach to counterfactuals // Journal of Philosophy. 2003. Vol. 100. P. 371–377.

[66] *Toynbee A. J.* Some Problems in Greek History. London: Oxford Univ. Press, 1969. 538 p.

[67] Understanding Counterfactuals, Understanding Causation: Issues in Philosophy and Psychology / Eds. by C. Hoerl, T. McCormack, and S.R. Beck. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2012. 272 p.

[68] *Unterhuber M.* Possible Worlds Semantics for Indicative and Counterfactual Conditionals?: A Formal Philosophical Inquiry into Chellas-Segerberg Semantics. Frankfurt: Ontos Ferlag, 2013. 333 p.

[69] Counterfactual thinking: an fMRI study on changing the past for a better future / N. van Hoeck [et al.] // Social Cognitive and Affective Neuroscience. 2013. Vol. 8. No. 5. P. 556–564.

[70] *Van Inwagen P.* Modal epistemology // Philosophical Studies. 1998. Vol. 92. No. 1. P. 67–84.

[71] *Van Inwagen P.* Changing the Past // Oxford Studies in Metaphysics / Ed. by D.W. Zimmerman. N. Y. : Oxford Univ. Press, 2010. Vol. 5. P. 3–28.

[72] Virtual History: Alternatives and Counterfactuals / Ed. by N. Ferguson. London: Macmillan, 1997. 548 p.

[73] *Von Fintel K.* Subjunctive conditionals // The Routledge companion to philosophy of language / eds. by G. Russell, D. G. Fara. N. Y.: Routledge, 2012. P. 466–477.

[74] What Might Have Been: the Social Psychology of Counterfactual Thinking / Eds. by N. J. Roese, J. M. Olson. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1995. 424 p.

[75] What Might Have Been: Imaginary History from Twelve Leading Historians / Ed. by A. Roberts. London: Orion Publishing, 2005. 208 p.

[76] What If?: The World's Foremost Military Historians Imagine What Might have Been / Ed. by R. Cowley. N. Y.: Berkley Books, 2000. 416 p.

[77] What If? 2: Eminent Historians Imagine What Might have Been / Ed. by R. Cowley. N. Y.: Berkley Books, 2002. 448 p.

[78] *Williamson T.* Armchair philosophy, metaphysical modality and counterfactual thinking // Proceedings of the Aristotelian Society. 2005. Vol. 105. P. 1–23.

[79] *Williamson T.* The Philosophy of Philosophy. Blackwell Publishing, 2008. 352 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Альтернативная реальность: Гай Юлий Цезарь

10 января 705 года от основания Рима[18] на берегу Рубикона стоял Гай Юлий Цезарь, проконсул Галлии. Эта река отделяла его провинцию от Италии, и Цезарь знал, что переход через Рубикон с армией фактически означает объявление войны. Было жарко, хотя солнце еще не успело подняться высоко и его красный шар, утопая в молочно-белой пелене неба, наполнял воздух духотой и какой-то непонятной тяжестью, мешал сосредоточиться на главном.

А главным было то, что в нарушение договора сенат отказался продлить срок его полномочий и потребовал распустить армию. Цезарь внушал такой страх, что сенаторы, распустив слухи о подготовке им государственного переворота, объявили его врагом республики и призвали граждан к оружию. Армию возглавил Гней Помпей Великий. В ответ на предательство сената Цезарь собрал солдат 13-го легиона (*Legio XIII Gemina*), единственного легиона, который находился с ним вместе по эту сторону Альп, и обратился к ним с пламенной речью. Эту речь произнес великий полководец, который 29 лет с мечом в руках отстаивал величие Рима, несмотря на заговоры убийц, мечи германцев и волны неведомого Океана. Из них последние девять лет ушли на завоевание Галлии, где он взял штурмом более 800 городов, покорил 300 народностей и одержал победу над врагом численностью в 3 млн человек, из которых 1 млн был уничтожен и столько же взято в плен. Благодаря ему границы римских владений были расширены до Ла-Манша и Рейна. И Цезарь повел бы свои легионы дальше, если бы не политическая борьба внутри и вокруг сената, если бы не интриги... С горечью говорил он о насильственной отмене права трибунов на *veto*, права, которое оставил неприкосновенным даже Сулла. Цезарь напомнил о блистательных победах, которые совершила его армия во славу Рима, и наконец обратился к своим легионерам, многих из которых знал по имени, с призывом защитить его доброе имя и честь. Он зажигал сердца своей

[18] 49 г. до н. э.

речью[19], и солдаты восторженным криком изъявили готовность идти за Рубикон. Теперь только от решения Цезаря зависела его судьба и судьбы мира.

Однако он медлил. Глядя на пылающее солнце, Цезарь попытался глубоко вздохнуть, но воздух не шел в легкие. Он почувствовал сильное головокружение и пошатнулся, успев заметить, как от звона доспехов разлетелась в стороны стайка мелких рыб. Неожиданно в глазах Цезаря все потемнело, река исчезла и на фоне необъятного небосвода, покрытого стремительно несущимися облаками, перед ним возникла странная и ужасная картина.

Это были два огромных существа, состоящие из деформированных, как бы случайно сросшихся частей человеческого тела, которые росли и менялись на глазах. Одно существо состояло из искаженного болью лица, человеческой груди и ноги; второе — из двух рук, исковерканных самой природой, и тазобедренной части. Сцепленные между собой в жуткой схватке, эти существа-мутанты внушали страх и отвращение. Цезарь сразу понял: это предчувствие гражданской войны. Знак, который он как будто уже видел. Может быть, в Испании? Да, он там воевал в молодости. Ничем не примечательная провинция. «Надо будет вернуться туда с парочкой легионов и разобраться, в чем дело. Или, — продолжал вспоминать Цезарь, — это было гораздо позже?..»

Внезапно от реки поднялся свежий ветер и вместе с ним вверх взметнулась небольшая серебристая рыбка, едва не коснувшись его колен. «Еще один знак, и совершенно новый», — подумал Цезарь. Не обращая больше внимания на пламенеющее солнце, он приказал разбить у реки лагерь и снова послал гонца для переговоров, но не в продажный сенат, а напрямую к Помпею. Ведь когда-то они были друзьями, вместе с Крассом создали триумвират, и Цезарь даже отдал ему в жены свою единственную дочь Юлию. Если бы она не умерла так рано... Но сейчас главное — не допустить гражданской войны.

[19] Об этой речи см. в: *Моммзен Т.* История Рима. М., 1997. Т. 3. С. 336–337; а также в: *Утченко С.* Л. Юлий Цезарь. М., 1976. С. 208–209.

Цезарь не знал, что Помпей, обычно столь нерешительный и медлительный, за несколько дней до этого увидел себя во сне в Египте обезглавленным и сейчас выше по течению переходит Рубикон. Вскоре в лагере раздался звон мечей и предсмертные крики. В результате внезапного натиска весь 13-й легион был полностью уничтожен, а Юлий Цезарь погиб в бою как герой, успев обагрить свой меч кровью врага. Последнее, что он увидел перед смертью, — были какие-то два урода. Один — рябой, в высоких черных сапогах, а другой — бесноватый, с небольшими усиками, сначала заклинали его не умирать, а потом вдруг сами начали распадаться. И только переходя в подземный мир, Цезарь понял свою главную ошибку: он так и не произнес эти гордые слова на греческом: «ἀνερρίφθω κύβος»[20], и не двинул свой легион на Рим. «Это богиня подземного царства Геката Тривия наслала на меня безумие и погрузила во мрак», — горестно подумал Цезарь. Но мрак вдруг исчез и все озарилось ослепительно ярким светом...

Рубикон же потемнел от крови, и багровая пена билась о берег. По щиколотку в этой пене стоял Помпей Великий и смотрел на мертвого Цезаря. В руках он держал тот самый меч, который консул Гай Клавдий Марцелл 13 декабря в Куманской вилле Помпея вручил ему для защиты республики.

***

Как отмечали историки, после этого знаменательного события республика в Риме просуществовала еще полтора столетия. Сенека как-то сказал: «Диктатура — это не гибель страны, а гибель богов». Самые прозорливые исследователи (и здесь особо стоит отметить небезызвестного А.С. Беловежского) заметили, что сражение у реки Рубикон каким-то неведомым образом повлияло на весь ход мировой истории, и именно по этой причине к началу XX века все диктаторские режимы сошли на нет...

