Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 25. Number 1

Moscow
2019

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 25. Номер 1

Москва
2019

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2019. Volume 25. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал
2019. Том 25. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00. – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 308
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Сайт: https://logicalinvestigations.ru

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

История логики

Философия и логика

Неклассическая логика

Дискуссии

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 9–20
УДК 16

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 9–20
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-9-20

История логики

History of Logic

В.А. Бажанов

Жан ван Хейеноорт как историк логики

Валентин Александрович Бажанов
Ульяновский государственный университет.
Российская Федерация, 432000, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42.
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Аннотация: В статье предпринимается попытка достаточно лаконичного обзора жизни и творчества Жана ван Хейеноорта (1912–1986) в области истории логики. Приводится информация биографического характера, в которой отмечается отношение ученого к марксизму и его тесное в определенный период сотрудничество с Л.Д. Троцким, разочарование в ключевых принципах марксистской доктрины и ее практической реализации, но сохранение в целом интереса к этому политическому течению. На основании некоторых неопубликованных материалов, полученных из архива американской математики в Остине, штат Техас, описываются работы ван Хейеноорта в области истории логики. Отмечается, что математическое образование он получил как геометр и тополог, но его интересы перенеслись в логику, которая по природе своей доказательности и канонам строгости рассуждений была близка геометрии. Особый акцент в статье делается на обстоятельствах работы над фундаментальной антологией развития логической мысли «От Фреге до Гёделя», составленной и прокомментированной ван Хейеноортом и рядом его коллег. Обращается внимание на то, что вне поля зрения антологии осталось алгебраическое направление развития математической логики. Описываются труды ван Хейеноорта, относящиеся к теореме о неполноте и первым двум томам собрания сочинений К. Гёделя в начале 1980-х годов, прервавшиеся в результате гибели ван Хейеноорта. Приводятся оценки его коллег работ ван Хейеноорта по истории логики.

Ключевые слова: Жан ван Хейеноорт, Л.Д. Троцкий, история логики, теоретико-квантификационное и алгебраическое направления в логике, Г. Фреге, К. Гёдель

Для цитирования: *Бажанов В.А.* Жан ван Хейеноорт как историк логики // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 9–20. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-9-20

Введение

Впервые о Жане ван Хейеноорте я написал в 1991 году в связи со своим переводом и публикацией его статьи «Ф. Энгельс и математика» в журнале «Природа» [Бажанов, 1991, с. 90]. Это была первая публикация ученого на русском языке, в которой приводилась его краткая биография. Журнал «Природа» тогда имел тираж более 41 тысячи экземпляров, и, таким образом, имя Жана ван Хейеноорта стало известно широкому кругу читателей, а статья, в которой он критически анализирует ортодоксальные взгляды марксистов на природу и особенности проявления, как считал один из классиков марксизма (Ф. Энгельс), диалектики в математике, в атмосфере «бури и натиска» тех дней вызвала довольно оживленное обсуждение в сообществе философов и историков науки.

В 1992 году я обратился к дочери Жана ван Хейеноорта Лауре ван Хейеноорт с просьбой прислать мне неопубликованные материалы ее отца из архива Американских математиков, который находится в библиотеке университета Техаса в Остине. В свою очередь она попросила архив выслать мне эти материалы. Через полгода я получил ксерокопии этих материалов вместе с разрешением использовать их в своих последующих трудах [Burchsted, 1991], [Burchsted, 1992][1]. Однако переезд из Казани в Симбирск-Ульяновск и работа в области истории логики и университетской философии в России и СССР, другие интересы и обязательства заставили надолго отложить осмысление масштабов вклада Жана ван Хейеноорта в историю логики. Наконец, пришло время начать восполнять этот пробел, который особенно ощутим в отечественной литературе.

1. Несколько слов о биографии Жана ван Хейеноорта

Имя Жана ван Хейеноорта, который родился в Креле в 1912 году и был убит (предположительно собственной женой) в Мехико в 1986 году [Anellis, 1987, p. 97], известно в России в основном логикам и философам математики. Между тем он оставил заметный след и в истории марксизма. В юношеские годы Жан ван Хейеноорт, как многие его сверстники, был увлечен марксистскими идеями, вступил в ряду коммунистической партии Франции, а с 1932 по 1939 год он состоит личным секретарем, помощником, представителем в США и одновременно телохранителем Л.Д. Троцкого. Он сопровождает Троцкого в его поездках по Турции (где на одном из Принцевых островов *Πρίγκηπος* — (Принкипо) на греческом языке, Бююкада (Büyükada) на турецком языке — еще сохранилась вилла Троцкого), Норвегии, Франции и Мексике.

Об этом времени Жан ван Хейеноорт оставил книгу воспоминаний «С Троцким в изгнании: от Принкипо до Койакана» [Heijenoort, 1978][2].

[1] Материалы архива не пронумерованы, а разложены по отдельным «ящикам» в хронологическом порядке.

[2] В этой книге он также исправляет многочисленные неточности и ошибки других авторов воспоминаний о Троцком этого периода [Heijenoort, 1978, p. 151–160].

Общение с Троцким убедило ван Хейеноорта, что для Троцкого «диалектика являлась жизненной философией, которая применялась им в всех сферах его жизни» (цит. по: [Anellis, 1988a, p. 150]. Вплоть до 1945 года ван Хейеноорт являлся секретарем IV Интернационала. Однако еще до начала Второй мировой войны у него возникает и усиливается критическое отношение к марксистской доктрине и особенно к ее практической реализации. Между тем он, по-видимому, продолжает разделять некоторые марксистские убеждения и даже в начале 1980-х годов выражает желание изучить влияние древнегреческой философии на Троцкого [Beziau, 2000, p. 106]. Однако примитивные взгляды марксистов на природу математики, когда она фактически сводится к физике, ван Хейеноорту были уже глубоко чужды [Хейеноорт, 1991]; [Бажанов, 2007, с. 115].

После Второй мировой войны ван Хейеноорт отходит от активной политической деятельности, поступает в 1945 году в университет в Нью-Йорке, где продолжает математическое образование, начатое во Франции в Эколь Нормаль еще до знакомства с Троцким, и уже в 1946 году защищает диссертацию, связанную с развитием идей Э. Картана. Он специализируется по дифференциальной геометрии и топологии и отдается математике с той же страстью, что недавно отдавался политике. Жан ван Хейеноорт начинает преподавать на математическом факультете этого же университета и остается в статусе Teaching Fellow в течение более пятнадцати лет. В 1965 году он занимает должность профессора на кафедре философии университета Брайдейс, где работает до 1977 года, когда становится «заслуженным профессором» (Emeritus Professor). В этот период он какое-то время также является приглашенным профессором в Стенфордском университете, куда переходит в 1982 году для работы над публикацией трудов К. Гёделя (Gödel Edition project) и разбора архива Троцкого в университете Гувера.

Ван Хейеноорт не читал специальные курсы аспирантам. Тем не менее в 1970-х годах он руководил четырьмя аспирантами, которые защитили диссертации на темы: «Использование формальных систем в логике и математике» (Д. Готтлиб), «Фреге и Витгенштейн об отношении тождества, логике и числе» (Ст. Сэвит), «О проблеме тождества личности» (Дж. Грэхем), «Онтологические допущения в идеальных языках» (И. Анеллис). Впоследствии только И. Анеллис (1946–2013) продолжал работать — и достаточно успешно — в области логики и истории логики.

Жан ван Хейеноорт довольно часто посещал Мехико, откуда родом была его последняя, четвертая (и пятая одновременно), жена. В конце марта 1986 года между ними, видимо, произошла крупная ссора и он был застрелен в голову его женой [Anellis, 1994, p. 46–47]. Эта потеря широко отмечалась в крупных математических центрах США, а соболезнования опубликовали все ведущие логические издания.

2. От геометрии и топологии к логике. Панорама логического творчества ван Хейеноорта

Интересы Жана ван Хейеноорта постепенно смещались от геометрии и топологии к математической логике и истории логики. Таким образом, фактически он проделал путь, аналогичный пути Брауэра, который также оставил заметный след в этих разделах математики. Вероятно, такая эволюция небеспочвенна ввиду очевидного имманентного родства между геометрией и логикой. Аксиоматический метод евклидовой геометрии служил достойным примером для логики. Геометрия требовала строгих доказательных рассуждений, без которых логика не могла бы стать логикой. Кроме того, схемы Эйлера и(или) диаграммы Венна являлись геометрическими компонентами логического знания. Таким образом, геометрия служила своего рода моделью и образцом для построения логического знания.

Авторитет и широкую известность в кругах логиков, математиков, философов и историков науки принесла антология текстов «От Фреге к Гёделю: книга источников по математической логике (1879–1931)», которую составил Жан ван Хейеноорт [Heijenoort, 1967]. Идея о такого рода антологии пришла ван Хейеноорту где-то в конце 1950-х годов, когда издательство Гарвардского университета по инициативе У. Куайна выразило желание издать собрание важнейших трудов по математической логике. По совету своего коллеги, Б. Дребена, Куайн порекомендовал обратиться издательству к ван Хейеноорту, который согласился. Началась работа над антологией, продолжавшаяся несколько лет. Предисловие написали «общий» редактор E. Madden (факультет философии университета Нью-Йорка в Буффало) и сам Жан ван Хейеноорт [Heijenoort, 1967, p. V–VIII]. Книга вышла в серии «Source books («Первоисточники»)». Редколлегия этой серии включала таких известных ученых, как I.B. Cohen, C.J. Ducasse, E. Mayr, E. Moody, E. Nagel, H. Shapley.

В «Предисловии» Жан ван Хейеноорт выражал свой взгляд на важнейшие вехи в развитии математической логики: «Великая эпоха в истории логики открылась в 1879 году, когда Готтлиб Фреге опубликовал свой “Beggriffsschrift”. Эта книга освободила логику от искусственной связи с математикой, но в то же время раскрыла более глубокую связь между этими науками. Она представила миру в перспективной форме (full-pledged form) пропозициональное исчисление и теорию квантификации. Хотя работы Фреге долго ждали признания, но последующие десятилетия были отмечены громкими (поразительными) достижениями в логике. Две новые области — теория множеств и основания математики — возникли на границах логики, математики и философии. Тексты, опубликованные ниже (имеется в виду сама «антология». — *В.Б.*), были подобраны так, чтобы отразить это развитие», — подчеркивал Жан ван Хейеноорт [Heijenoort, 1967, p. VI].

Тексты для антологии также отбирали B. Dreben, W. Quine и Hao Wang. Кроме того, они помогали в переводах на английский язык, писали к ним вводные замечания: Куайн к работам Б. Рассела, А. Уайтхеда и М.И. Шейнфинкеля; Х. Ванг — к А.Н. Колмогорову; Дребен — к Ж. Эрбрану; Ч. Парсонс — к Брауэру; все вместе — к Т. Сколему. Остальные вводные статьи написал сам ван Хейеноорт.

В антологии собраны статьи Фреге, Пеано, Дедекинда, Бурали-Форти, Кантора, Падоа, Рассела, Гильберта, Цермело, Кёнига, Уайтхеда и Рассела, Винера, Сколема, Поста, Френкеля, Брауэра, фон Неймана, Шейнфинкеля, Колмогорова, Финслера, А. Вейля, Бернайса, Аккермана, Эрбрана, Гёделя (в хронологической последовательности — с 1879 до 1931 года). Таким образом, теорема Гёделя о неполноте любой достаточно богатой формальной системы, содержащей арифметику натуральных чисел, по мнению ван Хейеноорта, завершала формирование современной математической логики.

