Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 9–24
УДК 510.64

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 9–24
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-9-24

Неклассическая логика
Non-classical Logic

И.А. Горбунов

Дедуктивные логики и их связь с интуиционистской логикой[1]

Горбунов Игорь Анатольевич
Математический факультет,
Тверской государственный университет.
Российская федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

В работе [5] ([6]) Р. Вуйицкий ввел понятия хорошо определенной (well-determined) логики и дедуктивного (deductive) множества формул. Логика называется хорошо определенной, если она обладает свойством конъюнкции (т. е. $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha)C(\beta)$) и для нее верна теорема о дедукции в следующей ослабленной форме:

$$\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta.$$

Множество формул L называется *дедуктивным*, если $L = C(\varnothing)$, где C — операция добавления следствий некоторой хорошо определенной логики. Хорошо определенные логики интересны тем, что присущее им отношение логического следования выразимо средствами самой логики, т. е. для хорошо определенной логики C (в некотором фиксированном языке) верно условие

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_C \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta \in C(\varnothing).$$

Здесь рассматриваются хорошо определенные логики, для которых теорема о дедукции выполняется в полном объеме, т. е. такие, что для любого множества формул X и любых формул α и β выполнено условие

$$X, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \ X \vdash \alpha \to \beta.$$

Логики, обладающие таким свойством, будем называть дедуктивными. Множество формул L называем *сильно дедуктивным*, если существует такая дедуктивная логика C, что $C(\varnothing) = L$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №14–06–00298-а, №16–07–01272-а и №17-03-00818-а.

В работе вводится операция добавления следствий над теориями и рассматриваются некоторые ее свойства. Приводятся некоторые свойства дедуктивных логик. Доказано, что теории всякой дедуктивной логики замкнуты относительно правила modus ponens. Введено понятие минимальной дедуктивной логики. Основными результатами работы являются: критерий сильной дедуктивности множества формул и доказательство того факта, что множество тавтологий минимальной дедуктивной логики совпадает с конъюнктивно-импликативным фрагментом интуиционистской логики.

Ключевые слова: теорема о дедукции, дедуктивные пропозициональные системы, сильно дедуктивное множество, интуиционистская логика

1. Введение

Обозначим посредством S множество всех формул некоторого пропозиционального языка, т. е. языка в алфавите, состоящем из множества пропозициональных переменных Var и конечного множества Σ конечноместных логических связок. Буква E будет обозначать множество всех подстановок (эндоморфизмов из S в S). Посредством C обозначим определенную на множестве формул S операцию добавления следствий, которую мы будем называть также *следованием.*

Следование C будем называть *структурным*, если для любой подстановки $\varepsilon \in E$ и любого множества формул X выполняется условие $\varepsilon(C(X)) \subseteq C(\varepsilon(X))$.

Следование будем называть *финитарным*, если для любого X верно, что $C(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} C(Y)$, где Y — конечное множество формул.

Пару $\langle S, C\rangle$, где C — структурное и финитарное следование, будем называть *дедуктивной системой* или *пропозициональной логикой*, поскольку задание операции следования эквивалентно заданию на S отношения логического следования. Множество $C(\varnothing)$ будем называть множеством тавтологий логики $\langle S, C\rangle$.

Логику $\langle S, C\rangle$ будем называть *хорошо определенной*, если для нее выполняются следующие условия:

$$\alpha \to \beta \in C(\varnothing) \iff \beta \in C(\alpha),$$

$$C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha, \beta).$$

Поскольку мы будем рассматривать логики в языке, содержащем две двухместные связки $\to$ и $\wedge$, которые мы, пока условно, назовем импликацией и конъюнкцией, то далее будем использовать следующие обозначения. Посредством квазиформулы $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ будем обозначать конъюнкцию формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, взятых в произвольном порядке и с произвольной (но правильной) расстановкой скобок. Запись $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \;\to\; \alpha]$ будет обозначать множество всех импликаций, в посылках которых стоят различные конъюнкции, соответствующие данной квазиформуле. Пусть X — некоторое конечное непустое множество формул; посредством $X^{\wedge}$ будем обозначать квазиформулу, имеющую вид конъюнкции всех формул из этого множества. Формулы, содержащие в качестве связки только конъюнкцию, везде далее будем обозначать строчными греческими буквами с индексом $\wedge$, например, $\alpha^{\wedge}$.