Конечно, обсуждаемое нами историческое событие оказало огромное влияние на европейскую литературу и искусство в целом.

[20] «Жребий брошен» (греч.).

Приведем только первую и последнюю строки героической поэмы Вергилия «Рубикон»[21], исполненные величия и стоицизма:

Nescio, quid Rubico est,||
quo nos ducente profunda
[Я не знаю, каков Рубикон,
И куда заведет глубина.]

Est lex, quoque die ||
transire iubens Rubiconem
[Есть на свете великий закон:
Каждый миг проходить Рубиконы.][22]

Но, пожалуй, самым впечатляющим творческим откликом на то сражение стала известная картина великого французского художника Жака Луи Давида «Рубикон»[23]. На холсте размером 621×979 см маслом запечатлен финал битвы: волны реки, обагренные кровью, всюду — порубленные воины 13-го легиона и эта багровая пена, в которой стоит с обнаженным мечом Гней Помпей Великий и смотрит на мертвого Цезаря. А в правом верхнем углу изображена молодая женщина на коленях, со скорбным лицом протягивающая зрителю оливковую ветвь.

Феномен этой картины поразителен и рациональному объяснению не подлежит. Огромный зал, где расположена картина, всегда заполнен посетителями со всех концов света, застывшими в немом оцепенении. Когда у них потом спрашивают, что с ними происходило, то все отвечают одно и то же: они оказались внутри той реальности, не в сегодняшней суете, а там, в настоящей реальности, они наблюдали живую картину утихающей битвы и слышали голос умирающего Цезаря.

---

[21] *Publius Vergilius Maro.* RUBICO // Omnia quae extant opera. Èulogos, 2007.

[22] Заметим, что у Вергилия не может быть таких коротких строчек, ибо он, будучи эпическим поэтом, пользовался почти исключительно гекзаметрами. Впрочем, в латинском гекзаметре всегда имеется мужская цезура посередине строки, так что при чтении их можно смело делать паузу после третьего ударного слога (перевод А. Чаха).

[23] Картина находится в 75-м зале на 1-м этаже галереи Денон в Лувре. Код: INV. 3699.

A.S. Karpenko

Counterfactual Thinking

Karpenko Aleksandr Stepanovich
Department of logic, Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation

Counterfactual thinking is thinking about a past that did not happen. This often takes place in "if only..." situations, when we wish something had or had not happened. Counterfactual reasoning is basic to human cognition and universal in occurrence. Currently, the principles of couterfactual thinking and its results appear in research in various disciplines, such as logic, philosophy, psychology, cognitive processes, sociology, economics, history, political science etc. The special thing about the counterfactuals is that they are the mental imitations of the different variants of what could have happened in the past. It is observed that two uniquely human characteristics — counterfactual thinking (imagining alternatives to the past) and the fundamental drive to create meaning in life — are causally related. Gradually, we have come to understand that we are dealing with the phenomenon of exceptional importance.

Keywords: counterfactuals, possible world semantics, counterfactual thinking, metaphysical modalities, alternative reality

References

[1] *A chto, esli by?.. Al'ternativnaya istoria.* [What is? Alternative History], ed. by R. Coley. St . Petersburg: AST, 2002. 604 p. (In Russian)

[2] Bestuzhev-Lada, I.V. "Retroal'ternativistika v filosofii istorii" [Retro-altenative studies in philosophy of history] // *Voprosi filosofii*, 1997, No. 8, pp. 112–122. (In Russian)

[3] Karpenko, A.S. *Fatalizm i sluchainost' budushego: logicheskiy analiz* [Fatalism and randomness: logical analysis]. Moscow: LKI, 2008. 216 p. (In Russian)

[4] Karpenko, A.S. "Kontrfakticheskie viskazivaniya" [Counterfactual propositions], *Enciklopedia epistemologii i filosofii nauki* [Handbook of epistemology and philosophy of science]. Moscow: Kanon+, ROOI «Reabilitacia», 2009, pp. 385–386. (In Russian)

[5] Karpenko, A.S. "Filosofskiy princip polnoti. Ch. I" [Philosophical completeness principle. Part I], *Voprosi filosofii*, 2013, No. 6, pp. 58–70; "Ch. II" [Part II], *Voprosi filosofii*, 2013, No. 7, pp. 95–108. (In Russian)

[6] Karpenko, A.S. “Filosofskiy princip polnoti. Ch. II” [Philosophical completeness principle. Part I], *Filosofiya i kul’tura*, 2013, No. 11, pp. 1508–1522; “Ch. II” [Part II], *Filosofiya i kul’tura*, 2013, No. 12, pp. 1660–1679. (In Russian)

[7] Karpenko, A.S. “Osnovnoy vopros metaphiziki” [Basic question of metaphysics], *Filosofskiy jurnal*, 2014, No. 2(13), pp. 51–73. (In Russian)

[8] Leshchenko, V. *Vetvyashcheesya vremya* [Branching time: History that did not exist]. M.: AST, 2003. 592 p. (In Russian)

[9] Malishev, M.A. “Soslagatel’noe naklonenie — virtual’niy bunt protiv sud’by” [Subjunctive mood — virtual riot against reality], *Nauch. egegodnik In-ta filosofii i prava RAN*, 2015, Vol. 15, No. 1, pp. 5–27. (In Russian)

[10] Nevski, B. “A chto esli bi? Al’ternativnaya istoria kak nauka” [What if? Alternative history as science], *Mir fantastiki*, 2004, No. 6, pp. 12–16. (In Russian)

[11] Nemakhin, V.A. *Kontrfakticheskie issledovaniya v istoricheskom poznanii: geneziz, metodologiya* [Couterfactual investigations in historical cognition: origins and methodology]. Moscow: MAKS-Press, 2006. 176 p. (In Russian)

[12] Nemakhin, V.A. “Kontrfakticheskie istoricheskie issledovaniya” [Counterfactual studies in history], *Istoricheskaya psihologia i sociologia istorii*, 2011, Vol. 4, No. 1, pp. 102–120. (In Russian)

[13] *Odissey. Chelovek v istorii 2000: istoriya v soslagatel’nom naklonenii?* [Odyssey. Human in History 2000: history in subjunctive mood], ed. by A.Y. Gurevich. Moscow: Nauka, 2000. 343 p. (In Russian)

[14] Pomernatz, G.S. “Istoriya v soslagatel’nom naklonenii” [History in in subjunctive mood], *Voprosi filosofii*, 1990, No. 11, pp. 55–66. (In Russian)

[15] *Psevdonimi* [Pseudonames], ed. by A.S. Karpenko. St. Petersburg: CGI, 2011. 224 p. (In Russian)

[16] Reze, H. “Kontrfaktual’noe mishlenie” [Counterfactual thinking], in: *Gorizonti cognitivnoi psihologii: hrestomatii* [Cognitive psychology horizons: collection], ed. by V. F. Spiridonova, M.V. Falikman. Moscow: Yaziki slavyan. Kultur: Ros. gos. gumatitar. un-t (RGGU), 2012, pp. 243–254. (In Russian)

[17] Toynbee, A. “Elsi by Aleksand ne umer togda...” [If Alexander the Great had lived on], *Znanie – sila*, 1979, No. 2, pp. 39–42. (In Russian)

[18] Hawking, S. et al. *Budushchee prostranstva i vremeni* [The future of spacetime stephen]. St. Petersburg: AMFORA, 2009. 254 p. (In Russian)

[19] Ekshtut, S.A. "Soslagatel'noe naklonenie v istorii: voploshchenie nesbivshegosya. Opit istoriosofskogo osmisleniya" [Subjunctive mood in history: The incarnation of the unfulfilled. Experience of historiosophic understanding.], *Voprosi filosofii*, 2000, No. 8, pp. 79–87.

[20] Anderson, A.R. "A note on subjunctive and counterfactual conditionals", *Analysis*, 1951, Vol. 11, pp. 35–38.