Ван Хейеноорт попросил разрешениея на перепубликацию статьи А.Н. Колмогорова 1925 года, посвященную анализу закона исключенного третьего, и получил ответ от Колмогорова, что он считает ее «общим достоянием специалистов по математической логике» и ничего не имеет против ее перевода. Кроме того, он писал: «Рассчитываю, впрочем, на Вашу любезность в смысле присылки мне экземпляра подготавляемой Вами книги по ее выходе в свет»[3]. Ван Хейеноорт сам перевел с русского языка эту статью для антологии.

Приведенный список выдающихся логиков, отобранный в антологию, достаточно однозначно говорил в пользу того, что ван Хейеноорт явно недооценивал (или преднамеренно игнорировал) алгебраическое направление в развитии математической логики. Легко обратить внимание на то, что в антологии, скажем, мы не видим имен таких выдающихся логиков, как Дж. Буль, А. де Морган, Ст. Джевонс, Ч. Пирс и Э. Шредер. Пожалуй, только работа Н. Винера «Упрощение логики отношений» 1914 года, тяготевшая к алгебраической традиции, нарушала принцип отбора трудов, вошедших в антологию. Отсюда можно заключить, что ван Хейеноорт преимущественно признавал и уделял внимание теоретико-квантификационному направлению развития логической мысли,

[3]Копия этого письма А.Н. Колмогорова от 12 ноября 1963 года также имеется в архиве автора настоящего материала.

отодвигая алгебраическое направление в сторону от магистрального пути прогресса математической логики. Причину такого отношения ван Хейеноорта к алгебраическому направлению математической логики трудно определить. Возможно, здесь на него оказали глубокое воздействие труды Б. Рассела, который также вне фокуса своего внимания держал алгебраическое направление.

В более поздней статье, посвященной панораме развития математической логики, написанной в 1974 году, но опубликованной лишь в 1992 году, наиболее крупными открытиями, по мнению ван Хейеноорта, явились следующие события: создание метаматематики Д. Гильбертом в 1904 году, оглашение интуиционистской программы Брауэром в 1907 году, аксиоматизация теории множеств Э. Цермело в 1908 году и разработка теории типов Б. Расселом в 1908 году [Heijenoort, 1992, p. 243].

Заметим, что в антологию не вошли труды и А. Тарского. В данном случае, возможно, А. Тарский опасался, что включение его работ в антологию нарушает авторские права издательства, которое в 1956 году опубликовало его книгу «Логика, семантика, метаматематика: труды с 1923 по 1938 год» [Tarsky, 1956], и, таким образом, не разрешил их перепубликацию.

В любом случае антология «От Фреге до Гёделя…» имела значительный успех, завоевала широкую аудиторию и, таким образом, принесла ван Хейеноорту признание в качестве весьма заметной фигуры в исследовании истории логики.

Этот авторитет был не вдруг приобретенным качеством. Дело в том, что с примерно середины 1950-х и до начала 1970-х годов ван Хейеноорт являлся экспертом и автором десятков обзоров статей для ведущего мирового логического журнала по символической логике (Journal of Symbolic Logic) в тот самый период, когда во главе этого журнала находился А. Чёрч. Из отечественных изданий по логике ван Хейеноорт написал рецензии на пособие для учителей А.А. Столяра «Элементарное введение в математическую логику» (М.: Просвещение, 1965), книгу Н.И. Стяжкина «Формирование математической логики» (М.: Наука, 1967), которую он сопоставлял с известной монографией У. и М. Книль (W. and M. Kneale) «Развитие логики» (1962), сборник «Математическая теория логического вывода» под редакцией А.В. Идельсона-Вельского и Г.Е. Минца (М.: Наука, 1967), а также статью Г.Е. Минца «Теорема Эрбрана для исчисления предикатов с равенством и функциональными символами» (Доклады АН СССР, Т. 169. № 2. 1966. С. 273–275).

Особое внимание ван Хейеноорт уделял творчеству Ж. Эрбрана, который погиб при восхождении в горы летом 1931 года в возрасте всего 23 лет, но успел существенно усилить и обобщить результаты Лёвенгейма и Сколема. Ван Хейеноорт написал Введение к собранию трудов Эрбрана, которое было издано только в 1968 году [Heijenoort, 1968].

Антология «От Фреге до Гёделя» задала своего рода образец, который стал использоваться для издания собрания сочинений К. Гёделя. В этой работе ван Хейеноорт принял активное участие. В эту работу также были вовлечены Дж. Доусон, который разбирал и классифицировал содержание архива Гёделя в Институте передовых исследований в Принстоне, и его жена, которая успешно разбирала сложный почерк Гёделя и могла расшифровывать использовавшиеся им сокращения. В переводах трудов Гёделя на английский язык помогали и другие исследователи. В редколлегию собрания сочинений с 1982 года входили также С. Феферман (в качестве главного редактора), С.К. Клини, Г. Мур и Р. Соловей.

В процессе подготовки первого тома собрания сочинений Гёделя и составлении комментариев к отдельным статьям, возникали сложные историко-логические вопросы. Например, они касались определения степени знакомства Гёделя с результатами Сколема или с леммой Кёнига. С одной стороны, Гёдель скрупулезно ссылался на используемые в своих трудах результаты коллег, а с другой — не всегда с содержательной точки зрения было понятно, опирался ли он на эти результаты или получил аналогичные результаты самостоятельно [Anellis, 1994, p. 107–108].

Ранее, в 1963 году, ван Хейеноорт написал статью о теореме Гёделя о неполноте в философскую энциклопедию, в которой теорему и другие результаты, касающиеся неразрешимости, характеризовал как «монументальные вехи» в истории логики [Heijenoort, 1963]. В отличие от многих других логиков ван Хейеноорт не рассматривал эти результаты в качестве таких, которые по своей природе являются катастрофическими для развития математики, как были склонны считать некоторые философы. Он замечал, что доказательство теоремы о неполноте, хотя и было неожиданным, но очень скоро стало общезначимым и стимулировавшим развитие метатеоретических исследований в других направлениях, но в то же время продемонстрировавшим недостижимость стратегических целей программы Гильберта обоснования математики финитными средствами [Heijenoort, 1963, p. 356].

Известно, что примерно в период написания этой статьи и начала работы над антологией ван Хейеноорт встречался с Гёделем, но это была единственная встреча tete-a-tete [Anellis, 1994, p. 108]. Дальнейшее общение шло по переписке [Burchsted, 1987, p. 373].

В январе 1986 года увидел свет первый том сочинений Гёделя, а в марте, как мы знаем, жизнь ван Хейеноорта оборвалась... В Предисловии ко второму тому члены редколлегии оценили вклад в работу над сочинением ван Хейеноорта как «неоценимую во всех стадиях и отношениях... Его стандарты работы будут выдержаны и в последующих изданиях [сочинений Гёделя. — *В.Б.*]» [Feferman, 1990, p. VI].

После ухода из жизни ван Хейеноорта осталось внушительное рукописное наследие, многие единицы которого еще ждут своего изучения и публикации. Это и подготовительные материалы к антологии, и работы технического порядка, посвященные тем или иным логическим проблемам, и три сотни оттисков статей с пометками, и переписка с К. Гёделем, С.К. Клини, У. Куайном, Р. Мартиным, Ч. Парсонсом, Т. Сколемом, А. Чёрчем (см.: [Anellis, 1988b, p. 272–273]; [Burchsted, 1989, p. 671]).

В этом направлении — и то в случае уже некоторых опубликованных трудов ван Хейеноорта — сделаны лишь первые шаги [Feferman, 2012], а личность ученого, его жизнь как политика и соратника Л.Д. Троцкого, оригинального философа логики еще освещены в отечественной (да и зарубежной) литературе довольно скупо. Эта работа еще впереди.

Благодарности: Автор считает необходимым отметить беспримерную в свое время готовность к сотрудничеству Лауры ван Хейеноорт, И. Анеллиса, Ф. Бурштеда, которые сочли возможным поделиться с ним уникальными архивными материалами и печатными работами, связанными с творчеством Ж. ван Хейеноорта.

Литература

Бажанов, 1991 – *Бажанов В.А.* Предисловие к статье: Ж. ван Хейеноорт. Ф. Энгельс и математика // Природа. 1991. № 8. С. 90.

Бажанов, 2007 – *Бажанов В.А.* История логики в России и СССР. Концептуальный контекст университетской философии. М.: Канон, 2007. 336 с.

Хейеноорт, 1991 – *Хейеноорт ван Ж.* Ф. Энгельс и математика // Природа. 1991. № 8. С. 90–105.

Anellis, 1988a – *Anellis I.* Jean van Heijenoort, the revolutionary, the scholar, and man (1912–1986) // Studies in Soviet Thought. 1988. Vol. 35. P. 147–178.

Anellis, 1987 – *Anellis I.* L. van Heijenoort // Studies in Soviet Thought. 1987. Vol. 34. P. 97.

Anellis, 1988b – *Anellis I.* Some unpublished papers of Jean van Heijenoort // Historia Mathematica. 1988. Vol. 14. P. 270–274.

Anellis, 1994 – *Anellis I.* Van Heijenoort. Logic and its history in the work and writings of Jean van Heijenoort. Ames: Modern Logic Publ., 1994. XIV, 341 p.

Beziau, 2000 – *Beziau J.-Y.* Review of I. H. Anellis. Van Heijenoort. Logic and its history in the work and writings of Jean van Heijenoort. Ames, Iowa: Modern Logic Publishing, 1994 // Modern Logic. 2000. Vol. 8. No. 1–2. P. 105–117.

Burchsted, 1987 – *Burchsted F.F.* Archives of American Mathematics // Historia Mathematica. 1987. Vol. 14. P. 366–374.

Burchsted, 1989 – *Burchsted F.F.* Sources for the history of mathematics in the Archives of American Mathematics // A Century of mathematics in America. Vol. III. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989. P. 667–674.

Burchsted, 1991 – *Burchsted F.F.* Archives of American Mathematics. The University of Texas at Austin. 1991, December 19. Letter to V.A. Bazhanov.

Burchsted, 1992 – *Burchsted F.F.* Archives of American Mathematics. The University of Texas at Austin. 1992, June 18. Letter to V.A. Bazhanov.

Feferman, 1990 – *Feferman S.* Preface // Godel K. Collected works / Eds. Feferman S., Dawson J.W., Kleene S.K., Moore G.H., Solovay R.M. Van Heijenoort J. Vol. II. Publications 1938–1974. N.Y., Oxford. Oxford University press, 1990. P. V–VI.

Feferman, 2012 – *Feferman S.* On Rereading Van Heijenoort's Selected Essays // Logica Universalis. 2012. Vol. 6. P. 535–552.

Heijenoort, 1967 – *From Frege to Godel: A source book in mathematical logic, 1879–1931* / Ed. by Heijenoort J. van. Cambridge (Mass.). Harvard university press, 1967. X, 660 p.

Heijenoort, 1963 – *van Heijenoort J.* Gödel's theorem // Encyclopedia of Philosophy / Ed. by P. Edwards. Vol. 3. N.Y.: Macmillan, 1963. P. 348–357.

Heijenoort, 1978 – *van Heijenoort J.* With Trotsky in exile: from prinkipo to Coyoacan. Cambridge (Mass.). Harvard University press, 1978. XII, 177 p.

Heijenoort, 1968 – *van Heijenoort J.* Preface // Herbrand J. Ecrits logiques. Paris. Presses Universitaires de France. 1968. P. 1–12.

Heijenoort, 1992 – *van Heijenoort J.* Historical development of modern logic // Modern Logic. 1992. Vol. 2. P. 242–255.

Tarsky, 1956 – *Tarsky A.* Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. Oxford: Clarendon press. 1956. 492 p.