Множество следствий конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ будем обозначать $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множество следствий из множества $\{\alpha\} \cup X$ зачастую будем обозначать как $C(\alpha, X)$.

Интуиционистская пропозициональная логика Int будет пониматься нами как пара $\langle S, C^{Int} \rangle$, где операция добавления следствий определяется так же, как в [3] (т. е. $C^{Int}(X)$ — это множество всех формул, выводимых из множества формул X). Все определения, касающиеся используемых здесь синтаксиса и семантики интуиционистской логики, содержатся в [4].

2. Дедуктивная логика

Пусть C — операция добавления следствий на множестве формул S некоторого языка, которая определяет на нем дедуктивную систему. Как говорилось выше, множество связок этого языка содержит связки импликация $\to$ и конъюнкция $\wedge$.

Теорией данной логики будем называть замкнутое множество формул, т. е. множество, для которого верно, что $X = C(X)$. Для всякой теории T этой дедуктивной системы определим операцию $C_T : 2^S \to 2^S$ следующим образом:

$$C_T(X) = C(X \cup T).$$

Операцию C_T будем называть *следованием над теорией* T. Заметим, что для нее верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой теории* T *и множеств формул* X *и* Y *верно, что* $C_T(X \cup Y) = C_{C_T(Y)}(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $C(T \cup X \cup Y) \subseteq C(C(T \cup Y) \cup X)$. По определению, $C(T \cup X \cup Y) = C_T(X \cup Y)$, $C(T \cup Y) = C_T(Y)$ и $C(C(T \cup Y) \cup X) = C(C_T(Y) \cup X) = C_{C_T(Y)}(X)$. Следовательно, $C_T(X \cup Y) \subseteq C_{C_T(Y)}(X)$.

С другой стороны, $C(T \cup Y) \cup X \subseteq C(T \cup X \cup Y)$. Следовательно, $C(C(T \cup Y) \cup X) \subseteq C(T \cup X \cup Y)$. Таким образом, получаем, что $C_{C_T(Y)}(X) \subseteq C_T(X \cup Y)$. □

Будем говорить, что *хорошо определенной логике присуща теорема о дедукции* (или что логика является *дедуктивной*), если для любого множества формул X, любого конечного непустого множества формул Y и любой формулы α верно, что

$$X, Y \vdash \alpha \Leftrightarrow \ X \vdash [Y^{\wedge} \to \alpha],$$

или в другой записи $\alpha \in C_{C(X)}(Y) \Leftrightarrow [Y^{\wedge} \to \alpha] \subseteq C(X)$.

Отсюда следует, что логика дедуктивна тогда и только тогда, когда для любой теории T конъюнкция и импликация связаны с C_T следующим образом:

A1. $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha] \subseteq T \ \Leftrightarrow \ \alpha \in C_T(\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n)$.

Поскольку это условие верно и для $T = C(\varnothing)$, то всякая дедуктивная логика является хорошо определенной (см. [5] или [1]).

Верно следующее утверждение:

Теорема 2. *Условие* $A1$ *эквивалентно следующему множеству условий:*

B1. C_T *— финитарное следование;*
B2. $\alpha \to \beta \in T \ \Leftrightarrow \ \beta \in C_T(\alpha)$*;*
B3. $C_T(\alpha \wedge \beta) = C_T(\alpha, \ \beta)$*.*

Его доказательство мы приводить не будем, поскольку оно почти дословно, с точностью до замены C на C_T, повторяет доказательство Теоремы 5 из работы [1], за исключением структурности, которая не утверждается.