[21] Arntzenius, F. "Time Travel and Modern Physics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2009. [http://plato.stanford.edu/entries/time-travel-phys/, accessed on 23.01.2016].

[22] Arregui, A. "On similarity in counterfactuals", *Linguistics and Philosophy*, 2009, Vol. 32, No. 3, pp. 245–278.

[23] Beck, S.R. et al. "Conditional reasoning and emotional experience: A. Review of the development of counterfactual thinking", *Studia Logica*, 2014. Vol. 102, No. 4, pp. 673–689.

[24] Bennet, J.F. *Philosophical Guide to Conditionals.* New York: Oxford Univ. Press, 2003. 408 p.

[25] Bigaj, T. *Non-Locality and Possible Worlds: Counterfactual Perspective on Quantum Entanglement.* Frankfurt: Ontos Verlag, 2006. 294 p.

[26] Black, J.M. *Other Pasts, Different Presents, Alternative Futures.* Bloomington: Indiana Univ. Press, 2015. 252 p.

[27] Byrne, R.M.J. *The Rational Imagination: How People Create Alternatives to Reality.* Cambridge: MIT Press, 2005. 268 p.

[28] *Causation and Counterfactuals*, eds. by J. Collins, N. Hall and L.A. Paul. Cambridge: MIT Press, 2004. 480 p.

[29] Chen, J. et al. "Culture and counterfactuals: On the importance of life domains", *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 2006, Vol. 37, pp. 75–84.

[30] *Counterfactual Thinking – Counterfactual Writing*, eds. by D. Birke, M. Butter and T. Köppe. Berlin; Boston: De Gruyter, 2011. 256 p.

[31] *Counterfactual Thought Experiments in World Politics: Logical, Methodological, and Psychological Perspectives*, eds. by P.E. Tetlock and A. Belkin. Princeton: Princeton Univ. Press, 1996. 344 p.

[32] Divers, J. "Modal commitments", in: *Modality: Metaphysics, Logic, and Epistemology.* Oxford: Oxford Univ. Press, 2010, pp. 189–219.

[33] Earman, J. “Time Machines’, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2010 [http://plato.stanford.edu/entries/time-machine/, accessed on 17.12.2015].

[34] Epstude, K. “The functional theory of counterfactual thinking”, *Personality and Social Psychology Review*, 2008, Vol. 12, No. 2, pp. 168–192.

[35] Evans, R.J. *Altered Pasts: Counterfactuals in History*. London: Little, Brown, 2014. 224 p.

[36] Faye, J. “Backward Causation”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2015. [http://plato.stanford.edu/ entries/causation-backwards/, accessed on 17.12.2015].

[37] Fogel, R. *Railroads and American Economic Growth: Essays in Econometric History*. Baltimore: The John Hopkins Press, 1964. 296 p.

[38] Goodman, N. “The problem of counterfactual conditionals”, *Journal of Philosophy*, 1947, Vol. 44, No. 5, pp. 113–128.

[39] Gunderson, L.B. “Outline of a new semantics for counterfactuals”, *Pacific Philosophical Quarterly*, 2004, Vol. 85, No. 1, pp. 1–20.

[40] Hill, C. “Modality, modal epistemology, and the metaphysics of consciousness”, in: *The Architecture of Imagination: New Essays on Pretense, Possibility and Fiction*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006, pp. 205–236.

[41] Ippolito, M. *Subjunctive Conditionals: A Linguistic Analysis*. Cambridge, MA: MIT Press, 2013. 216 p.

[42] Johnson, M.K. “Constructing and reconstructing the past and the future in the present”, in: *Handbook of Motivation and Cognition: Foundations of Social Behavior*. N.Y., 1990, Vol. 2, pp. 482–526.

[43] Kment, B. “Counterfactuals and the analysis of necessity”, *Philosophical Perspectives*, 2006, Vol. 20, pp. 237–302.

[44] Kroedel, T. “Counterfactuals and the epistemology of modality”, *Philosophers’ Imprint*, 2012, Vol. 12, pp. 1–21.

[45] Kvart, I. *A Theory of Counterfactuals*. Indianapolis: Hackett, 1986. 283 p.

[46] Kray, L.J. et al. “From what might have been to what must have been: Counterfactual thinking creates meaning”, *J. of Personality and Social Psychology*, 2010, Vol. 98, No. 1, pp. 106–118.

[47] Lewis, D. *Counterfactuals*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1973. 160 p.

[48] Lewis, D. "The Paradoxes of time travel", *American Philosophical Quarterly*, 1976, Vol. 13, pp. 145–152.

[49] Lewis, D. *On the Plurality of Worlds*. Oxford: Blackwell, 1986. 288 p.

[50] *Many Worlds? Everett, Quantum Theory, and Reality*, eds. by S. Saunders et al. New York: Oxford Univ. Press, 2010. 618 p.

[51] Nickerson, R. *Conditional Reasoning: The Unruly Syntactics, Semantics, Thematics, and Pragmatics of "If"*. New York: Oxford Univ. Press, 2015. 472 p.

[52] Nute, D. "Conditional logic", in *Handbook of Philosophical Logic*, D. Nute, C.B. Cross (eds.). 2nd ed. Dordrecht, 2001, Vol. 4, pp. 1–98.

[53] Pollock, J. *Subjunctive Reasoning*. Dordrecht:Reidel, 1976. 255 p.

[54] Pollock, J. "A refined theory of counterfactuals", *Journal of Philosophical Logic*, 1981, Vol. 10, pp. 239–266.

[55] Rescher, N. *Hypothetical Reasoning*. Amsterdam: North Holland, 1964. 95 p.

[56] Rescher, N. *Conditionals*. Cambridge: MIT Press, 2007. 260 p.

[57] Rice, H. "Fatalism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014 [http://plato.stanford.edu/entries/fatalism/4, accessed on 11.12.2015].

[58] Sider, T. "Time travel, coincidences and counterfactuals", *Philosophical Studies*, 2002, Vol. 110, pp. 115–138.

[59] Sladek, O. "On the Worlds of Counterfactual History: Between History and Fiction, 2006", [http://narratologie.ehess.fr/index.php?589, accessed on 23.01.2016].

[60] Smeenk, C. "Time travel and time machines", in: *The Oxford Handbook of Philosophy of Time*. New York, 2011, pp. 577–633.

[61] Smith, N.J.J. "Time Travel", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2013 [http://plato.stanford.edu/entries/time-travel/ChaPas, accessed on 23.01.2016.)

[62] Stalnaker, R. "A theory of conditionals", in: *Studies in Logical Theory*. Oxford, 1968, pp. 98–112.

[63] *The Handbook of Imagination and Mental Simulation*, K.D. Markman, W.M.P. Klein, and J.A. Suhr (eds.). New York: Psychology Press, 2009. 488 p.

[64] *The Psychology of Counterfactual Thinking*, D.R. Mandel, D.J. Hilton, and P. Catellani (eds.). London: Routledge, 2005. 264 p.

[65] Tooley, M. "The Lewis-Stalnaker approach to counterfactuals", *Journal of Philosophy*, 2003, Vol. 100, pp. 371–377.

[66] Toynbee, A.J. *Some Problems in Greek History.* London: Oxford Univ. Press, 1969. 538 p.

[67] *Understanding Counterfactuals, Understanding Causation: Issues in Philosophy and Psychology*, C. Hoerl, T. McCormack, and S.R. Beck (eds.). New York: Oxford Univ. Press, 2012. 272 p.

[68] Unterhuber, M. *Possible Worlds Semantics for Indicative and Counterfactual Conditionals?: A Formal Philosophical Inquiry into Chellas-Segerberg Semantics.* Frankfurt: Ontos Ferlag, 2013. 333 p.

[69] van Hoeck, N. et al. "Counterfactual thinking: an fMRI study on changing the past for a better future", *Social Cognitive and Affective Neuroscience*, 2013, Vol. 8, No. 5, pp. 556–564.

[70] van Inwagen, P. "Modal epistemology", *Philosophical Studies*, 1998, Vol. 92, No. 1, pp. 67–84.

[71] van Inwagen, P. "Changing the Past", in: *Oxford Studies in Metaphysics*, ed. by D.W. Zimmerman. N.Y.: Oxford Univ. Press, 2010, Vol. 5, pp. 3–28.