Valentin A. Bazhanov

Jean van Heijenoort as historian of logic

Valentin A. Bazhanov
Ulyanovsk State University,
42 L. Tolstoy St., Ulyanovsk, 432000, Russian Federation.
E-mail: vbazhanov@yandex.ru

Abstract: The article attempts to provide a rather concise overview of the life and work of Jean van Heijenoort (1912–1986) in the field of the history of logic. Information of a biographical nature is given, in which the scientist's attitude towards Marxism is noted and his close cooperation with L.D. Trotsky in a certain period; disappointment in the key principles of the Marxist doctrine and especially its practical implementation, but the preservation of the general interest in this political trend. Based on some of the unpublished materials obtained from the American Mathematics Archive in Austin, Texas, van Heijenoort's works in the field of the history of logic described. It is noted that he received a mathematical education as a geometer and a topologist, but his interests were transferred to logic, which, by the nature of its search for proof and the canons of reasoning, were close to geometry. Particular emphasis placed in the article on the circumstances of the work on the fundamental anthology of the development of logical thought "From Frege to Gödel", compiled and commented by van Heijenoort and a number of his colleagues. Attention paid to the fact that the algebraic direction of the development of mathematical logic remains outside the anthology. We describe the works of van Heijenoort relating to the incompleteness theorem, and the first two volumes of the collected works of K. Gödel in the early 1980s, interrupted by the death of van Heijenoort. The assessments of his colleagues on van Heijenoort's legacyin the history of logic provided.

Keywords: Jean van Heijenoort, L.D. Trotsky, history of logic, quantification theory and algebraic traditions in logic, G. Frege, K. Gödel

For citation: Bazhanov V.A. "Zhan van Kheienoort kak istorik logiki" [Jean van Heijenoort as historian of logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 9–20. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-9-20 (In Russian)

References

Anellis, 1988a – Anellis, I. "Jean van Heijenoort, the revolutionary, the scholar, and man (1912–1986)", *Studies in Soviet Thought*, 1988, Vol. 35, pp. 147–178.

Anellis, 1987 – Anellis, I. "J.L. van Heijenoort", *Studies in Soviet Thought*, 1987, Vol. 34, pp. 97.

Anellis, 1988b – Anellis, I. "Some unpublished papers of Jean van Heijenoort", *Historia Mathematica*, 1988, Vol. 14, pp. 270–274.

Anellis, 1994 – Anellis, I. *Van Heijenoort. Logic and its history in the work and writings of Jean van Heijenoort.* Ames: Modern Logic Publ., 1994. XIV, 341 pp.

Bazhanov, 1991 – Bazhanov, V.A. "Predisloviye k stat'ye: Zh. van Kheyyenoort. F. Engels i matematika" [Preface to the article: J. van Heijenoort. F. Engels and Mathematics], *Priroda* [Nature], 1991, No. 8, pp. 90. (In Russian)

Bazhanov, 2007 – Bazhanov, V.A. *Istoriya logiki v Rossii i SSSR. Kontseptual'nyy kontekst universitetskoy filosofii* [The history of logic in Russia and the USSR. The conceptual context of university philosophy]. M.: Kanon, 2007. 336 pp. (In Russian)

Beziau, 2000 – Beziau, J.-Y. "Review of I. H. Anellis. Van Heijenoort. Logic and its history in the work and writings of Jean van Heijenoort. Ames, Iowa: Modern Logic Publishing, 199", *Modern Logic*, 2000, Vol. 8, No. 1–2, pp. 105–117.

Burchsted, 1987 – Burchsted, F.F. "Archives of American Mathematics", *Historia Mathematica*, 1987, Vol. 14, pp. 366–374.

Burchsted, 1989 – Burchsted, F.F. "Sources for the history of mathematics in the Archives of American Mathematics", *A Century of mathematics in America.* Vol. III. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989, pp. 667–674.

Burchsted, 1991 – Burchsted, F.F. Archives of American Mathematics. The University of Texas at Austin. 1991, December 19. *"Letter to V.A. Bazhanov".*

Burchsted, 1992 – Burchsted, F.F. Archives of American Mathematics. The University of Texas at Austin. 1992, June 18. *"Letter to V.A. Bazhanov".*

Feferman, 1990 – Feferman S. "Preface", in: Gödel K. Collected works / Eds. Feferman S., Dawson J.W., Kleene S.K., Moore G.H., Solovay R.M. Van Heijenoort J. Vol. II. Publications 1938–1974. N.Y., Oxford. Oxford University press, 1990, pp. V–VI.

Feferman, 2012 – Feferman, S. "On Rereading Van Heijenoort's Selected Essays", *Logica Universalis*, 2012, Vol. 6, pp. 535–552.

Heijenoort, 1967 – *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931* / by Heijenoort J. van. Cambridge (Mass.). Harvard university press, 1967. X, 660 p.

Heijenoort, 1991 – van Heijenoort, J. "F. Engels i matematika" [F. Engels and Mathematics], *Priroda* [Nature], 1991, No. 8, pp. 90–105. (In Russian)

Heijenoort, 1963 – van Heijenoort, J. "Gödel's theorem", in: *Encyclopedia of Philosophy* / Ed. P. Edwards. Vol. 3. N.Y.: Macmillan, 1963. pp. 348–357.

Heijenoort, 1978 – van Heijenoort, J. *With Trotsky in exile: from prinkipo to Coyoacan.* Cambridge (Mass.). Harvard University press, 1978. XII, 177 pp.

Heijenoort, 1968 – van Heijenoort, J. "Preface", *Herbrand J. Ecrits logiques.* Paris. Presses Universitaires de France, 1968, pp. 1–12.

Heijenoort, 1992 – van Heijenoort, J. "Historical development of modern logic", *Modern Logic*, 1992, Vol. 2, pp. 242–255.

Tarsky, 1956 – Tarsky, A. *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938.* Oxford: Clarendon press. 1956. 492 pp.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 20–36
УДК 16

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 20–36
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-20-36

Философия и логика
Philosophy and Logic

А.С. Боброва

Как сделать тавтологии ясными?

Ангелина Сергеевна Боброва
Российский государственный гуманитарный университет.
Российская Федерация, 125993, г. Москва, Миусская пл., д. 6.
E-mail: angelina.bobrova@gmail.com

Аннотация: В статье показывается, каким образом первый раздел теории экзистенциальных графов Ч. Пирса отвечает на вопрос Л. Витгенштейна: «Как должна быть устроена система знаков, чтобы каждая тавтология распознавалась в ней одним и тем же способом?» Теория экзистенциальных графов или теория графов — диаграмматическая логическая система, базовой единицей которой является диаграмма (внешне похожая на диаграммы Эйлера). Ее первый раздел, альфа-графы, примерно соотносится с пропозициональным фрагментом классической логики. Синтаксис теории нагляден, точнее, он иконичен, а потому иконичным оказывается и решение задачи Витгенштейна. Чтобы определить тип формулы, не требуется никаких преобразований. Тавтологии наблюдемы. Возможность усматривать тавтологии объясняется не только диаграмматическими особенностями синтаксиса, но и его минимальностью. Единственным знаком теории (первый раздел) является разрез (контур упомянутой круговой диаграммы): размещение разрезов рядом друг с другом, внутри друг друга порождает не нового вида знаки, а различного вида графы. Разрез выполняет техническую и логическую функции. В этом смысле теория графов оказывается лаконичнее теорий с NAND- или NOR-операторами. В свете рассуждений о тавтологиях в статье затрагивается вопрос эволюции разреза. Разрез, который при самом простом толковании понимается как негация, представляет собой вырожденную импликацию. Именно импликация, а не негация, конъюнкция или дизъюнкция оказывается первичным знаком теории. На первый взгляд такое решение может показаться странным: импликация — самая сложная для понимания логическая операция. Вместе с тем именно импликация подчеркивает фундаментальную роль логического следования, отражает его основные свойства (антисимметричность и транзитивность).

Ключевые слова: теория экзистенциальных графов, логические диаграммы, Пирс, Витгенштейн, тавтологии

Для цитирования: *Боброва А.С.* Как сделать тавтологии ясными? // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 20–36. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-20-36

Введение

Л. Витгенштейн в одном из писем к Б. Расселу (1913, [Wittgenstein, 2012]) писал: «Как должна быть устроена система знаков, чтобы каждая тавтология распознавалась в ней одним и тем же способом?» Логико-математическая сторона данного вопроса вряд ли сегодня представляет существенный интерес (на протяжении последнего столетия вопрос активно обсуждался в рамках проблемы разрешимости). Однако это никоим образом не принижает философскую значимость проблемы: о каком распознавании говорит Витгенштейн? Идет ли в данном случае речь о приведении формулы к заданному виду или о способности усматривать тавтологии в исхожной формуле?

В этой статье будет рассмотрен второй вариант предложенной альтернативы. Мы увидим, каким образом предлагает усматривать тавтологии теория экзистенциальных графов или теории графов (ЭГ). Теория графов последний логический проект, разаработанный Ч.С. Пирсом. Он вобрал в себя немало логических и философских интуиций американского философа.

Параллель между Пирсом и Витгенштейном неслучайна. Мыслители жили в разные годы на разных континентах, вели разный образ жизни, получили разное образование, размышляли над разными вопросами. Даже на общие для обоих проблемы они смотрели с разных сторон: Витгенштейн изучал проблемы логико-философского анализа языка как философ, а Пирс подходил к этому же вопросу как логик. Логику в самом широком смысле, стоит отметить, американский исследователь понимал как иное название для семиотики. Судьбы мыслителей различны, но тандем, который они, сами того не желая, создали, удивителен. Независимо друг от друга философы двигались, как оказалось, в одном направлении: стремились к максимальной прозрачности и ясности при работе со знаками.

О соотношении идей Пирса и Витгенштейна написано немало работ. Приведу лишь некоторые из них в качестве примера [Dörfler, 2016, Misak, 2016, Nubiola, 1996, Pietarinen, 2005, Pietarinen, 2006]. Настоящая же статья сводится к проблеме, озвученной в первом предложении, хотя для ее решения будут затронуты еще два вопроса, над которыми опять же размышляли оба философа: как построить теорию с минимальным набором логических знаков и что является первичным знаком логической системы. Акцент в статье намеренно смещается в сторону логических решений, предложенных Пирсом. Работа организована следующим образом. В первом разделе дается общее представление о теории ЭГ, а также кратко излагается ее первая часть, во втором — предлагается ответ на вспомогательные вопросы. Решению же проблемы тавтологий посвящен третий раздел.

1. Краткий обзор теории экзистенциальных графов (альфа-графы)

Теория графов — последняя логическая система Пирса. В ней может быть выделено несколько самостоятельных теорий — альфа, бета, гамма, которые по своим дедуктивным возможностям приблизительно соотносятся с пропозициональной логикой, логикой первого порядка, модальными логиками и логикой высоких порядков соответственно [Pietarinen, 2005, Roberts, 1973, Zeman, 1964]. Пирс строит свою теорию геометрическим способом, на что указывает ее базовая единица — граф (рис. 1). Граф — диаграмма, которая соответствует пропозициональному высказыванию, отражающему «любое возможное положение вещей в универсуме» (CP 4.395). Будучи знаком-иконой, он в буквальном смысле позволяет наблюдать за логическими отношениями, так как иконы, по своему определению, отражают объекты в силу своего сходства с последними.