Теорема 3. *Всякая теория T дедуктивной логики замкнута относительно правила modus ponens (MP).*

Доказательство. Пусть $p \in T$ и $p \to q \in T$. Из последнего, по пункту B2, следует, что $q \in C_T(p) = C(T \cup \{p\})$. В силу первого, $T \cup \{p\} = T$. Таким образом, $q \in C(T) = T$. $\square$

Теорема 4. *Всякая теория T дедуктивной логики содержит все подстановочные случаи следующих формул:*

(si) $p \to (q \to p)$;

(fr) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;

(ea) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q)$;

(el) $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$.

Доказательство.

(si) Пусть $\varepsilon \in E$ и T — некоторая теория. Так как $\varepsilon p \in C_T(\varepsilon p)$, то для любой переменной $q \neq p$

$$\varepsilon p \in C_T(\varepsilon p, \varepsilon q) = C_{C_T(\varepsilon p)}(\varepsilon q).$$

Отсюда по пункту B2 получим, что $\varepsilon q \to \varepsilon p \in C_T(\varepsilon p)$ и, таким образом, $\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \epsilon p) \in T$.

(fr) Покажем, что для любой подстановки ε и теории T верно, что $\varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p)$. В силу Теоремы 3, множество $C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p) = F$ замкнуто относительно (MP), откуда следует, что $\varepsilon q \to \varepsilon r \in F$ и $\varepsilon q \in F$. Следовательно, $\varepsilon r \in F$.

В силу Теоремы 1 и пункта B2, получим следующую цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon r \in C_{(C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q)}(\varepsilon p),$$

$$\varepsilon p \to \varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r), \varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$\varepsilon p \to \varepsilon r \in C_{(C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r))}(\varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$(\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \to \varepsilon r) \in C_T(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)),$$

$$(\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)) \to ((\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \to \varepsilon r)) \in T.$$

(ea) Так как $p \wedge r \to p \in C(\varnothing)$, то для любой подстановки ε формула $\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon p$ принадлежит любой теории T. Поэтому, по правилу (MP), $\varepsilon q \in C_T(\varepsilon p \to \varepsilon q, \varepsilon p \wedge \varepsilon r)$. Как и в предыдущем доказательстве, получим цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon q \in C_T(\varepsilon p \to \varepsilon q),$$

$$(\varepsilon p \to \varepsilon q) \to (\varepsilon p \wedge \varepsilon r \to \varepsilon q) \in T.$$

(el) Вследствие пункта B3, верно равенство

$$C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p, \varepsilon q) = C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p \wedge \varepsilon q).$$

Поэтому, в силу замкнутости по (MP), $\varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p, \varepsilon q)$. Таким образом, получаем цепочку принадлежностей:

$$\varepsilon q \to \varepsilon r \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r, \varepsilon p),$$

$$\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r) \in C_T(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r),$$

$$(\varepsilon p \wedge \varepsilon q \to \varepsilon r) \to (\varepsilon p \to (\varepsilon q \to \varepsilon r)) \in T.$$

$\square$

3. Сильно дедуктивные множества

Множество формул L будем называть *сильно дедуктивным*, если существует такая дедуктивная логика $\langle S, C\rangle$, что $C(\varnothing) = L$.

В работе [1] для произвольного множества формул L была введена следующая операция присоединения следствий:

$$(1) \quad \alpha \in \vec{L}(X) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X \cup L\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L).$$

Эту операцию мы будем называть *импликативным следованием над* множеством L. При этом доказано, что для любого дедуктивного множества L эта операция задает хорошо определенную логику, для которой $\vec{L}(\varnothing) = L$. В той же работе приведен критерий дедуктивности множества формул, здесь мы приведем его в несколько измененной форме, а именно:

ТЕОРЕМА 8*. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*

2. *Для любых формул $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ верно, что если имеет место включение $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то $\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \in L$.*

3. *Множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r} \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2} \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q}$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r} \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q} \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

(Нумерация теоремы приведена по [1].)

Несложно заметить, что в силу того, что для следования любой хорошо определенной логики выполняется условие $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha,\ \beta)$, то все теории любой хорошо определенной логики замкнуты относительно правила вывода (AD). Теперь заметим, что верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть L — дедуктивное множество, содержащее формулу (fr), тогда любая теория его импликативного следования замкнута относительно правила (MP).*

Доказательство. Пусть T — некоторая теория $\vec{L}$ (т. е. существует такое множество формул X, что $T = \vec{L}(X)$) и для некоторых формул α и β верно, что $\alpha \in T$ и $\alpha \to \beta \in T$. По определению $\vec{L}$ это значит, что:

(2) $\exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in X \cup L\ (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \to \alpha \in L)$.