[72] *Virtual History: Alternatives and Counterfactuals*, ed. by N. Ferguson. London: Macmillan, 1997. 548 p.

[73] von Fintel, K. "Subjunctive conditionals", in: *The Routledge companion to philosophy of language*, G. Russell, D.G. Fara (eds.). N.Y.: Routledge, 2012, pp. 466–477.

[74] *What Might Have Been: the Social Psychology of Counterfactual Thinking*, N.J. Roese, J.M. Olson (eds.). Mahwah, NJ: Erlbaum, 1995. 424 p.

[75] *What Might Have Been: Imaginary History from Twelve Leading Historians*, ed. by A. Roberts. London: Orion Publishing, 2005. 208 p.

[76] *What If?: The World's Foremost Military Historians Imagine What Might have Been*, ed. by R. Cowley. N.Y.: Berkley Books, 2000. 416 p.

[77] *What If? 2: Eminent Historians Imagine What Might have Been*, ed. by R. Cowley. N.Y.: Berkley Books, 2002. 448 p.

[78] Williamson, T. "Armchair philosophy, metaphysical modality and counterfactual thinking", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 2005, Vol. 105, pp. 1–23.

[79] Williamson, T. *The Philosophy of Philosophy.* Blackwell Publishing, 2008. 352 p.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 123–139
УДК 510.64+519.2

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 123–139
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-123-139

А.А. Печенкин

Квантовая логика и теория вероятностей[1]

Печенкин Александр Александрович
Кафедра философии и методологии науки,
философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4
E-mail: a_pechenk@yahoo.com

В статье дается обзор тех работ по квантовой логике, которые непосредственно связаны с математическим обоснованием квантовой механики, а именно — с формулированием квантово-теоретической теории вероятностей. Развитие математического аппарата квантовой механики связывается с линией: П.А.М. Дирак (его книга 1927 г. «Принципы квантовой механики»), И. фон Нейман («Математические основания квантовой механики» — 1932 г.), статья Г. Биркгофа и И. фон Неймана о квантовой логике (1936 г.). При этом показано, что дальнейшее развитие идей Биркгофа и фон Неймана привело к формулированию квантово-теоретической концепции вероятности, обобщающей классическую аксиоматику А.Н. Колмогорова и заполняющей те пробелы математической строгости, которые оставались в книге фон Неймана (1932 г.).

Ключевые слова: решетка, булева алгебра, частотное понятие вероятности, сигма-алгебра, наблюдаемая, состояние, концептуальное обоснование, математическое обоснование

Введение

К настоящему времени под рубрику «квантовая логика» подпадает большое число как математических, так и философских (относящихся к философии науки) публикаций (книг и статей). В настоящей статье рассматриваются те из них, которые оказались задействованы в развитии квантовой теории вероятностей и тем самым те, которые относятся к непосредственному совершенствованию математического аппарата квантовой механики. В книге фон Неймана «Математические основы квантовой механики» (1932 г.) понятие вероятности вводилось не на базе аксиоматики А.Н. Колмогорова, сложившейся

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержки РФФИ. Проект № 15-33-0141.

в начале 1930-х гг., а в русле идей Р. фон Мизеса, в русле его частотной концепции вероятности. В то же время, как отмечает Редеи, фон Нейман был неудовлетворен концепцией «вероятность — предел последовательности относительных частот», развитой фон Мизесом в 1920-е гг. Он стремился к логически последовательному изложению квантовой механики, к изложению, в котором теория вероятностей не была бы дополнением к логически строгой квантовой теории, а была бы органически вписана в это изложение.

Какую же роль в этом изложении квантовой механики сыграла квантовая логика? Как признано в большинстве публикаций, начало квантовой логики было положено статьей Г. Биркгофа и И. фон Неймана 1936 г. В ней было развито исчисление высказываний, которое, в отличие от классического, не выполнялось правило дистрибутивности. Биркгоф и фон Нейман показали, что квантово-механические высказывания образуют решетку (lattice), алгебраический объект, обобщающий понятие булевой алгебры (в российской литературе раньше, в 60-70-е гг. чаще использовался термин «структура»)[2]. Причем решетка квантово-механических высказываний оказывается недистрибутивной, небулевой. Однако эта решетка является ортомодулярной: ортомодулярной называют решетку, которая одновременно является ортодополнительной и модулярной. Ортодополнительной называют решетку с нулем и единицей, для которой для любого элемента а существует элемент $a^{\perp}$, отвечающий свойству $a \vee a^{\perp} = 1$, свойству $a \,\&\, a^{\perp} = 0$ и ряду других свойств [1, 10, 12]. Модулярной называют решетку, в которой при условии $a \leq c$ ($\leq$ — отношение порядка) выполняется а $\vee (b \,\&\, c) = (a \vee b) \,\&\, c$.

Статья Биркгофа и фон Неймана индуцировала обширные изыскания в логике. Далеко не все из них были связаны с разработкой идеи квантово-теоретической вероятности. Многие исследования по квантовой логике оказались опытами построения неклассических логик (модальных, временных, многозначных...). Статья

[2] Решетка — это частично упорядоченное множество, в котором вводятся понятия $sup(a, b)$ и $inf(a, b)$ — наименьшей верхней грани и наибольшей нижней грани. Если речь идет о множестве всех подмножеств, упорядоченных по включению, то sup есть объединение подмножеств, а inf есть их пересечение.

же Биркгофа и фон Неймана была не просто опытом в области логики, эта статья оказалась шагом в развитии концептуальных оснований квантовой механики: к ней восходит квантово-теоретическая концепция вероятности. Классическая теория вероятностей Колмогорова была построена на базе алгебраической структуры, называемой сигма-алгеброй. Сигма-алгебра — это теоретико-множественная структура, отвечающая отношению дистрибутивности, являющаяся булевой. Квантовая логика — небулева. Однако свойство ортомодулярности позволяет построить булевые подрешетки и определить на них вероятностную меру.

В следующем параграфе будет прослежена эволюция взглядов фон Неймана относительно квантово-теоретической вероятности. Этот параграф покажет те логические трудности в изложении квантовой механики, которые привели к построению обобщенной теории вероятностей. Затем (второй параграф) будет описана структура неклассической квантово-теоретической вероятности. В третьем параграфе будет представлена концепция математического обоснования квантовой механики. Математическое обоснование будет рассмотрено как концептуальной обоснование, направленное на выяснение предельных предпосылок теории. В этой связи обобщенная квантово-теоретическая вероятность будет охарактеризована как этап в математическом обосновании квантовой механики.

1. Эволюция взглядов фон Неймана на квантово-теоретическую вероятность

В книге 1932 г. фон Нейман исходил из частотной теории вероятности фон Мизеса: вероятность трактовалась как предел последовательности относительных частот. Позиция фон Неймана здесь была традиционной. Как известно, в 1936 г. М. Борн предложил статистическую интерпретацию волновой функции (еще раньше вероятностные представления были введены в старую квантовую теорию Бора-Зоммерфельда и в матричную механику). Первоначально логические и философские трудности, связанные со статистической интерпретацией казались менее важными, чем экспериментальные факты, свидетельствующие в ее пользу. Лишь открытие соотношения неопределенностей заставило с интересом отнестись к этим трудностям. Однако первые рефлексии по поводу теоретико-вероятностных представлений носили лишь интуитивный характер. Физики еще не ставили задачу синтеза вероятностных идей и математического аппарата квантовой механики. Они молчаливо принимали, что в квантовой механике используется классическая теория вероятностей, и пытались осмыслить возникающие при этом аномалии путем новых интерпретаций. Так, В. Гейзеберг связывал вероятность, возникающую в квантовой механике, с тенденцией (потенцией в смысле аристотелевской философии) и, в отличие от вероятности в классической физике, считал квантовую вероятность полностью объективной [3, с. 32].

Существенный шаг к строгой трактовке вероятности в квантовой механике сделал фон Нейман в книге 1932 г. Фон Нейман сформулировал статистический алгоритм, соотносящий математический формализм и результаты измерений, который включал все статистические утверждения, делавшиеся раньше. Этот алгоритм состоял из двух положений: 1) вероятность того, что наблюдаемая R в состоянии ϕ принимает значение из интервала I, равна $|E(I)\phi|^2$, где $\mathrm{E}(I)$ — разложение единицы, принадлежащее наблюдаемой R, 2) математическое ожидание R в состоянии ϕ равно скалярному произведению $(R\phi, \phi)$.