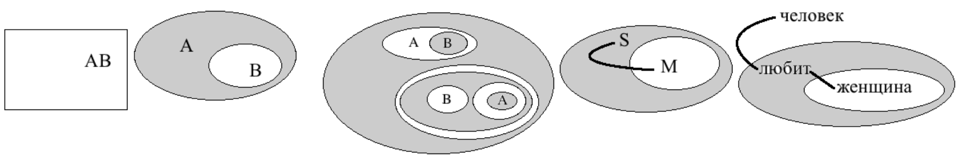

Рис. 1. Примеры графов (а), (б), (в), (г)

Иконичность, однако, не эквивалента визуальности. Подобная ассоциация весьма вероятна, но объясняется она лишь тем, что по большей части мы воспринимаем мир через зрение. Если бы подобное преимущество получил другой орган чувств, иконичность «приравнивалась» бы уже к нему. Например, слепоглухонемые люди улавливают знаки-иконы через тактильные ощущения. Иконичность в первую очередь свидетельствует о сходстве логических структур с реальными условиями, а также о том, что эти структуры мы может наблюдать. Впрочем, любую формулу логики можно рассматривать как знак-икону, отличаться будет только уровень сходства или наглядности.

Так как задача, поставленная в данной статье, решается в рамках первого раздела теории графов, то есть альфа-графов, рассмотрим теорию (синтаксис, интерпретацию и правила преобразования) на базе этого раздела. Уже упоминалось, что за альфа-графами несложно увидеть логику высказываний, хотя прежде всего на них стоит смотреть как на вариант алгебры логики (на базе которой, собственно, исторически теория и строилась).

Синтаксис альфа-графов задают лист утверждений или плоскость, на которой размещаются графы, а также разрезы — замкнутые круговые или овальные линии. Введем несколько базовых определений.

Определение 1. Граф есть диаграмма, размещенная на листе утверждений, и сам лист.

Определение 2. Элементарный граф — граф, не содержащий разрезов.

Определение 3. Подграф — граф, размещенный на листе сам по себе или окруженный другими графами.

Разрезы образуют вложения. Вложения, окруженные четным количеством разрезов или не окруженные ими вовсе, образуют утвердительную область, а окруженные нечетным количеством разрезов — отрицательную (для удобства нечетные области на рисунках затеняются). Вложения не могут пересекаться, но могут погружаться друг в друга. В этом случае возникают последовательности разной глубины или гнезда разрезов.

Определение 4. Вложение — разрез, взятый со своим содержимым.

Определение 5. Гнезда разрезов есть последовательность разрезов, каждый из которых вкладывается в предыдущий. Самым глубоким вложением оказывается элементарный подграф.

Интерпретация графов. Размещение графа на листе равносильно утверждению его истинности. Построенный граф понимается, конечно, не как тождественно истинный (доказательство законов предполагает отдельную процедуру), а как истинный в заданной ситуации. Размещаются графы независимо друг от друга, но в силу особенностей листа утверждений конъюнктивно сочленяются в более сложные графы. Разрезы в теории ЭГ имеют несколько толкований. Самым простым, которым мы и ограничимся в данной работе, является отрицание.

Процедура построения графов не тождественна процедуре его прочтения. Построенный граф необязательно читается так, как это задумывал его создатель, что уже видно на элементарных примерах. Так, граф (а) на рис. 1 допускает две интерпретации: $(A \wedge B)$ или $(B \wedge A)$.

Процедура прочтения предполагает продвижение снаружи внутрь: сначала читается самый внешний элемент, а затем те, что находятся внутри него. Подобный способ называется эндопоретическим[1]. Покажем это на примере графов (б) и (в) рис. 1 (оставшиеся графы на рис. 1 относятся

[1]Подробнее о правилах прочтения графов, а также о множественности интерпретаций одного графа см. [Боброва, 2016], [Боброва, 2019]

к другим разделам теории; в настоящей работе они не рассматриваются, а приводятся лишь в качестве примера).

$$\overline{(A \wedge \bar{B})} \tag{1}$$

$$\overline{(\overline{(A \wedge \bar{B})} \to (A \wedge \bar{B})} \tag{2}$$

При этом эти графы могут интерпретироваться и иначе: формула (3) соответствует графу 1(б), а (4) – 1(в). Понятно, что формулы (1) и (3), а также (2) и (4) попарно эквивалентны.

$$(A \to B) \tag{3}$$

$$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A}) \tag{4}$$

Альфа-графы решают те же задачи, что и любая логическая теория, а принципы их работы определяют три практически симметричные пары правил преобразования или трансформации графов.

Правила трансформации:

1. *РГ* и *УГ*. Любой граф может быть размещен в отрицательной области (область нечетного вложения), а убран из утвердительной области (область четного вложения).

2. *ИГ* и *ДГ*. Любой граф на листе утверждений или в рамках какого-либо гнезда может быть продублирован (итерирован) на уровне исходного вложения или в рамках более глубоких вложений, а граф, полученный в результате такого дублирования, может быть стерт (деитерирован).

3. *РР* и *УР*. Два разреза могут быть как размещены на плоскости, так и удалены из нее, если между ними нет никакого другого графа.

Правила регламентируют базовое отношение в логике — отношение логического следования. Строго говоря, Пирс размышляет не о следовании, а о привычке вывода или руководящем принципе (leading principle), который в любом рассуждении (необязательно дедуктивном) регулирует переход от посылок к заключению. В широком смысле этот принцип можно представить в виде высказывания, «антецедент которого должен описывать все возможные посылки, с которыми он мог бы работать, а консеквент — то, каким образом заключение, к которому он мог бы привести, соотносится с этими посылками» (CP 2.589). В нашем случае понятие руководящего принципа содержательно эквивалентно современному понимаю отношения логического следования: все, что размещается на листе утверждений, принимает оценку «истина», а правила не позволяют переходить от исходных истинных высказываний к ложным.

Самый простой способ убедиться в правомерности правил предлагают базовые равносильности алгебры Буля[2], так как альфа-графы можно рассматривать как алгебру разрезов, о чем пойдет речь в следующем разделе. Некоторые алгебраические законы принимаются тут по умолчанию. Излишними оказываются законы коммутативности и ассоциативности, поскольку не имеет значения порядок расположения и прочтения графов. Остаются в стороне законы де Моргана, так как в теории набор логических связок минимален. Оставшиеся законы охватываются правилами трансформации. Последняя (3) пара правил очевидным образом соответствует законам снятия и введения двойного отрицания. Не менее иконично идею дедукции передает пара (1): $(A \wedge T = A)$ и $(A \wedge F = F)$. Действительно, к нарушению логического следования не приводит ни удаление графа или подграфа из утвердительной области, ни его размещение в отрицательной (из лжи следует все, что угодно). Наибольшую сложность для понимания представляет (2) пара правил, в которой соединяются сразу несколько законов алгебры логики (идемпотентность, поглощение, дистрибутивность), но правомерность и этого перехода понять довольно просто. Забегая вперед, отметим, что правила все же регламентируют отношение следования, а не равенства, от которого Пирс довольно рано отказывается.

Рассмотрим работу правил на двух примерах.

$$(A \vee (B \wedge C)) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{5}$$

$$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), (A \vee B) \models C \tag{6}$$

Обоснованность перехода в первом примере очевидна (рис. 2): после размещения на листе утверждений графа, соответствующего исходной формуле, его можно продублировать (2 ИР). Далее остается убрать B из первой копии, а C из второй (1 УГ). Требуемый результат получен.

Второй случай чуть сложнее (рис. 3). Чтобы получить C после размещения исходных диаграмм, следует избавиться от A и B. Это возможно, если скопировать первый и второй графы внутрь третьего (2 ИГ). После

[2]Выбор алгебры Буля объясняется в том числе и известностью этого раздела логики. Аргументация Пирса, которая из-за ограничений объема в работе не затрагивается, более философична.

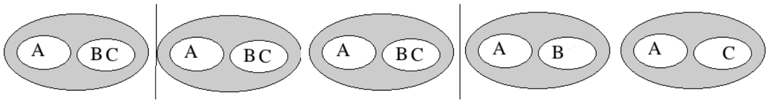

Рис. 2. Пример 1. Дистрибутивность дизъюнкции

удаления ненужных внешних копий (1 УГ) следует цепочка удалений подграфов (2 УИ и 1 УГ) и двойных разрезов (3 УР). Это приводит к искомому результату C.

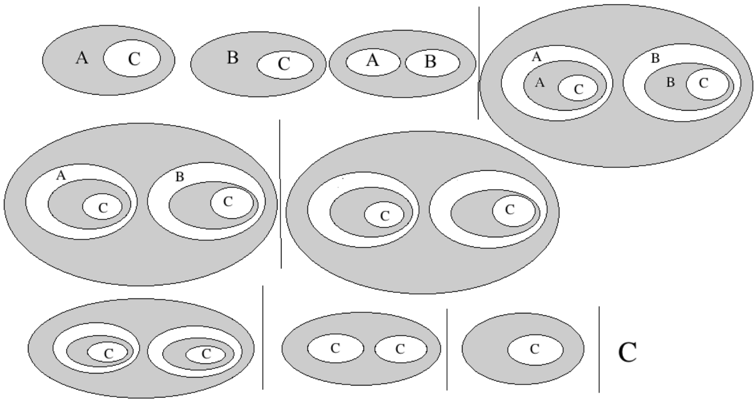

Рис. 3. Пример 2. Дилемма

Процесс получения заключения – творческая процедура: одна диаграмма может приводить к разным заключениям. Это роднит теорию графов с натуральными исчислениями. То же родство в определенной степени подтверждает и принцип доказательства законов. Продемонстрируем эту процедуру на примере (рис. 4).

$$(A \to A) \tag{7}$$

Обоснование законов всегда начинается с размещения двойных разрезов на пустом листе утверждений. В случае простого доказательства закона тождества достаточно одной пары разрезов. На следующем шаге остается разместить A в область нечетного вложения (1 РГ) и итерировать ее внутрь (2 ИГ).

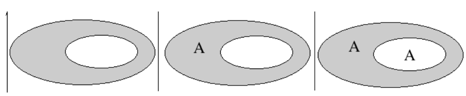

Рис. 4. Пример 3. Закон тождества

Предложенного обзора (детально с теорией можно познакомиться в [Боброва, 2018, Pietarinen, 2005, Roberts, 1973, Zeman, 1964]) достаточно, чтобы перейти к рассмотрению проблем, представленных во Введении.

2. Алгебра разрезов и первичный знак теории

Рассуждая о максимально прозрачной для распознавания тавтологий теории, невозможно обойти стороной вопрос: каков минимальный набор знаков, который позволил бы построить полноценную логическую теорию? Эта проблема важна не только для логики, но и для философии. Витгенштейн подчеркивал: «Решения логических проблем должны быть простыми, так как они устанавливают стандарт простоты» (Тр. 5.4541), а «количество необходимых основных операций зависит только от нашего способа записи» (Тр. 5.474).

Альфа-графы отлично справляются с задачей минимальности: их можно рассматривать как алгебру, уникальным логическим знаком которой является круговой или овальный разрез (подробно см. [Bellucci, Pietarinen, 2016]). В предыдущем разделе было показано, каким образом правила трансформации соотносятся с равносильностями алгебры Буля. Сейчас же стоит обратить внимание на основание предлагаемого сопоставления. Чтобы увидеть алгебру за диаграммами, достаточно заменить разрезы на круглые скобки. К такой замене прибегал, кстати, и сам Пирс. В результате формулы приобретают привычный линейный вид, правда, с иной смысловой нагрузкой скобок: скобки фиксируют отношения однозначным образом, что помогает исключать привычные для алгебраических подходов ситуации, когда расстановка скобок способна изменять смысл формулы.