(3) $\exists\, \delta_1, \ldots, \delta_m \in X \cup L\ (\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_m \to (\alpha \to \beta) \in L)$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, $\bar{\Gamma} = \Gamma X$, $\bar{\Delta} = \Delta X$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma L$ и $\tilde{\Delta} = \Delta L$.

Из пунктов (2) и (3) следует, что формула $\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \tilde{\Gamma}^{\wedge} \to \alpha \in L$ и формула $\bar{\Delta}^{\wedge} \wedge \tilde{\Delta}^{\wedge} \to (\alpha \to \beta) \in L$. Поскольку L — дедуктивное множество (и значит, удовлетворяет условию Теоремы 8*), то по правилу (CV) получим, что $\bar{\Gamma}^{\wedge} \to \alpha \in L$ и $\bar{\Delta}^{\wedge} \to (\alpha \to \beta) \in L$. Отсюда по правилу (EA) получаем, что $\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to \alpha \in L$ и $\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to (\alpha \to \beta) \in L$. Поскольку множество L содержит все подстановочные случаи формулы (fr), то

$$(\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to (\alpha \to \beta)) \to ((\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to \alpha) \to (\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to \beta)) \in L.$$

Применяя два раза (MP) получим, что $\bar{\Gamma}^{\wedge} \wedge \bar{\Delta}^{\wedge} \to \beta \in L$, и значит, по определению следования, $\vec{L}$, $\beta \in T$. □

Как доказано в [1], если L — дедуктивное множество, то хорошо определенная логика $\langle S, C \rangle$, для которой $L = C(\varnothing)$, совпадает с импликативным следованием для этого множества. Тогда, как следствие из Теоремы 5, получим теорему:

Теорема 6. *Если для хорошо определенной логики $\langle S, C \rangle$ верно, что формула $(fr) \in C(\varnothing)$, то любая теория этой логики замкнута относительно правила (MP).*

Теорема 7. *Пусть L — дедуктивное множество, содержащее формулы (si), (fr), (ea) и (el), тогда операция $\vec{L}$ образует дедуктивную логику.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что логика $\vec{L}$ дедуктивна, достаточно показать, что для любой ее теории T выполняется условие:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T \ \Leftrightarrow \ \alpha \in \vec{L}(T \cup \{\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n\}).$$

Обозначим множества $\{\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_n\}$ посредством A. Заметим, что выполняется цепочка эквивалентностей:

$$\begin{aligned}&\alpha \in \vec{L}(T \cup A) \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ \beta_1, \ldots, \beta_m \in L \cup T \cup A \ (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \to \alpha \in L) \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ \beta_1, \ldots, \beta_m \in T \cup A \ (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \to \alpha \in L).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Введем следующие обозначения: $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, $\Gamma = B \backslash A$ и $\Delta = BA$.

Пусть $\Delta \neq \varnothing$. Так как T замкнуто по (AD), то $\Gamma^\wedge \in T$. Поскольку L содержит формулу (el) и $L \subseteq T$, то T содержит формулу $(\Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge \to \alpha) \to (\Gamma^\wedge \to (\Delta^\wedge \to \alpha))$. Заметим, что $\Gamma \cup \Delta = (B \setminus A) \cup (BA) = B$, и значит, $B^\wedge = \Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge$, таким образом, $\Gamma^\wedge \wedge \Delta^\wedge \to \alpha \in T$. Так как L содержит формулу (fr), то по Теореме 5 любая ее теория замкнута по (MP). Отсюда получаем, что $\Gamma^\wedge \to (\Delta^\wedge \to \alpha) \in T$, и затем, что $\Delta^\wedge \to \alpha \in T$.