Однако у фон Неймана понятие вероятности оставалось внешним по отношению к основной математической схеме квантовой механики — теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах. У него еще нет обобщенной теории вероятностей, преодолевающей ограниченности той трактовки, которая была выдвинута фон Мизесом.

Как отмечает М. Редеи, принятая фон Нейманом в 1932 г. интерпретация вероятности как относительной частоты вела к концептуальным трудностям. Одна из этих трудностей — понятие ансамбля и понятие отбора подансамбля путем квантового измерения [14]. В 1932 г. фон Нейман еще полагает, что можно сохранить ансамблевую интерпретацию, оставляя в стороне проблему квантового возмущения этого ансамбля в ходе измерения.

Фон Нейман писал следующее:

> Даже если две или более величины R, S не могут быть одновременно измеряемы, по отношению к единичной системе, их вероятностные распределения в данном ансамбле $\{S_1, S_2, ..., S_N\}$ могут быть получены с произвольной точностью, если N достаточно велико. Действительно, в случае ансамбля из N элементов достаточно собрать статистические показания о распределении значений величины R не со всех N элементов $S_1, S_2, ..., S_N$, а лишь с некоторой подсистемы из M элементов, где M меньше N, скажем, $S_1, S_2, ..., S_M$, если только M и N достаточно велики, причем M можно сделать совсем малым по сравнению с N. Тогда при измерении будет подвергнута изменению только M/N-я часть ансамбля, сколь угодно малая. Чтобы измерить одновременно две величины, скажем, R, S, нам потребуются две подсистемы, скажем, $\{S_1, S_2, ..., S_M\}$ и $\{S_{M+1}, ..., S_{2M}\}$, так что первая будет применена для снимка статистики R, а вторая — для снимка статистики S. Тогда оба измерения не помешают одно другому — хотя и производятся на одном и том же ансамбле — и даже изменят этот ансамбль на произвольно малую величину [6, с. 254].

Как замечает Редеи, в основе приведенного рассуждения просматривается допущение, что субансамбли представляют большой ансамбль в том смысле, что относительная частота любого свойства будет той же самой как в подансамбле, так и первоначальном ансамбле. Это нетривиальное допущение, известное как требование иррегулярности, принимается в отношении ансамблей, применяемых при расчете вероятности как относительной частоты (см., например, [4, с. 47]). Данное допущение, пишет Редеи, уже критиковалось при изложении вероятности по фон Мизесу [14, p. 156].

В 1937 г., как констатирует Редеи, фон Нейман в статье «Квантовая логика: строгая и вероятностная логика» отказался от безусловной поддержки частотного понятия вероятности, выдвинутого фон Мизесом [14, p. 166].

2. Понятие решетки и обобщенная теория вероятностей

Классическое понятие вероятности строится на базе алгебраической структуры, называемой сигма-алгеброй. Но фон Нейман приходит к небулевой решетке, в то время как сигма-алгебра, задействованная у А.Н. Колмогорова, является булевой решеткой[3]. Речь идет, следовательно, о построении обобщенной теории вероятностей.

Рассмотрим логическое исчисление проекторов. Что такое проектор (оператор проектирования)? Согласно фон Нейману, состояние системы, которое, согласно волновой механике Шредингера, выражено волновой функцией, представляет вектор гильбертова пространства. Наблюдаемая (координата, импульс, спин и т. д.) — это самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве (мы опускаем более точную формулировку). Фон Нейман, кроме наблюдаемых, использует представление об альтернативных свойствах физических систем (например, это следующие свойства: иметь спин +1, иметь импульс 2 кгм/сек, электрон может иметь спин +1 или не иметь такого спина — иметь спин -1--, иметь импульс 2 кгм/сек или не иметь такового). Свойства представляют особые наблюдаемые — проекционные операторы (проекторы). Значение проектора — это 0 или 1. Если P — проекционный оператор, то $P^2 = P$ и, наоборот, если $P^2 = P$, то P — проекционный оператор.

Проекторы находятся во взаимно-однозначном соответствии с замкнутыми подпространствами гильбертова пространства. Действительно, если P — проекционный оператор, его ранг (область определения) есть замкнутое множество, и любое замкнутое подпространство составляет ранг одного проектора.

Логическое исчисление проекторов обнаруживает неклассическую логику. «Мы видим, что связь между свойствами физической системы, с одной стороны, и проекционными операторами, с другой стороны, — писал фон Нейман в своей книге 1932 г., — делает возможным некое логическое исчисление над ними. Однако в противоположность исчислению обычной логики эта система обогаще-

[3]А.Н. Колмогоров (1936) исходит из множества U элементарных событий. Далее рассматривается некоторая система F подмножеств множества U. Если подмножества $A_1, A_2, ..., A_n$ множества U являются элементами множества F, то их сумма и произведение также являются элементами F. Множество F называется σ-алгеброй событий.

на характерным для квантовой механики понятием “одновременной рассудимости”» [6, с. 189].

В статье Биркгофа и фон Неймана это логическое исчисление было эксплицировано. Упорядоченное посредством теоретико-множественного включения замкнутые подпространства гильбертова пространства H образуют полную решетку, в которой конъюнкция (наибольшая нижняя грань) множества подпространств есть их пересечение, тогда как дизъюнкция (наименьшая верхняя грань) есть их замкнутое объединение.

Исчисление Биркгофа–фон Неймана было небулевым. Этим была выражена его неклассичность. С этим исчислением не может связано классическое колмогоровское понятие вероятности. Однако, как показывают исследования последнего времени, понятие вероятности может быть обобщено и применено к логике проекционных операторов.

Вот что говорится об этом в одной из последних работ [16]. «Поскольку типичное замкнутое подпространство имеет бесконечно много дополнительных подпространств, эта решетка недистрибутивна, однако она ортодополнительна исходя из отображения

$\mathrm{M} \to M^{\perp} = [v \in H : \forall u \in M(v, u) = 0]$.

Исходя из упомянутого взаимно однозначного соответствия между замкнутыми подпространствами и проекторами, мы можем ввести на множестве $L(H)$ структуру полной ортодополнительной решетки, определяя $P < Q$, если $ran(P) < ran(Q)$ и $P^{'} = 1 - P$ (так что $ran(P^{'}) = ran(P)^{\perp}$). Это есть непосредственно то, что $\mathrm{P} \leq Q$ только тогда, когда $PQ = QP = P$. Обобщая, мы можем утверждать, что если $PQ = QP$, то $PQ = P \wedge Q$, пересечение P и Q в $L(H)$. В этом случае их объединение дается как $P \vee Q = P + Q - PQ$.

Если P и Q проекционные операторы в гильбертовом пространстве, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $PQ = QP$;

2) Подрешетка $L(H)$ генерированная P, Q, P' и Q' булева.

3) P, Q лежат в общей булевой ортогональной подрешетке.

Принимая идею, что коммутирующие наблюдаемые, в частности проекционные операторы, одновременно измеримы, мы заключаем, что элементы булевой ортогональной подрешетки $L(H)$ одновременно измеримы. Это значит, что мы можем сохранить классическую логическую интерпретацию пересечения, объединения и ортогонального дополнения в применении к коммутирующим проекционным операторам».

Переходим непосредственно к определению вероятности.

Назовем проекторы ортогональным и будем писать $P \perp Q$, если $P \leq Q'$. Заметим, что $P \perp Q$, если $PQ = QP = 0$. Если P и Q ортогональные проекторы, то их объединение есть просто их сумма $\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}$. Тождественное отображение на H будем обозначать как $\mathbf{1}''$.

Определение. Счетно-аддитивная вероятностная мера на $L(H)$ представляет собой отображение $\mu : L \rightarrow [0, 1]$ такое, что $\mu(1) = 1$ и для любой последовательности ортогональных проекционных операторов $P_i, i = 1, 2, ...$ $\mu(+_i P_i) = \Sigma\mu(P_i)$ (вероятностная мера суммы равна сумме вероятностных мер).