Таким образом, альфа-графы не просто превращаются в алгебру, а предлагают максимально простой по набору связок вариант такой алгебры. Согласно И. Аннелису, в неопубликованной работе «Булева алгебра с единственной константой» (MS 378) Пирс предложил алгебры не только с NOR-, но и с NAND-операторами (цит. по [Bellucci, Pietarinen, 2016, сноска 1], в опубликованных работах самого Аннелиса подтверждение этому найти не удалось, статья утеряна). К возможности построения теории с одним оператором Пирс приходит через «связку включения» (copula of inclusion), которая появляется в его алгебре логики. Эту связку философ рассматривает как примитивный и функционально полный оператор. Однако в альфа-графах он делает еще один шаг вперед: разрезы или скобки определяют и функцию истинностной оценки формулы, и ее вид, выполняя тем самым роль и логических, и технических знаков.

Обе функции в рамках одного знака удается совместить благодаря листу утверждений, который и задает порядок расположения разрезов. Если пойти еще дальше, то можно увидеть, что из листа утверждений «вырастает» и сам разрез. Разрез представляет собой вырожденную импликацию. Может показаться странным, но именно импликация, а не отрицание или конъюнкция, которые по сути и задают интерпретацию альфа-графов, оказывается первичной или максимально аналитической операцией. Однако тем самым Пирс подтверждает еще одну догадку Витгенштейна: «“$\vee$”, “$\wedge$” и т.д. не являются отношениями в смысле правого и левого. $<\ldots>$ они не являются “первичными знаками” и не обозначают никаких отношений» (Тр. 5.42). Первичность импликации указывает на фундаментальную роль логического следования, так как именно она отражает его основные свойства — антисимметричность и транзитивность.

Пирс довольно рано (уже в 1880 году) отказывается от равенства Буля в пользу импликации, так как последняя по своей природе проще равенства. В ЭГ она выглядит как завиток, который состоит из двух разрезов, один из которых размещается внутри другого, или же одного непрерывного разреза, представленного в виде вывернутой восьмерки (первый и второй графы на рис. 5 соответственно). Антецедент размещается во внешнем отделении, а консеквент — во внутреннем. Появление же самой диаграммы на листе не сложно обосновать правилом введения двойного разреза, которое, стоит заметить, в теории Пирса является дополнительным.

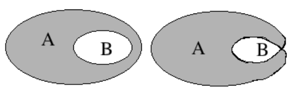

Рис. 5. Импликация

Разрез, указывает Пирс, появляется:

> …вследствие большого количества случаев, когда необходимо выразить утверждение «Если X истинно, то каждое утверждение истинно». $<\ldots>$ Возможно, каждый человек проходит через такую ступень интеллекта, которая может быть названа состоянием райской логики, когда имеет место рассуждение, но ни в утверждениях, ни в выводах не осознается идея ложности. Однако вскоре обнаруживается, что не каждое утверждение истинно. И как только это происходит, если кто-то замечает, что при истинности определенной вещи истинным было бы и каждое утверждение, он моментально отвергает антецедент, кото-

рый ведет к абсурдному консеквенту [Pietarinen, 2015, p. 920, R 669][3].

Чтобы графически показать абсурдность консеквента, Пирс вводит понятие псевдографа (рис. 6): сплошной разрез, не допускающий никаких размещений внутри себя (передает идею тожественной ложности).

Рис. 6. Псевдограф

Как только появляется ощущение, что «не каждое утверждение истинно», граф, представленный на рис. 5, превращается в первый завиток рис. 7. Внутренняя часть завитка затеняется, демонстрируя отсутствие места для дополнительного заключения: «если A истинно, истинно и каждое высказывание». Постепенно псевдограф уменьшается в размерах и превращается в разрез (последняя схема на рис. 7).

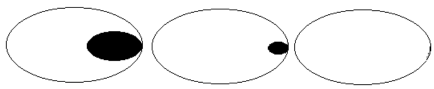

Рис. 7. Возникновение разреза

Очевидно, что для Пирса «отрицание определяется в терминах импликации (как импликация того, что ложно)» [Bellucci, Pietarinen, 2016]. Алгебраически это можно представить следующим образом:$(A \to \perp)$. Импликация дает рождение другим связкам: получив отрицание, несложно через известные эквивалентности задать конъюнкцию и двойственную ей операцию дизъюнкции. Однако этот процесс однонаправленный. Множество связок нельзя свести к имлпикации. Это согласуется как с привычным пониманием логического следования или руководящего принципа, так и с эволюционным принципом, который лежит в основании процедуры порождения негации. Показывая эволюцию разреза (негации), возникающего в процессе рассуждения, «райская импликация» или импликация без отрицания выходит за пределы пропозициональной логики. Впрочем, вопрос обосновая такой импликации — отдельная история, которая явно выходит за задачи настоящей статьи.

[3]Работа представляет собой рукопись Пирса, которую предваряет краткое введение А.-В. Пиетаринена. Скорей всего таким способом Пиетаринен обходит строгие правила журнала в отношении публикации старых работ.

3. Графы и тождественно истинные формулы

Импликативная диаграмма позволяет понять принцип усмотрения тавтологий: любой логический закон может быть представлен как диаграмматическая импликация антецедент и консеквент которой содержат один и тот же подграф. Другими словами, тавтологии соответствует граф, любой из подграфов которого размещается одновременно в четной и нечетной областях одного гнезда разрезов. Исключением, пожалуй, может стать базовая тавтология — лист утверждений. Но и в этом случае, если потребуется, несложно представить на нем импликативную диаграмму, построенную по правилу (3) размещения двойного разреза (присутствие этих разрезов ничего не меняет).

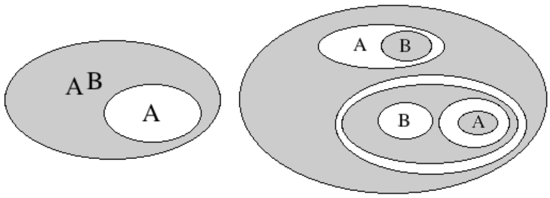

Рис. 8. Примеры тавтологий (а), (б)

Рассмотрим два примера (рис. 8). На первой диаграмме в четной и нечетной областях находится подграф А, а на второй – подграфы А и В. Диаграммы (а) и (б) соответствуют законам исключения конъюнкции (8) и контрапозиции (9).

$$((A \wedge B) \to A) \tag{8}$$

$$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A}) \tag{9}$$

Эндопоретическое прочтение диаграмм дает конъюнктивные формулы, главным знаком в которых является внешнее отрицание.

$$\overline{(A \wedge B \wedge \bar{A})} \tag{10}$$

$$\overline{(\overline{(A \wedge \bar{B})} \wedge (A \wedge \bar{B})} \tag{11}$$

Понятно, что приведенные импликативные и конъюнктивные формулы попарно эквивалентны, хотя конъюнктивные формулы, нельзя не признать, в большей степени демонстрируют свою тождественную истинность.

В данном случае речь, конечно, идет об интуитивном восприятии истинности интерпретатором. Сама по себе истинность графа от способа его прочтения измениться не может. Зная закон непротиворечия, в графах можно увидеть тавтологии. Этот факт подтверждает, что и алгебраические формулы стоит рассматривать как знаки-иконы, правда, менее наглядные (иконичные).

Чтобы сделать тождественную истинность еще более очевидной, стоит воспользоваться методом приведения к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), так как «для того, чтобы формула алгебры логики A была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержала бы переменную и ее отрицание» [Лихтарников, 1999, с. 36]. Если в первом случае ((рис. 8а) достаточно применить закон $\overline{(A \wedge B) \to (\bar{A} \vee \bar{B})}$ (12), то во втором (рис. 8б) к нему добавляются свойства коммутативности дизъюнкции и ее дистрибутивности относительно конъюнкции (13–14).

$$\overline{(A \wedge B \wedge \bar{A})} \leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B} \vee A) \tag{12}$$

$$\overline{(\overline{(A \wedge \bar{B})} \wedge (A \wedge \bar{B})} \leftrightarrow (\overline{\overline{(A \wedge \bar{B})}} \vee \overline{(A \wedge \bar{B})}) \leftrightarrow ((A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \vee \bar{\bar{B}}) \tag{13}$$

$$(\bar{A} \vee B) \vee (A \wedge \bar{B}) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B \vee A) \wedge (A \vee B \vee \bar{B}) \tag{14}$$

Перед нами тавтологии.

Размещение подграфа в области четного и нечетного вложений является достаточным условием для того, чтобы граф соответствовал тождественно истинной формуле. Однако при этом необходимо, чтобы подграф размещался в рамках одного гнезда разрезов. Сформулируем это правило в виде определения.

Определение 6. Граф отражает тавтологию тогда и только тогда, когда в каждом гнезде разрезов какой-либо его подграф размещается одновременно в областях четного и нечетного вложений.

Обоснованность данного определения вытекает из определения гнезда разрезов (5) и правил трансформации. Кроме этого, можно воспользоваться и правилами алгебры логики, как это делалось выше. Эндопоретический способ прочтения альфа-графов позволяет получать конъюнктивные формулы с отрицаниями. Если главным знаком подобной формулы является отрицание, а какая-либо из ее подформул одновременно входит в формулу со знаком отрицания и без него, то перед анми тавтология. Тавтологией будет и соответствующий ей граф. Но именно это условие и будет выполняться, если в рамках произвольного гнезда разрезов какой-либо подграф будет входить в утвердительную и отрицательную области: при интерпретации графа мы получим утверждение и отрицание одного и того же графа, то есть противоречие, которое будет запрещать внешний разрез.

Таким образом, иконичность графов оказывается козырем, которого нет в привычных булевой алгебре и логике высказываний. Она позволяет усматривать тавтологии, что, возможно, даже в большей степени соответствует размышлениям Витгенштейна. Для оценки графа за ним стоит просто понаблюдать. Привычные же для алгебры логики преобразования или построение таблиц истинности оказываются излишними.

Альфа-графы позволяют сформулировать и критерии для проверки тождественно ложных, а также логически недетерминированных формул. Формулам первого типа будут соответствовать графы, содержащие подграф в четной и нечетной областях, но не окруженные общим разрезом. Все остальные графы окажутся в категории логически недетерминированных.

4. Заключение

Раздел альфа теории ЭГ изящно отвечает на вопрос Витгенштейна о тавтологиях: чтобы определить, соответствует ли граф тождественно-истинной формуле или нет, требуется лишь наблюдение. Такой тривиальный способ объясняется не только диаграмматичностью, но и тем, что перед нами теория с минимальным набором логических связок. Фактически единственным знаком оказывается разрез, который, в свою очередь, является вырожденной импликацией.

Вполне предсказуемо, что предложенный алгоритм (в целом) перестает работать на уровне бета-графов, которые по дедуктивным возможностям примерно соответствуют логике предикатов первого порядка с равенством. В системе появляются линии тождества (последние два графа на рис. 1), которые способны ветвиться и пересекаться, а это естественным образом затрудняет их анализ. Максимально наглядное подтверждение можно получить, превратив исходную плоскость в трехмерное пространство. Процедура трансформация графов в таком случае должна будет коррелироваться с принципами топологии (вопросы топологии графов рассматривает [Kauffman, 2001]): графы с одинаковыми истинностными оценками в трехмерном пространстве будут выглядеть одинаково. На уровне бета-графов это невозможно: линии тождества лишают нас возможности свободно крутить граф в пространстве, так как для них оказывается важен порядок их расположения и пересечения. Сегодня над этой проблемой работает Пиетаринен.

Диаграмматическая теория Пирса не совершает логической революции в вопросе разрешимости. Однако вкупе с идеями Витгенштейна она позволяет задуматься над предметом логики, ее основными понятиями и оценить степень самобытности этой дисциплины: чем логика отличается от математики, в чем ее преимущество перед соответствующими лингвистическими исследованиями. Вопрос самоопределения становится для логики тем актуальнее, что в последние десятилетия с привычных позиций ее вытесняют не только математические или лингвистические штудии, но и бурно развивающиеся когнитивные теории, задающие вектор развития наук, с которыми логика традиционно имеет тесные связи (философия, социология, психология и т.п.).