Обозначим посредством Λ множество $A \setminus \Gamma$. В силу формулы (ea), $(\Delta^\wedge \to \alpha) \to (\Delta^\wedge \wedge \Lambda^\wedge \to \alpha) \in T$, тогда и $\Delta^\wedge \wedge \Lambda^\wedge \to \alpha \in T$. Таким образом, $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$.

Пусть $\Delta = \varnothing$, и значит, $\Gamma = B$. Так как $\Gamma^\wedge \in T$ и $\Gamma^\wedge \to \alpha \in T$, то $\alpha \in T$. По формуле (si), $\alpha \to (A^\wedge \to \alpha) \in T$. Тогда получаем, что $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$.

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \ \alpha \in T$. Тогда $A^\wedge \to \alpha \in \vec{L}(T \cup A)$. Так как $\vec{L}(T \cup A)$ — теория хорошо определенной логики $\vec{L}$ и $(si) \in L$, то она замкнута по (AD) и (MP). Следовательно, $\alpha \in \vec{L}(T \cup A)$. □

Следующее утверждение является критерием сильной дедуктивности множества:

Теорема 8. *Множество формул L является сильно дедуктивным тогда и только тогда, когда оно дедуктивно и имеет место включение* $\{(si), (fr), (ea), (el)\} \subseteq L$.

Доказательство. Если множество L сильно дедуктивно, то существует дедуктивное следование C такое, что $C(\varnothing) = L$. Так как $C(\varnothing)$ — теория этого следования, то по Теореме 4 имеем, что $\{(si), (fr), (ea), (el)\} \subseteq L$. Достаточность следует из Теоремы 7. $\square$

Приведем еще один критерий сильной дедуктивности. Для этого заметим, что при доказательстве теорем 5 и 7 формула (fr) требовалась для замкнутости теорий по правилу (MP), однако замкнутости по (MP) можно добиться и другим образом.

Теорема 9. *Теории хорошо определенной логики $\langle S, C\rangle$ замкнуты относительно (MP) тогда и только тогда, когда формула $(mp) = p \wedge (p \to q) \to q \in C(\varnothing)$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть все теории C замкнуты по (MP). Тогда $q \in C(p, p \to q) = C(p \wedge (p \to q))$, и следовательно, получим, что $p \wedge (p \to q) \to q \in C(\varnothing)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $(mp) \in C(\varnothing)$ и для некоторой теории T и формул φ и $\varphi \to \psi$ верно, что $\varphi \in T$ и $(\varphi \to \psi) \in T$. Так как $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi \in C(\varnothing)$, то $\psi \in C(\varphi \wedge (\varphi \to \psi))$. Поскольку $C(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) = C(\varphi, \varphi \to \psi) \subseteq T$, то $\psi \in T$. $\square$

Таким образом, по Теореме 3, для всякой дедуктивной логики $\langle S, C\rangle$ верно, что $(mp) \in C(\varnothing)$ и, следовательно, в формулировке теорем 7 и 8 формулу (fr) можно заменить на (mp). Доказательства при этом практически не изменятся. Таким образом, верен следующий критерий сильной дедуктивности:

Теорема 10. *Множество формул L является сильно дедуктивным тогда и только тогда, когда оно дедуктивно и имеет место включение $\{(si), (mp), (ea), (el)\} \subseteq L$.*

4. Минимальная дедуктивная логика и конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики

Обозначим посредством D минимальную дедуктивную логику в языке со множеством связок $\Sigma = \{\wedge, \to\}$. Из доказанного выше и Теоремы 2 из [2] следует, что она аксиоматизируется следующим образом:

1. Множество тавтологий логики D — это множество формул, выводимых в исчислении со следующими множествами схем аксиом и правил вывода:
$$Ax = \{p \to p, p \to p \wedge p, p \wedge q \to q, (si), (fr), (ea), (el)\};$$
$$R = \{(TR), (CM), (AD), (CV), (MP), (EA)\}.$$
2. Все теории этой логики замкнуты относительно правил (AD) и (MP).

(Вопрос минимальности этой аксиоматизации здесь не рассматривается.)