Одним из достижений логико-алгебраического подхода явилось строгое доказательство теоремы Глиссона (1957 г.), показывающей (с современной точки зрения), что каждая счетно-аддитивная вероятностная мера на $L(H)$ имеет форму $\mu(P) = Tr(WP)$, где W — оператор плотности, обобщающий понятие чистого состояния (вектор в гильбертовом пространстве) на смешанный случай. Чистый случай — это чистое состояние, выраженное волновой функцией или вектором в гильбертовым пространстве. Более общий смешанный случай представляет собой набор чистых состояний, имеющих свои «веса».

3. Концептуальное обоснование квантовой механики у Дирака и фон Неймана

Квантово-теоретическая трактовка вероятности явилась не только результатом кризиса частотной концепции вероятности, которой придерживался фон Нейман в его книге 1932 г. Эта трактовка восходит к общей идее концептуального обоснования квантовой механики, к общей идее последовательного и строгого изложения физической теории. Как и многие другие теории, квантовая механика возникла в виде ряда вычислительных алгоритмов. Эти алгоритмы были связаны с наглядными схемами, моделями и философскими дискуссиями. Но в истории физики проглядывается и другая тенденция — тенденция к логически строгому изложению теории, к изложению на базе собственных принципов и концептуальных идей. Именно эта тенденция воплотилась в фоннеймановском изложении квантовой механики, в строгом изложении на базе последовательного и четкого построения математического аппарата этой теории. Эвристические соображения и наглядные модели при этом заключались в скобки, ставились в кавычки. Главное состояло в том, чтобы четко сформулировать исходные принципы квантовой механики и провести строгую математическую дедукцию тех положений, которые обеспечивают результативность этой теории.

Квантовая логика, теория ортодополнительных недистрибутивных решеток, изложенная Биркгофом и фон Нейманом, возникла в продолжение этих усилий. Квантовая логика позволила инкорпорировать идею вероятности, которая у фон Неймана в 1936 г. была дополнением к его изложению квантовой механики, непосредственно в структуру исходных положений квантовой этой теории.

В книге автора настоящей статьи под концептуальным обоснованием физической теории понимается выявление и уточнение ее исходных понятий и принципов. Критерием концептуальной обоснованности служит целостность образующейся теоретической системы. Исходными понятиями и принципами теории будут понятия и положения, обеспечивающие ее построение в соответствии с правилами дедуктивной логики и позволяющие осуществить интеграцию ее частных формулировок [7, с. 93].

При этом автором настоящей статьи был подчеркнут критический характер процедуры концептуального обоснования. Обоснование физической теории не сводится к математическому изложению этой теории. «В ходе концептуального обоснования критически пересматривается структура теории. Перед исследователем возникают вопросы: по праву то или иное положение оказалось исходным в структуре теории? Не является ли оно в действительности производным и даже вспомогательным? Концептуальное обоснование предполагает также поиск логических ошибок в структуре теории. При этом речь не идет об ошибках, допущенных по недосмотру или из-за невежества. Такие ошибки вообще не рассматриваются в философии науки. В ходе концептуального обоснования выявляются логические ошибки, порожденные деформацией структуры теории, логические ошибки, незаметные при обычном некритическом подходе к теории» [7, с. 105].

Как известно, квантовая механика возникла в виде двух теорий — матричной механики и волновой. Проблема концептуального обоснования квантовой механики приобрела в 1926–27 гг. вид проблемы, названной М. Джеммером гиппарховой (по имени древнегреческого астронома Гиппарха, который во II в. до н. э. заинтересовался вопросом, почему одни и те же наблюдения одинаково хорошо укладываются в две различные теории движения небесных тел — в теорию концентрических окружностей с эпициклами и теорию эксцентрических окружностей [13, p. 307].

Суть гиппарховой проблемы в данном случае состояла в следующем. Матричная и волновая теории существенно различались и в плане математического аппарата, и в плане математических образов, выражающих физический смысл. Однако обе вели к одним и тем же предсказаниям эмпирических фактов. Решение гиппарховой проблемы было достигнуто на пути математического обоснования: матричная и волновая теории уступили место более совершенной формулировке, базирующейся на более совершенном математическом аппарате. Матричная и волновая теории не ушли из квантовой физики — они лишь приобрели служебный вспомогательный характер. Точнее, математические схемы этих теорий стали рассматриваться как представления, реализации математического формализма, а их наглядные образы были сведены на роль необязательных аналогий, поясняющих лишь некоторые аспекты физической ситуации.

Построение единой квантовой механики было достигнуто на пути развития квантовой теории преобразований, с которой, по словам Дирака, связана «сущность нового метода в теоретической физике» [5, с. 9]. Теория преобразований позволила абстрагироваться от тех черт квантовой механики, которые ассоциировались с историческими путями ее развития, индуцировались аналогиями с классической физикой, вытекали из требования наглядности, и тем самым позволила разглядеть в различных формулировках квантовой механики единый образ физической реальности. Правда, теория преобразований, которой было суждено объединить квантовую механику, первоначально формировалась с иными целями. Она формировалась в матричной механике в связи с решением конкретных задач, в связи с разработкой вычислительного алгоритма (Дирак, Иордан, Лондон, 1925–26 гг.). Когда в 1926 г. появилась волновая механика Шредингера, Лондон и Дирак занялись переносом методов теории преобразований, развитых в матричной механике, в волновую механику. В ходе этого переноса и произошло то «обращение метода», которое превратило теорию преобразований из результата квантовой механики в ее основание. Разработка теории преобразований оказалась связанной с выявлением математических структур, реализующихся как в квантовой, так и в волновой теории, а также с нахождением общего способа соотнесения математических выражений с результатами эксперимента. Как писал И. фон Нейман, матричная и волновая формулировки оказались сплавлены в единую теорию преобразований, где они дополнили друг друга и где оказалось возможным наиболее простое с математической точки зрения понимание физических вопросов.

Рассмотрим гиппархову проблему, возникшую в квантовой механике, подробнее. Матричная и волновая теории, охватывая по сути дела одну и ту же сферу опыта, различались в плане математического. В основе волновой механики лежало дифференциальное уравнение второго порядка, напоминающее уравнения механики жидкостей, уравнение Шредингера. Это уравнение формулировалось относительно ψ-функции, выражающей состояние физической системы и подчиняющейся принципу суперпозиции (как и состояния свободных полей). Шредингер в 1926 г. интерпретировал как некоторое непрерывное распределение электричества в реальном пространстве (плотность этого распределения считалась пропорциональной квадрату модуля ψ-функции). Правда, в том же 1926 г. М. Борн подверг интерпретацию Шредингера критике и предложил свое вероятностное истолкование ψ-функции. Но и у Борна она выступала как своего рода волна, волна амплитуды вероятности в конфигурационном пространстве.

Если математический аппарат волновой механики был аналитическим, то матричная механика опиралась на алгебру. Последняя исходила из наблюдаемой дискретности спектральных линий и выдвигала на первый план момент прерывности. Хотя матричная механика строилась на отрицании таких наглядных образов, как координата и циклическая частота электрона, наглядность, как отмечает М. Джеммер, в ней неявно присутствует.

Первым этапом в решении гиппарховой проблемы в квантовой теории оказалась статья Шредингера [8], в которой устанавливалась математическая эквивалентность матричной и волновой теорий. Эта эквивалентность уживалась у Шредингера с физической неэквивалентностью. Будучи привержен континуальным волновым представлениям, он считал более точным образом физической реальности волновую теорию. Матричная же механика была для него скорее формальной схемой.

Однако Шредингер установил не столько математическую эквивалентность, сколько, как отмечал Н.Р. Хэнсон, взаимопереводимость математических схем матричной и волновой формулировок [11]. У Шредингера не было общей математической схемы, по отношению к которой матричная и волновая теории выступали бы как представления, реализации. Он не увидел, что вектор–столбец матрицы преобразования подобия, применявшейся в матричной механике для решения задачи диагонализации матрицы, выражающей физическую величину (энергию), может быть отождествлен с его волновой функцией, а соответствующее матричное уравнение может быть преобразовано в его волновое уравнение. Это увидел позже Дирак, предложивший более общую математическую схему квантовой механики. Шредингер же просто показал, что «решение всей системы матричных уравнений Гейзенберга–Борна–Йордана сводится к естественной краевой задаче на собственные значения для некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных» [8, с. 68–69], идентичного с волновым уравнением. Если эта задача решена, то оказывается возможным вычислить этот элемент «с помощью дифференцирований и квадратур».