Литература

Боброва, 2016 – *Боброва А.С.* Графы Пирса: особенности их построения и прочтения // Логико-философские штудии. Ежегодник Ассоциации логиков Санкт-Петербурга. Т. 14. СПб.: Изд-во РХГА, 2016. С. 76–90.

Боброва, 2018 – *Боброва А.С.* Диаграмматические теории (Дж. Венн, Ч.С. Пирс) и логическое следование. Учебное пособие. М.: ВАВТ, 2018. 48 с.

Боброва, 2019 – *Боброва А.С.* Обучение графами. Диаграммы Ч.С. Пирса и преподавание логики (в печати).

Витгенштейн, 1994 – *Витгенштейн Л.* Витгенштейн Л. Логико-философский трактат // Витгенштейн Л. Философские работы (часть I) / Пер. с нем. М.С. Козловой и Ю.А. Асеева. Ч. I. М.: Гнозис, 1994. С. 3–73. Цитируется как Тр. с последующим указанием номера части и параграфа.

Лихтарников, 1999 – *Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.* Математическая логика. Курс лекций. М., 1999.

Bellucci, Pietarinen, 2016 – *Bellucci F., Pietarinen A.-V.* Existential Graphs As an Instrument of Logical Analysis: Part I. Alpha // The Review of Symbolic Logic. Vol. 9. No. 2. 2016. P. 209–237.

Bellucci, Pietarinen, 2017 – *Bellucci F., Pietarinen A.-V.* Two Dogmas of Diagrammatic Reasoning: a View from Existential Graphs // Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic /Ed. by K.A. Hull, R.K. Atkins. New York. NY: Routledge, 2017. P. 174–196.

Dörfler, 2016 – *Dörfler W.* Signs and Their Use: Peirce and Wittgenstein. Springer, Cham, 2016.

Kauffman, 2001 – *Kauffman L.* The Mathematics of Charles Sanders Peirce // Cybernetics & Human Knowing. Vol. 8. No. 1–2. 2001. P. 79–110.

Misak, 2016 – *Misak C.* Cambridge Pragmatism: From Peirce and James to Ramsey and Wittgenstein. Oxford University Press, 2016.

Nubiola, 1996 – *Nubiola J.* Scholarship On the Relations Between Ludwig Wittgenstein and Charles S. Peirce // Studies on the History of Logic. Proceedings of the III Symposium on History of Logic / Ed. by I. Angelelli y M. Cerezo. Berlin: Gruyter, 1996. P. 281–294.

Peirce, 1931–1958 – *Peirce C.S.* Collected Papers. Vols. 1–8. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press, 1931–1958. Цитируется как CP с номером тома и параграфа.

Peirce, 1967 – *Peirce C.S.* Peirce C.S. Manuscripts in the Houghton Library of Harvard University, as identified by Richard Robin // Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce. Amherst. 1967. Цитируется как MS или R с номером манускрипта.

Pietarinen, 2005 – *Pietarinen A.-V.* Compositionality, Relevance and Peirce's Logic of Existential Graphs // Axiomathes. No. 15, 2005. P. 513–540.

Pietarinen, 2006 – *Pietarinen A.-V.* Signs of Logic. Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication. Dordrecht: Springer, 2006.

Pietarinen, 2015 – *Pietarinen A.-V.* Two Papers on Existential Graphs by Charles Peirce // Synthese. Vol. 192. No. 4. 2015. P. 881–922.

Roberts, 1973 – *Roberts D.* The Existential Graphs of Charles S. Peirce. The Hague: Mouton, 1973.

Wittgenstein, 2012 – *Wittgenstein L.* Wittgenstein in Cambridge. Letters and documents 1911–1951 / Ed. by B. McGuinness. Oxford: Blackwell, 2012.

Zeman, 1964 – *Zeman J.* The Graphical Logic of C.S. Peirce, dissertation, University of Chicago, 1964. Online edition, 2002. URL: `users.clas.ufl.edu/jzeman/` (дата обращения: 15.01.2019).

Angelina S. Bobrova

How to make tautologies clear?

Angelina S. Bobrova
Russian State University for the Humanities,
6 Miusskaya sq., Moscow, 125993, Russian Federation.
E-mail: angelina.bobrova@gmail.com

Abstract: The paper shows how the first part of Peirce's Existential Graphs theory answers Wittgenstein's question: "how must a system of signs be constituted in order to make every tautology recognizable as such in one and the same way?" Existential Graphs theory or Graphs theory is a diagrammatical system. Its basic unit is a graph or diagram that reminds Euler's diagrams. The first part of the theory, which is alpha, corresponds, approximately, to classical propositional logic. The theory provides graphic or iconic syntax. So, it is clear why Wittgenstein's problem is also solved in an iconic way. Graphs let observe tautologies. No transformations are required to identify a formula type. The possibility to observe tautologies is due to not only the diagrammatical syntax peculiarities but also its minimalism. The cut (it is the boundary of a diagram) is the only sign of the alpha-graphs. It plays both technical and logical functions. The theory is even more concise than approaches with NAND or NOR operators. In light of the talk about tautologies, the paper concerns the problem of cut evolution. The cut is treated as negation, but it is a generated implication. Thus, implication but not negation and conjunction or disjunction is a primitive and most analytic sign. At first glance, it might look strange as the implication is the most complex logical connective. However, the implication tracks the idea of logical consequence and reflects its main properties, such as antisymmetry and transitivity.

Keywords: Existential Craphs theory, Logical diagrams, Peirce, Wittgenstein, tautology

For citation: Bobrova A. "Kak sledat' tavtologii yasnymi?" [How to make tautologies clear?], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 20–36. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-20-36 (In Russian)

References

Bellucci, Pietarinen, 2016 – Bellucci, F., Pietarinen, A.-V. "Existential Graphs As an Instrument of Logical Analysis: Part I. Alpha", *The Review of Symbolic Logic*, 2016, Vol. 9, Issue 2, pp. 209–237.

Bellucci, Pietarinen, 2017 – Bellucci, F. Pietarinen, A.-V. "Two Dogmas of Diagrammatic Reasoning: a View from Existential Graphs", *Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic*, ed. by K.A. Hull, R.K. Atkins. New York, NY: Routledge, 2017, pp. 174–196.

Bobrova, 2016 – Bobrova, A.S. Peirce's Graphs. Grafy Pirsa: osobennosti ikh postroeniia i prochteniia [Peirce's Graphs. Peculiarities of their Construction and Interpretation] *Logiko-filosofskie shtudii* [Logic and philosophy Stidies] 2016, Vol. 14, pp. 76–90. (In Russian)

Bobrova, 2018 – Bobrova, A.S. *Diagrammaticheskie teorii (J. Venn, C.S. Peirce) i logicheskoe sledovanie* [Diagrammatical theories (J. Venn, C.S. Peirce) and logical consequence], Uchebnoe posobie. M.: VAVT, 2018.(In Russian)

Bobrova, 2019 – Bobrova, A.S. *Obuchenie grafami. Diagrammy Ch.S. Pirsa i prepodavanie logiki* [Graphs Studies. Peirce's Diagrams and Logic Courses] (in press) (in Russian)

Dörfler, 2016 – Dörfler, W. *Signs and Their Use: Peirce and Wittgenstein.* Springer, Cham, 2016.

Kauffman, 2001 – Kauffman, L. "The Mathematics of Charles Sanders Peirce", *Cybernetics & Human Knowing*, 2001, Vol. 8, Issue 1–2, pp. 79–110.

Likhtarnikov, Sukacheva, 1999 – Likhtarnikov, L.M., Sukacheva, T.G. *Matematicheskaya logika. Kurs lektsii* [Mathematical logic]. M., 1999. (In Russian)

Misak, 2016 – Misak, C. *Cambridge Pragmatism: From Peirce and James to Ramsey and Wittgenstein*, Oxford University Press, 2016.

Nubiola, 1996 – Nubiola, J. *Scholarship On the Relations Between Ludwig Wittgenstein and Charles S. Peirce* , Studies on the History of Logic. Proceedings of the III Symposium on History of Logic, ed. by I. Angelelli y M. Cerezo. Berlin, Gruyter, 1996, pp. 281–294.

Peirce, 1931–1958 – Peirce, C.S. *Collected Papers.* Vols. 1–8. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press, 1931–1958.

Peirce, 1967 – Peirce, C.S. "Manuscripts in the Houghton Library of Harvard University, as identified by Richard Robin", 1967, *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce.* Amherst.

Pietarinen, 2005 – Pietarinen, A.-V. "Compositionality, Relevance and Peirce's Logic of Existential Graphs", *Axiomathes*, 2005, Vol. 15, pp. 513–540.

Pietarinen, 2006 – Pietarinen, A.-V. *Signs of Logic. Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication.* Dordrecht: Springer, 2006.

Pietarinen, 2015 – Pietarinen, A.-V. "Two Papers on Existential Graphs by Charles Peirce", *Synthese*, 2015, Vol. 192, Issue 4, pp. 881–922.

Roberts, 1973 – Roberts, D. *The Existential Graphs of Charles S. Peirce.* The Hague: Mouton, 1973.

Wittgenstein, 1994 – Wittgenstein, L. Logiko-filosofskii traktat [Tractatus Logico-Philosophicus], *Filosofskie raboty (chast' I)* [Philosophical Papers, Part I], ed. by M.S. Kozlova, Yu.A. Aseev. M.: Gnozis, 1994. pp. 3–73. (In Russian)

Wittgenstein, 2012 – Wittgenstein, L. *Wittgenstein in Cambridge. Letters and documents 1911–1951*, ed. by B. McGuinness. Oxford: Blackwell, 2012.

Zeman, 1964 – Zeman, J. *The Graphical Logic of C.S. Peirce, dissertation.* University of Chicago, 1964. Online edition, 2002. [`users.clas.ufl.edu/jzeman/`, accessed on 15.01.2019].

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 37–51
УДК 162

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 37–51
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-37-51

Н.В. Зайцева

Загадка парадеигмы

Наталья Валентиновна Зайцева
Вероссийская академия внешней торговли.
Российская Федерация, 119285, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4А.
E-mail: natvalen@list.ru

Аннотация: Статья продолжает исследование парадеигмы, или рассуждения на основании примера. Это рассуждение анализируется Аристотелем в «Первой Аналитике», и в риторическом ключе рассматривается как один из способов убеждения — в «Риторике». В предыдущих статьях акцент был сделан на когнитивно-эпистемологической характеристике соответствующей познавательной процедуры, в данной работе в центре внимания оказываются логические характеристики парадеигмы. В первом разделе анализируются соответствующие фрагменты текста Аристотеля и дается краткое изложение когнитивно-феноменологического анализа парадеигмы, устанавливается ее связь с аналогизирующей апперцепцией (аппрезентацией) Гуссерля. В следующем разделе выявляется логическая форма рассуждения на основании примера, показывается его несводимость к другим типам правдоподобных (недедуктивных) рассуждений, таким как обобщающая индукция, аналогия и абдукция. На этом основании выдвигается предположение о том, что прадаеигма представляет собой особый самостоятельный вид правдоподобных рассуждений. В заключительной части статьи рассматривается роль парадеигмы и лежащей в ее основе когнитивной процедуры в логико-философских взглядах Аристотеля. Особое внимание уделяется соответствующей когнитивной процедуре познания первоначал, описываемой Аристотелем во «Второй Аналитике».