Обозначим посредством $\mathbf{Ax}$ множество, состоящее из формул, задающих множество схем аксиом Ax: посредством $\mathbf{Int}$ — множество тавтологий интуиционистской логики, посредством $\mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}}$ — конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики (здесь под логикой мы понимаем множество ее тавтологий), посредством $\mathbf{D}$ — множество тавтологий логики D.

Используя семантику Крипке, непосредственной проверкой каждой формулы из множества $\mathbf{Ax}$ можно убедиться в том, что имеет место включение $\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{Int}$. Используя ту же семантику, также можно показать, что правила (TR), (CM), (AD), (CV) и (EA) выводимы в Int. Таким образом, верна

Теорема 11. $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}}$.

Выясним, верно ли обратное включение.

Обозначим посредством Th множество всех теорий логики D. Заметим, что пара $\langle Th, \subseteq \rangle$ образует шкалу интуиционистской логики.

Рассмотрим отображение ν из множества пропозициональных переменных во множество подмножеств множества Th, заданное следующим образом: для любого мира T шкалы $\langle Th, \subseteq \rangle$ верно, что $T \in \nu(p) \Leftrightarrow p \in T$.

Несложно доказать, что это отображение является интуиционистской оценкой переменных на шкале $\langle Th, \subseteq \rangle$. Для этого достаточно заметить, что для любых теорий T_1, T_2 и произвольной формулы

φ естественно выполняется, что если $T_1 \subseteq T_2$ и $\varphi \in T_1$, то $\varphi \in T_2$. Отсюда, в силу определения, для отображения ν будет выполняться следующее условие: если $T_1 \subseteq T_2$ и $T_1 \in \nu(p)$, то $T_2 \in \nu(p)$, которое и определяет интуиционистскую оценку на шкале $\langle Th, \subseteq\rangle$.

Шкала $\langle Th, \subseteq\rangle$ с указанной оценкой ν образует интуиционистскую модель, которую мы будем называть *естественной моделью* логики D и обозначать $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — это интуиционистская модель. Запись вида $\mathfrak{M}, x \models \varphi$ будет означать, что в мире x модели $\mathfrak{M}$ истинна формула φ.

Лемма 1. *Для любой формулы φ и любой теории $T \in Th$ верно, что $\varphi \in T \Leftrightarrow \mathfrak{D}, T \models \varphi$.*

Доказательство. Лемму будем доказывать индукцией по построению формулы.

Базис непосредственно следует из определения оценки ν.

Шаг.

1) Пусть $\varphi = \psi \wedge \chi$ и $\varphi \in T$. В силу того, что формулы $p \wedge q \to q$ и $p \wedge q \to p$ являются тавтологиями логики D и все теории этой логики замкнуты по правилам (MP) и (AD), то утверждение о том, что $\psi \wedge \chi \in T$, равносильно утверждению того, что $\psi \in T$ и $\chi \in T$. Последнее, по индукционному предположению, равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi$ и $\mathfrak{D}, T \models \chi$. По определению истинности формулы в мире модели это равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi \wedge \chi$.

2) Пусть $\varphi = \psi \to \chi$ и $\varphi \in T$. В силу замкнутости всех теорий по правилу (MP) это равносильно тому, что для любой теории T', такой, что $T \subseteq T'$, верно, что $\psi \in T' \Rightarrow \chi \in T'$. В силу индукционного предположения, последнее равносильно тому, что для любого мира T', такого, что $T \subseteq T'$, верно, что $\mathfrak{D}, T' \models \psi \Rightarrow \mathfrak{D}, T' \models \chi$. Согласно определению истинности формулы в мире модели, это равносильно тому, что $\mathfrak{D}, T \models \psi \to \chi$. $\square$

Теорема 12. $\mathbf{Int_\Sigma} \subseteq \mathbf{D}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{D}$, тогда существует такая теория $T \in Th$, что $\varphi \notin T$. В силу Леммы 1, это означает, что формула φ

опровергается в мире T естественной модели. Таким образом, $\varphi \notin$ **Int**, а значит, и $\varphi \notin \mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}}$. $\square$

Из Теоремы 11 и Теоремы 12 непосредственно следует

Теорема 13. *Множество тавтологий минимальной дедуктивной логики совпадает с конъюнктивно-импликативным фрагментом тавтологий интуиционистской логики.*

5. Заключение

Стоит заметить, что из критериев дедуктивности и сильной дедуктивности следует, что всякое расширение дедуктивного множества является дедуктивным или сильно дедуктивным. Расширение сильно дедуктивного множества всегда сильно дедуктивно.