Гиппархова проблема была решена Дираком, который отказался спорить о том, какая из схем (матричная или волновая) предпочтительнее. Дирак развивал свою концепцию квантовой механики в тесном контакте с работами по матричной теории и делал критические замечания в адрес работ по волновой механике. Тем не менее он подчеркивал дистанцию, отделяющую его от этого типа концептуальных построений. В своей итоговой книге (1930 г.) Дирак пишет о символическом методе, непосредственно оперирующем «в абстрактной форме фундаментальными величинами теории (инвариантами и квазиинвариантами преобразований)» и о методе представлений, который «оперирует системами чисел, соответствующих этим величинам» [5, с. 10]. Матричная и волновая теории строились методом представлений, Дирак же предпочитает символический метод, который «глубже проникает в природу вещей» и порывает с историческим способом изложения.

Дирак отклоняет наглядность как то требование, которому должна удовлетворять теория. «Согласно классической традиции, — писал Дирак, — окружающий нас мир рассматривался как совокупность наблюдаемых объектов (частиц, флюидов, и т. д.), движущихся под действием сил согласно определенным законам, так что теория допускает наглядное представление в пространстве и времени... Но в настоящее время становится все более очевидным, что природа действует иначе. Ее основные законы не управляют непосредственно миром наших наглядных представлений, но относятся к таким понятиям, о которых мы не можем составить себе наглядных представлений не впадая в противоречие» [5, с. 8].

Матричная и волновая теории трансформировались Дираком в частные формулировки квантовой механики, построенной при помощи символического метода и соотнесенной с результатами эксперимента посредством некоторого обобщения вероятностной интерпретации волновой функции, выдвинутой ранее М. Борном. Символический метод покоился на теории унитарных преобразований гильбертова пространства. Матричная механика оказывается частной формулировкой квантовой механики в энергетическом представлении (в котором диагональна матрица энергии), формулировкой, использующей картину движения Гейзенберга, а волновая — формулировкой квантовой механики в координатном представлении, использующей картину движения Шредингера.

Фон Нейман уточнил дираковское обоснование квантовой механики, указав на скрытую зависимость построений Дирака от идеологии матричной механики (фон Нейман зафиксировал то, что Дирак находился под властью онтологии дискретного). Фон Нейман подчеркнул, что у Дирака, построившего квантовую механику как теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, математически строго были изложены только проблемы дискретного спектра. Проблемы же непрерывного (сплошного) спектра у него не укладывались в гильбертово пространство. Чтобы достигнуть единообразия с трактовкой дискретного спектра, Дирак «лицемерно» (слова фон Неймана) допустил существование несобственных функций типа δ-функции, для которых в то время не было строгой теории. Фон Нейман же изложил всю квантовую механику как теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. «То, что не принадлежит $\mathbb{R}_\infty$ (бесконечно-мерному гильбертову пространству), для нас не существует» [6, с. 101]. Он разработал теорию самосопряженных операторов и построил единую теорию дискретного и непрерывного спектров. Он также сформулировал в общей форме правило, связывающее математический аппарат квантовой механики с экспериментом и наблюдением.

Следующий этап — логико-алгебраическое изложение центральных понятий квантовой механики, ее трактовка как обобщенной теории вероятностей.

Заключение

В настоящей статье построение теории квантовых высказываний Биркгофом и фон Нейманом и последующее развитие обобщенной теории вероятностей, базирующееся на этой работе Биркгофа и фон Неймана, трактуется как этап математического обоснования квантовой механики.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Квантовая логика. М.: ПЕР СЭ, 2005. 192 с.

[2] *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: ОНТИ, 1936. 120 с.

[3] *Гейзенберг В.* Физика и философия. М.: Наука, 1963. 464 с.

[4] *Гнеденко В.Б.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976. 448 с.

[5] *Дирак П.А.М* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 278 с.

[6] *фон Нейманн И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.

[7] *Печенкин А.А.* Обоснование научной теории: классика и современность. М.: Наука, 1991, 184 с.

[8] *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М.: Мир, 1980, 420 с.

[9] *Birkhoff G., Neumann J.* The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37. No. 4. P. 823–843.

[10] *van Fraassen B.C.* The labyrinth of quantum logics // Boston Studies in the Philosophy of Science / R.S. Cohen and M.W. Vastovsky (eds.). Dordrehct: Reidel Publishing Company, 1972. Vol. 13. P. 224–254.

[11] *Hanson N.R.* The concepr of positron. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1965. 236 p.

[12] *Hooker C.* The logico-algebraic approach to quantum mechanics. Dordrehct: Reidel Publishing Company, 1975. 469 p.

[13] *Jammer M.* The conceptual development of quantum mechanics. N. Y.: Wiley, 1966. 308 p.

[14] *Redei M.* John von Neumann on mathematical and axiomatic physics// The role of mathematics in physical sciences / Ed by G.Boniolo et. al. Netherlands: Springer, 2005. P. 43–52.

[15] *Redei M.* Von Neumann's concept of quantum logic and quantum probability // John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics / Ed. by M. Redei, M. Stotzner. Netherlands: Springer, 2001. 464 p.

[16] *Wilce A.* Quantum logic and probability theory // Stanford encyclopedia of philosophy. 2002. Substantive revision – 2017. URL: https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog (дата обращения: 30.08.2017).

A.A. Pechenkin

Quantum Logic and Probability Theory[1]

Pechenkin Alexandr Alexandrovich
Department of philosophy and methodology of science,
Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `a_pechenk@yahoo.com`

The paper provides the review of the texts on quantum logic, the texts which are directly connected with the mathematical foundations of quantum mechanics. These are texts which discuss the theory of quantum probability. The development of the mathematical scheme of quantum mechanics is discussed along the following line: P.A.M. Dirack's 1927 "The Principles of Quantum Mechanics", J. von Neumann's 1932 "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", G.Birkgoff-I.von Neumann's 1936 "The logic of quantum mechanics". It is shown that the further development of the mathematical foundations of quantum mechanics resulted in the construction of quantum theory of probability, the theory generalizing A.N.Kolmogorov's classical probability and critically improving von Neumann's 1932 mathematical scheme.

Keywords: lattice, boolean algebra, σ-algebra, frequency understanding of probability, mathematical justification

References

[1] Vasukov, V.L. *Kvantovaya logika* [Quantum logic]. Moscow: Per Se, 2005. 192 pp. (In Russian)

[2] Kolmogorov, A.N. *Osnovnie ponyatita teorii veroyatnostey* [Foundations of the Theory of Probability]. Moscow: ONTI, 1936. 120 pp. (In Russian).

[3] Heisenberg, V. *Fizika i filosofiya* [Physics and Philosophy]. Moscow: Nauka, 1963. 464 pp. (In Russian)

[4] Gnedenko, V.B. *Kurs teorii veroyatnostey* [Course in Probability Theory]. Moscow: Nauka, 1976. 448 pp. (In Russian)

[5] Dirak, P.A.M. *Principi kvantovoy mehaniki* [The Analytic Hierarchy Process]. Moscow: Nauka, 1979. 278 pp. (In Russian)

[1]The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects № 15–33–0141.

[6] Von Neumann, J. *Matematicheskie osnovy kvantovoi mehaniki* [Mathematical foundations of quantum mechanics]. Moscow. Nauka, 1964. 367 pp. (In Russian)

[7] Pechenkin, A.A. *Obosnovanie nauchnoy teorii: klassika and sovremennost* [Foundations of Scientific Theories: Classics and Modern Times]. Moscow: Nauka, 1991. 184 pp. (In Russian)

[8] Schroedinger E. *Izbrannye trudy po kvantovoi mehanike* [Selected works in Quantum Mechanics]. Moscow: Mir, 1980, 420 pp. (In Russian)

[9] Birkhoff, G., von Neumann, J. "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mathematics*, 1936, Vol. 37, No. 4, pp. 823–843.