Ключевые слова: парадеигма, правдоподобные рассуждения, Аристотель, универсальные когнитивные механизмы рассуждений

Для цитирования: *Зайцева Н.В.* Загадка парадеигмы // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 37–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-37-51

Введение

Строго говоря, с парадеигмой (paradeigma) как особого рода риторическим рассуждением и лежащей в его основе когнитивной процедурой связана не одна, а сразу несколько загадок. Аристотель обращается к этому рассуждению несколько раз, наиболее известные фрагменты содержатся в «Риторике» и «Первой Аналитике» (см. [Аристотель, 1978]). В «Риторике» [Аристотель, 2005] рассуждение на основании примера (известное также как «пример», «параллельное рассуждение» и «парадеигма», paradeigma) выделяется в качестве одного из двух способов убеждения наряду с риторическим силлогизмом (энтимемой) [Аристотель, 2005, 1356b5]. В связи с этим возникает первый вопрос и, соответственно, первая загадочная характеристика парадеигмы: что делает рассуждение на основании примера настолько убедительным, что заставляет Аристотеля придавать ему в процессе аргументации не меньшее значение, чем силлогизму? Следующий вопрос непосредственно связан с первым: какую роль играет рассуждение на основании примера и соответствующая когнитивная операция в логико-философской теории Аристотеля? Наконец, что же представляет собой парадеигма как рассуждение? Какова ее логическая форма, какое место следует ей отвести в современной классификации рассуждений?

Данная статья продолжает мои исследования последних лет. В предыдущих работах я стремилась в первую очередь дать ответ на первый из поставленных вопросов. Эти размышления привели меня к усмотрению определенного соответствия между когнитивной процедурой, лежащей в основе парадеигматического рассуждения, и аналогизирующей апперцепцией (аппрезентацией) Э. Гуссерля. Достаточно подробно обоснование этого соответствия приводится в работе [Зайцева, 2018]. В настоящей статье я хотела бы более подробно рассмотреть парадеигму с логической точки зрения и в определенной степени коснуться ее роли для логико-философской концепции Аристотеля в целом.

Структура работы такова. В следующем параграфе я приведу характеристику парадеигмы Аристотелем и кратко, для придания статье самодостаточности, охарактеризую когнитивные основания этого рассуждения. Во втором параграфе будет предложена реконструкция парадеигмы и рассмотрен вопрос о типе этого рассуждения. В заключительной части будет предпринята попытка обозначить ту роль, которую отводит парадеигме Аристотель в своих силлогистических построениях и более широкой логико-философской концепции.

1. Парадеигма Аристотеля и аппрезентация Гуссерля

Рассуждение на основании примера, как было отмечено выше, рассматривается Аристотелем в «Риторике» как способ убеждения, а в «Первой Аналитике» — в контексте силлогистических рассуждений. В принципе соответствующие фрагменты текстуально очень близки, но в «Первой Аналитике» изложение чуть более подробное и ясное, поэтому далее я преимущественно буду опираться на этот текст. Непосредственно парадеигме посвящена 24 глава 2 книги «Первой Аналитики» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 24, 68b38 – 69a19].

Согласно Аристотелю, «пример приводится, когда доказывается, что [больший] крайний термин присущ среднему через подобие третьему. При этом должно быть известно, что средний термин присущ третьему, а первый — тому, что подобно третьему» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 24, 68b40]. Далее вводятся обозначения, и в целом следуя Аристотелю, позволю себе для удобства восприятия его идеи использовать строчные буквы для обозначения единичных терминов. Пусть А обозначает «зло», Б — «начинать войну с соседями», b — «война афинян с фиванцами», d — «война фиванцев с фокейцами». «Итак, если мы хотим доказать, что вести войну с фиванцами есть зло, то нужно принять, что вести войну с соседями есть зло. Но это становится убедительным из [наблюдения] подобных случаев, например из того, что для фиванцев война с фокейцами есть зло. И так как война с соседями есть зло, а война с фиванцами есть война с соседями, то очевидно, что вести войну с фиванцами есть зло. Поэтому очевидно, что Б присуще b и d (ибо и то, и другое есть ведение войны с соседями). Также очевидно, что А присуще d (ибо фиванцам война с фокейцами не принесла добра); а что А присуще b — это будет доказано через d» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 24, 69a5–10].

Предварительный анализ приведенного фрагмента позволяет выявить следующее. Во-первых, парадеигма подразумевает обоснование большей посылки силлогизма. Во-вторых, делается это через подобие двух (или более) случаев. В приведенном примере таковыми случаями являются две войны — афинян с фиванцами (b) и фиванцев с фокейцами (d). Кроме того, для обоснования общего высказывания (большей посылки последующего силлогизма) «Война с фиванцами есть зло» используется еще одна посылка — единичное утверждение «Война фиванцев с фокейцами есть зло» (d есть А). Таким образом, использование рассуждения на основании примера предполагает два этапа — простой категорический силлогизм и предшествующее ему рассуждение на основании подобия. Условимся именно последнее рассуждение называть парадеигмой в узком смысле.

Далее Аристотель останавливается на специфике парадеигмы. «Таким образом, очевидно, что пример показывает отношение не части к целому и не целого к части, а отношение части к части, когда и та и другая подчинены одному и тому же, но одна из них известна» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 24, 69a15]. Аналогичные фрагменты в «Риторике» звучат чуть по-другому, возможно в силу особенностей перевода. «Пример не выражает ни отношения части к целому, ни целого к части, ни целого к целому, но части к части, подобного к подобному, когда оба случая относятся к одному роду, причем один более известен, чем другой» [Аристотель, 2005, Риторика, 1357b30]. В другом переводе «Риторики» (издательство

«Азбука», Санкт-Петербург, 2000 г.) вместо «относятся к одному роду» использована конструкция «оба случая подходят под одну и ту же категорию случаев».

Во второй книге «Риторики» пример рассматривается уже в более практической, аргументативной плоскости. Здесь Аристотель делает важное различение, на которое, в частности, обращает внимание автор [McCormic, 2014]. Стагирит не просто различает два вида примеров — сообщение о реальном событии и о вымышленном, каковым является притча или басня, — он использует для них разные термины: paradeigma в первом случае и parabole во втором [Аристотель, 2005, Риторика, II, 1393a30]. Таким образом, парадеигма предполагает апелляцию к реальным событиям, а подобие (или отождествление) двух случаев основано на их отнесении к общему роду, или категории.

Последнее соображение интересно соотнести с изложенной в 16-й главе 2-й книги «Первой аналитики» процедурой постулирования оснований. Начинается глава с характеристики постулирования. «Постулирование и принятие начала по роду своему относится к [рассуждению], не доказывающему предложенного...» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 16, 64b30]. Проясняя специфику этой процедуры, Аристотель отмечает, что «начала познаются через самих себя» (см. [Аристотель, 1978, Там же, 64b35]), это «значит постулировать начало, это мы сказали выше, а именно: доказывать то, что не самоочевидно, через него же (а это значит не доказывать)». Трактовка этой процедуры как доказательства приводит к кругу в рассуждениях ([Аристотель, 1978, Там же, 65a1–10]). Постулирование существенным образом основано на тождестве терминов (и соответствующих случаев): «тождественные [термины] присущи одному и тому же, или потому, что одно и то же присуще этим [терминам]...» [Аристотель, 1978, Там же, 65a30]. При этом постулирование должно давать достоверное знание: «Постулирование начала в доказательствах касается того, с чем дело действительно обстоит так-то и так-то» [Аристотель, 1978, Там же, 65a35].

Итак, отождествление двух случаев — нового, относительно которого выносится суждение, и реального прецедента, или образца — играет важную роль в парадеигматическом рассуждении. Недаром одно из значений слова «парадеигма» (парадигма) — «модель или образец».

Как уже отмечалось выше, на мой взгляд, когнитивные основания рассуждения на основании примера могут быть адекватно реконструированы в терминах аппрезентации (аналогизирующей апперцепции), рассмотренной Э. Гуссерлем в «Картезианских размышлениях». Механизм аппрезентации, по Гуссерлю, обеспечивает типизацию объектов окружающего мира через перенос смысловых характеристик с предмета-образца на новый объект. При этом Гуссерль настаивает на том, что аппрезентация не является рассуждением. «Апперцепция не есть вывод, не есть мыслительный акт. Каждая апперцепция, в которой мы с одного взгляда воспринимаем и, фиксируя свое внимание, схватываем заранее данные предметы (к примеру, заранее данный повседневный мир), каждая апперцепция, в которой мы сразу же понимаем их смысл вместе с его горизонтами, интенционально отсылает нас к некому первичному учредительному акту, когда был впервые конституирован предмет, обладающий подобным смыслом» [Гуссерль, 1998, с. 217].

Суть этой процедуры представлена в 51-м параграфе «Картезианских рассуждений» «Удвоение как ассоциативно конституирующий компонент опыта другого». Удвоение представляет собой изначальную форму пассивного синтеза. Два предмета (образец и объект-стимул) даны интенционально как пара, смысловые характеристики членов этой пары перекрываются, что ведет к взаимному перенесению смысла. В результате смысл переносится с образца на новый объект, при этом каждый новый объект в процессе типизации обогащает хранящийся в памяти образец.

Возвращаясь к трактовке парадеигмы, вполне оправданно трактовать подобие двух случаев не как некоторое симметричное отношение, а как отождествление этих случаев на основе распознания в новом объекте стороны или части объекта-образца, пережитого ранее. Скажем, в аристотелевском примере две войны b и d отождествляются как относящиеся к категории Б «война с соседями». Это приводит к пониманию, что именно война с соседями есть зло, что обеспечило негативные последствия (стало их причиной) упомянутой войны фиванцев с фокейцами (d).

Таким образом, как это было отмечено в статье [Зайцева, 2018, с. 21], «когнитивная процедура аппрезентации, включающая (a) удвоение и собственно (b) аппрезентативный перенос на уровне рассуждения, предстает как (a) риторический пример, (b) сопровождающийся для каждого конкретного случая соответствующим силлогизмом».

2. Парадеигма как правдоподобное рассуждение

Аристотель достаточно четко и ясно описывает парадеигму. Более того, в «Риторике» он дает ее обобщенную характристику. К сожалению, русский перевод этого фрагмента не отличается ясностью, в то время как стандартный английский перевод буквально содержит описание логической формы парадеигматического рассуждения. «Энтимемы, основанные на примере, это те, которые ведут от одного или более сходных случаев к общему суждению, а затем обосновывают дедуктивно единичное заключение» [Аристотель, 2005, Риторика, 1402b15] (перевод на русский язык выполнен по [Kennedy, 1991]). Все это позволяет выделить логическую форму этого рассуждения (в узком смысле) следующим образом:

d M-подобно b, d есть P, следовательно, все M есть P.

В рассмотренном выше примере на основании подобия двух войн в том, что обе они — войны с соседями, и утверждения, что одна из них есть зло, делается заключение о том, что всякая война с соседями есть зло. Таким образом, из единичного высказывания и особого рода высказывания о подобии относительно некоторой категории выводится общеутвердительное заключение. Очевидно, что подобное рассуждение нельзя считать дедуктивным. К какому же типу правдоподобных рассуждений можно отнести парадеигму?

Наиболее типичные варианты ответа — это (обобщающая) индукция или аналогия. Рассмотрим их по порядку.

Трактовка парадеигмы как индуктивного рассуждения (наведения) коренится в замечаниях самого Аристотеля по этому поводу. Так, в «Риторике» говорится: «пример есть индукция» (термин epagôgê у Аристотеля переводится и как «наведение», и как «индукция») [Аристотель, 2005, Риторика, 1356b], во «Второй Аналитике» находим, что убеждение осуществляется «посредством примеров, которые суть наведения» [Аристотель, 1978, Вторая аналитика, I, 1, 71a10].