В силу Теоремы 9 из [1] о единственности хорошо определенной логики для каждого дедуктивного множества формул верно, что для каждого сильно дедуктивного множества L существует единственное дедуктивное следование C, для которого $C(\varnothing) = L$, и это следование совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$.

Таким образом, между сильно дедуктивными множествами и дедуктивными логиками устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Отсюда и из теорем 8 и 10 настоящей работы следует, что любая дедуктивная логика содержит множество тавтологий логики D, или (что, в силу Теоремы 13, то же самое) конъюнктивно-импликативный фрагмент интуиционистской логики. Таким образом, получаем следующий необходимый критерий дедуктивности логики.

Теорема 14. *Пусть язык логики $\langle S, C\rangle$ содержит связки $\wedge$ и $\to$. Если логика $\langle S, C\rangle$ дедуктивна, то $\mathbf{Int}_{\mathbf{\Sigma}} \subseteq C(\varnothing)$.*

Заметим также, что в процессе доказательства нами была получена некоторая аксиоматика (аксиоматика множества тавтологий логики D) конъюнктивно-импликативного фрагмента интуиционистской логики.

Литература

[1] *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логические исследования. Вып. 17. М.; СПб.: ЦГИ, 2011. С. 95–108.

[2] *Горбунов И.А.* Эффективный критерий дедуктивности множеств формул логики // Вестн. ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 107–115.

[3] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М: Наука, 1972. С. 214.

[4] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. P. 25–26.

[5] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // www.studialogica.org/wojcicki (дата обращения: 01.06.2017)

[6] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // Ossolineum. Wroclaw, 1984.

I.A. Gorbunov

Deductive Logics and Their Relation to Intuitionistic Logic[1]

Gorbunov Igor Anatolievich
Mathematical Faculty, Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

R. Wojcicki introduced the notion of well-defined logic [5]. A propositional logic is called well-determined if it satisfies conjunction property and weak deduction theorem. The weak deduction theorem has the following form: $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta$. Well-determined logics are interested because their logical consequence may be certainly represented by means of the logic.

We consider well-determined logics for which the following deductive theorem holds: for any set of formulas X and any formulas α and β it is true that $X, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow X \vdash \alpha \to \beta$. Logics with this property we call deductive. We call a set of formulas L *strongly deductive* if there exists a deductive logic C such that $C(\varnothing) = L$.

In this paper we introduce an operation of adding of consequences under a theory and study some its properties. We prove that any theory under a deductive logic is closed under modus ponens. The notion of minimal deductive logic is introduced. The main results are a criterion of strong deductivity for a set of formulas and the proof that the set of tautologies of minimal deductive logic coincides with the conjunctive and implicative fragment of intuitionistic logic.

Keywords: deduction theorem, deductive propositional systems, strongly-deductive set of sentences, minimal deductive logic, intuitionistic logic

References

[1] Gorbunov, I.A. "Khorosho opredelennye logiki" [Well-determined logics] *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. Moscow; St. Petersburg: TsGI, 2011, vol. 17 pp. 95–108. (In Russian)

[1]The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №14–06–00298-a, №16–07–01272-a and №17-03-00818-a.

[2] Gorbunov, I.A. “Effektivnyy kriteriy deduktivnosti mnozhestva formul logiki” [An effective criterion of deductivity for sets of formulas of a logic]. *Vestnik TvGU*. Seriya: Prikladnaya matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, No.1, pp. 107—115. (In Russian)

[3] Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathematics*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa, 1963.

[4] Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997. P. 25–26.

[5] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*. [www.studialogica.org/wojcicki, accessed on 01.06.2017].

[6] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*. Ossolineum. Wroclaw, 1984.