[10] van Fraassen, B. "The labyrinth of quantum logics", in: *Boston Studies in the Philosophy of Science*, ed. by R.S. Cohen and M.W. Vastovsky. Dordrehct: Reidel Publishing Company, 1972, pp. 224–254.

[11] Hanson, N.R. *The concepr of positron.* Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1965. 236 pp.

[12] Hooker, C. *The logico-algebraic approach to Quantum Mechanics.* Dordrehct: Reidel Publishing Company, 1975. 469 pp.

[13] Jammer, M. *The conceptual development of quantum mechanics.* N.Y.: Wiley, 1966. 308 pp.

[14] Redei, M. "John von Neumann on mathematical and axiomatic physics", in: *The role of mathematics in physical sciences*, ed by G. Boniolo et. al. Netherlands: Springer, 2005, pp. 43–52.

[15] Redei, M. "Von Neumann's concept of quantum logic and quantum probability", in: *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics*, ed. by M. Redei, M. Stotzner. Netherlands: Springer, 2001, 464 pp.

[16] Wilce, A. "Quantum logic and probability theory", *Stanford encyclopedia of philosophy.* 2002. Substantive revision – 2017. [https://plato.stanford.edu/ entries/qt-quantlog/, accessed on 30.08.2017].

Исправления

Erratum

I. Исправления к статье Л.Ю. Девяткина «Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть I», опубликованной в Т. 22, № 2 журнала «Логические исследования».

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
28	3	отношения	отношению
34	9	могут быть заданы	может быть задано
34	17	матрица из $8Kb$ добавлением	матрица из $8Kb$ получена добавлением
36	10	$x \to y = (x \supset y) \wedge (\sim x \supset \sim y)$	$x \to y = (x \supset y) \wedge (\sim y \supset \sim x)$
37	1	стандартным условиям стандартности	условиям стандартности
39	14	принадлежит данному, если	принадлежит данному классу, если
41	25	обычно следования	обычное следование
41	26	дуалом	дуал
43	27	$f(\tilde{x}) \neq c(\tilde{a})$	$f(\tilde{b}) \neq c(\tilde{a})$
45	6	$\{1, 2\}$	$\{2\}$
47	11–15	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline & \overrightarrow{\bullet} \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline & \overleftarrow{\bullet} \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ \hline\end{array}$

На с. 32 делается следующее утверждение: «…для языков соответствующего типа не существует матриц с нестандартными операциями, задающих классическое следование с единственными или множественными заключениями». Это неверно. Матрица M_1, приведенная на стр. 31, задает классическое отношение следования с сингулярными заключениями, однако ее операции не отвечают условию стандартности Россера и Тюркетта. Стандартность базовых операций является необходимым и достаточным условием, чтобы матрица задавала классическое следование с множественными заключениями. В случае обычного следования это условие будет достаточным, но не необходимым.

Библиографические ссылки в статье ведут на транслитерированный список литературы (с. 54–58), а не на основной (с. 50–53).

II. Исправления к статье Л.Ю. Девяткина «Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть II», опубликованной в Т. 23, № 1 журнала «Логические исследования».

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
15	30	$\neg^{\diamond}$	$\neg^{*}$
17	11	$\supset^{\square}$	$\supset^{\diamond}$
17	11	$\sim(\sim x \supset^{\square} \sim y)$	$\sim(\sim x \supset^{\diamond} \sim y)$
21	11	пара	пару
23	27	$\varphi(2) = \varphi(1)$	$\varphi(2) = 1$
23	30	$\alpha \in T(M)$	$\alpha \notin T(M)$
24	1	противонепротиворечивым	паранепротиворечивым
27	16	$Cn^*(M) = \{\langle\alpha, X\rangle \vert \forall h(h(X) \nsubseteq D \Longrightarrow h(\alpha) \notin D)\}$	$Cn^*(M) = \{\langle\alpha, X\rangle \vert \forall h(h(X) \cap D = \emptyset \Longrightarrow h(\alpha) \notin D)\}$
28	19	$\neg\beta \in T(C_2)$	$\neg\beta \in T(M)$
28	21	$\neg^{\diamond}(h(\neg\alpha) = 2)$	$\neg^{\diamond}(h(\neg\beta)) = 2$
28	21	$(h(\neg\neg\alpha) = 2)$	$(h(\neg\neg\beta)) = 2$
28	22	$\neg\neg\alpha \in T(M)$	$\neg\neg\beta \in T(M)$

На с. 30 приводится следующее рассуждение: «…класс операций G_3 предполон в U. Отсюда, поскольку операция $\to_\top$ принадлежит классу U, но не принадлежит классу T, вытекает, что базовые операции $TL_1^\top$ образуют базис класса U». Его необходимо дополнить. Импликация $\Rightarrow$ матрицы G_3 определима в $TL_1^\top$ следующим образом: $x \Rightarrow y = x \to_\top ((y \vee \neg y) \to_\top y)$.

Библиографические ссылки в статье ведут на транслитерированный список литературы (с. 43–47), а не на основной (с. 37–41).

Информация для авторов

• Журнал «*Логические исследования*» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Размещенияе статьи в журнале возможно в рамках следующих рубрик:

1. Традиционная логика
2. Символическая логика
3. Неклассические логики
4. Философия и логика
5. Логика и язык
6. Прикладная логика
7. Теория и практика аргументации
8. История логики
9. Аналитические обзоры
10. Дискуссии
11. Рецензии

• Автор статьи гарантирует, что текст не был опубликован ранее и не сдан в другое издание. Ссылка на «*Логические исследования*» при использовании материалов статьи в последующих публикациях обязательна. Автор берет на себя ответственность за точность цитирования, правильность библиографических описаний, транскрибирование имен и названий.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла). При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл размещен в правилах предоставления рукописей: `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`

• Объем рукописи не должен превышать 24 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, список литературы, аннотацию.

• Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

• Помимо основного текста, рукопись должна включать в себя следующие обязательные элементы на **русском** и **английском языках**:

1) сведения об авторе(ах):
   - фамилия, имя и отчество автора;
   - место работы;
   - полный адрес места работы (включая страну, индекс, город);
   - адрес электронной почты автора.
2) название статьи;
3) аннотация (от 100 до 200 слов);
4) ключевые слова (5-7 слов/словосочетаний);
5) список литературы.

• Цитируемая литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется строго в соответствии с правилами. Рукописи на русском языке обязательно должны содержать *два варианта представления списка литературы*:

1) список, озаглавленный «Литература» и выполненный в соответствии с требованиями ГОСТа.

2) список, озаглавленный «References» и выполненный в соответствии с требованиями международных библиографических баз данных.

(Правила оформления литературы — `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`)

Статьи следует направлять по адресу
logicalinvestigations@gmail.com

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication.

• The journal provides a platform for broad discussions of logical problems of both conceptual and purely theoretical nature. The following sections are offered:

1. Traditinal logic
2. Symbolic logic
3. Non-classical logics
4. Philosophy and logic
5. Logic and language
6. Applied logic
7. Theory and practice of argumentation
8. History of logic
9. Analitycal overviews
10. Discussions
11. Reviews

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

• Papers should not exceed 24 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

• Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.

• In addition to the principal text, the manuscript should include the following mandatory elements:

1) Information about the author(s):
   - first and last names of the author;
   - affiliation;
   - full address of the place of work (including the postal code, country and city);
   - author's e-mail address.
2) abstract (100 to 200 words);
3) keywords (5-7 words/word combinations);
4) the list of works cited.

• The bibliographical references should be placed at the end of the paper as the general list ordered alphabetically, and formatted in strict accordance with the guidelines of the international bibliographical databases (Scopus and others). Please see the guidelines here: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Submissions should be e-mailed to the following address:
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2017. Том 23. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технические редакторы: *Ю.А. Аношина, Ю.В. Хорькова*

Художник: *Н.Н. Попов*

Подписано в печать с оригинал-макета 05.10.17.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 9,1. Уч.-изд. л. 7,4. Тираж 1 000 экз. Заказ № 23.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Свободная цена

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://iph.ras.ru/login.htm`