Такое понимание рассуждения на основе примера имеет долгую историю. Характерный пример представляет собой работа [Benoit, 1980], в заглавие которой прямо вынесено утверждение о том, что парадеигма есть риторическая индукция. Автор достаточно подробно рассматривает различные интерпретации рассуждения на основе примера, стремясь обосновать вывод о его индуктивном характере. Однако, даже приходя к такому заключению, автор называет рассуждение на основе примера особой «риторической индукцией», отмечая ее бросающиеся в глаза отличия от стандартного индуктивного обобщения. В более современных исследованиях, например в статье о риторике Аристотеля в Стэнфордской Энциклопедии философии, также констатируется индуктивный характер парадеигмы, правда, без подробного обоснования.

Сам Аристотель, с одной стороны, свидетельствует в пользу такого понимания, с другой стороны, приводит аргументы против индуктивной трактовки парадеигмы. Так, в той же «Риторике» он пишет: «Примерами следует пользоваться после энтимем в виде эпилога, тогда как в начале они похожи на индукцию, а ораторским речам индукция не свойственна» [Аристотель, 2005, Риторика, 1394a10]. Если примеры всего лишь «похожи на индукцию», значит, они ею не являются? Примерно также обстоит дело с парадеигмой и в «Аналитиках». Упоминавшуюся выше 24-ю главу 2-й книги «Первой Аналитики», посвященную анализу рассуждения на основе примера, Аристотель завершает таким выводом: «От наведения пример отличается тем, что наведение доказывает присущность [большего] крайнего термина среднему из всех единичных [случаев] и не умозаключает относительно [меньшего] крайнего термина, пример же умозаключает относительно меньшего термина и доказывает не из всех [единичных случаев]» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 24, 69a16–19].

Как мне представляется, источником некоторой путаницы служат не различия в переводах, а не вполне однозначное изложение мыслей Аристотеля в его же собственных работах. Хорошо известна непростая судьба его рукописей и набросков, обретавших новую жизнь в интерпретации учеников и последователей. Относительно трактовок парадеигмы можно с определенными основаниями предположить, что для Аристотеля, рассматривающего силлогизм и индукцию (наведение) как основные типы рассуждений, энтимема и пример (парадеигма) становятся основными типами убеждения. При этом энтимема представляет собой риторический аналог силлогизма, а пример — такой же аналог наведения, но в сфере риторики.

Во многом ответ на вопрос, является ли парадеигма индуктивным рассуждением, зависит от того, как понимается индукция. Если, как это часто бывает, индуктивные рассуждения понимаются как недедуктивные, правдоподобные, то рассуждение на основе примера должно быть отнесено к таковым. Если же придерживаться более узкого понимания индукции, то с подобной оценкой парадеигмы согласиться уже нельзя. Этому мешают две ее особенности: наличие одной единичной посылки (в принципе таких посылок может быть и больше, но Аристотель прямо указывает, что достаточно и одной) и наличие особой посылки, в которой утверждается подобие двух случаев относительно некоторой категории. Резюмируя, можно сказать, что и в обобщающей индукции, и в индукции «к следующему за», и в исключающей индукции, во-первых, вывод делается не на основании единственного примера, а во-вторых, не используется утверждение о подобии каких-то случаев.

В таком случае, возможно, следует понимать парадеигму как рассуждение по аналогии? Последнее как раз предполагает апелляцию к подобию двух предметов (или систем предметов) и использование в качестве посылки единичного высказывания об одном из них. Такая интерпретация Аристотеля встречается довольно часто. В качестве примера сошлюсь на работу [Contreras, 2015], а также на принятую в российской традиции интерпретацию, восходящую к трудам Маковельского [Маковельский, 2004] и Ахманова [Ахманов, 2002] и продолжающуюся в более современных работах (см., например, [Вольф, 2013]).

Следует отметить, что сам Аристотель использует термин «аналогия» (analogia) в близком к Платону математическом смысле, характеризующем математическую пропорцию, но не рассуждения. Рассуждения по аналогии Стагирит описывает, используя термин «сходство» (homoiotes). Наиболее характерные фрагменты содержатся в «Топике» [Аристотель, 1978, Топика I, 17 и 18, VII, 1]). «Далее следует выведывать на основании сходства, ибо это убедительно и лучше скрывает общее... Хотя этот [прием] сходен с наведением, однако не тождественен ему: в наведении общее принимается на основании единичного, а при указании сходства не получается общее, охватывающее все случаи сходства» [Аристотель, 1978, Топика, VIII, 1, 156b10–17]. И в самом деле, аналогия приводит к единичному заключению, в то время как заключение парадеигмы (в узком смысле) — это общее высказывание. Если же пытаться трактовать парадеигму в широком смысле (состоящую из двух этапов) как рассуждение по аналогии, то тут, напротив, излишним оказывается дедуктивный, силлогистический этап. Таким образом, остается согласиться с автором [Bartha, 2010], замечающим, что рассуждение на основании сходства куда ближе к нашему современному пониманию аналогии, чем парадеигма.

Куда интереснее, на мой взгляд, сравнить парадеигму и абдукцию. На первый взгляд поиск объясняющей гипотезы (inference to the best explanation) куда ближе к рассуждению на основании примера, чем индукция или аналогия. Термин «абдукция» был введен, как известно, Чарльзом Пирсом. Его понимание абдукции претерпевало трансформации. Наиболее известны следующие варианты.

1. Имеется правило, например, «Все бобы из этой корзины – белые», и результат: «Эти бобы белые». Следовательно, «эти бобы из этой корзины».

2. Наблюдается любопытный факт C. Если бы утверждение A было истинным, C было бы само собой разумеющимся. Следовательно, есть основания предполагать, что A истинно.

В современных исследованиях в рамках парадигмы искусственного интеллекта абдукция обобщается до следующей схемы рассуждений:

$C, A \longrightarrow C \ / \ A$ [Aliseda, 2017].

Иногда выделяют множество разновидностей абдуктивных рассуждений, включая в них и аналогию, и парадеигму. Порой, следуя традиции

Пирса, разделяют все рассуждения на дедуктивные, индуктивные и абдуктивные. При таком подходе, наверное, и в самом деле остается считать парадеигму абдуктивным рассуждением, поскольку, как было показано выше, она не относится ни к дедуктивным, ни к индуктивным. Однако если все-таки рассматривать абдукцию не в расширительной трактовке, то принципиальное, на мой взгляд, отличие ее от парадеигмы состоит в следующем. Задача абдукции — предложить объясняющую гипотезу. При этом сама процедура объяснения трактуется в соответствии с дедуктивно-номологической моделью Гемпеля [Aliseda, 2017, p. 222]. Таким образом, абдукция предполагает апелляцию к некоторому законоподобному утверждению, а смысл объясняющей гипотезы состоит в том, что это общее высказывание расширяется так, чтобы включать и те самые любопытные факты. По сути дела, выдвижение такой гипотезы сводится к расширению экстенсионала субъекта общего высказывания. В случае парадеигмы мы получаем абсолютно новое знание без использования каких-то общих высказываний, в противном случае процедуру обоснования больших общеутвердительных посылок силлогизма можно было бы свести к дедуктивному (силлогистическому) получению одних общих высказываний из других, что явно не соответствовало бы интенции Аристотеля.

Возвращаясь к Аристотелю, интересно заметить, что еще до Пирса термин abductio был введен Джулио Пейсом (Julius Pacius) как латинский перевод термина apagoge, использованного Аристотелем для характеристики особого типа рассуждения. Этот тип рассуждений был рассмотрен в Первой Аналитике после описания парадеигмы — глава 24 «Доказательство посредством отведения» [Аристотель, 1978, Первая аналитика, II, 25, 69a20–35]. На это обращают внимание авторы программной статьи [Gabbay, Woods, 2006]. Таким образом, если вести историю выделения абдуктивных рассуждений от Аристотеля, то эти рассуждения принципиально отличаются от парадеигмы.

Итак, рассуждение на основании примера не может быть отнесено ни к индуктивным, ни к абдуктивным рассуждениям, ни к рассуждениям по аналогии. На мой взгляд, парадеигму нельзя в принципе отнести к известным разновидностям правдоподобных рассуждений. Это означает, что в этом случае мы имеем дело с особым типом недедуктивного рассуждения.

Заключение. Парадеигма в логико-философской теории Аристотеля

Можно предположить, что парадеигма играет в логико-философских построениях Аристотеля двойную роль, что связано с ее разными ипостасями. Во-первых, рассуждение на основании примера играет определенную роль в силлогистической теории Аристотеля, во-вторых, оно позволяет обнаружить фундаментальный когнитивный механизм, лежащий в основе этого рассуждения.

Как известно (см. [Бочаров, Маркин, 2013]), силогистика Аристотеля представляет собой особую самостоятельную силлогистическую теорию. В ней неверны законы силлогистического тождества, принимаются не все принципы превращения, верные в традиционной силлогистике, и т. п. Представляется, что рассмотренное выше парадеигматическое рассуждение в определенном смысле может прояснить специфику аристотелевской силлогистики.

Вернемся к логической форме парадеигмы в узком смысле. Одной из посылок является утверждение о подобии двух случаев относительно некоторой категории (свойства). Для удобства записи условимся обозначать логическую форму высказывания вида «a подобно b относительно P» как $a =_P b$, а для логической формы общеутвердительного высказывания использовать стандартную нотацию — SaP. Довольно естественно предположить, что условием для самотождественности произвольного объекта относительно некоторого свойства является его присущность данному объекту, выражаемая единичным высказыванием. Последнее можно выразить как своеобразный «Принцип самоподобия»: если a есть P, то $a =_P a$.

Принятие этого самоочевидного принципа позволяет построить следующее рассуждение:

1. c есть P	– допущение
2. $c =_P c$	– из 1, по Принципу самоподобия
3. c есть P и $c =_P c$	– из 1 и 2
4. PaP	– из 3, по парадеигме
5. если c есть P, то PaP	– из 4, введением импликации

Таким образом, необходимым условием для закона тождества оказывается непустота термина, выражаемая единичным высказыванием о принадлежности предмету соответствующего признака.

В принципе возможно построение теории силлогистического типа с двумя дополнительными дедуктивными постулатами: парадеигмой и принципом самоподобия. В такой теории производным мог бы оказаться принцип введения общеотрицательных высказываний: $a =_S b$, a есть не-P, следовательно, SeP и т. п.

Вторая роль парадеигмы в большей степени связана с лежащей в ее основе когнитивной процедурой. В завершающей «Вторую Аналитику» 19-й главе 2-й книги, озаглавленной «Познание начал», Аристотель фактически обращается все к той же проблеме обоснования общих высказываний.

Но теперь он не останавливается на обосновании как разновидности доказательства или рассуждения, поскольку выше (в 16-й главе 2-й книги «Первой аналитики») эта проблема уже обсуждалась, говоря современным языком, теперь Аристотеля волнует когнитивная составляющая такого обоснования. И эту когнитивную основу он видит в особой способности: «Поэтому необходимо обладать некоторой способностью [познания] (dynamis)... Но такая способность, очевидно, присуща всем животным, ибо они обладают прирожденной способностью различать, которая называется чувственным восприятием» [Аристотель, 1978, Вторая аналитика, II, 19, 99b30–35]. Далее Аристотель поясняет, что имеется в виду под способностью различать: «Другие же, когда они воспринимают чувствами, что-то удерживают в душе. Если же таких [запечатлений] много, то возникает уже некоторое различие, так что из того, что остается от воспринятого, у одних возникает некоторое понимание, а у других нет» [Аристотель, 1978, Там же, 99b39 – 100a3]. И далее, «из единого, отличного от множества, того единого, что содержится как тождественное во всем этом множестве, берут свое начало искусство и наука» [Аристотель, 1978, Там же, 100a10]. Осознавая некоторую расплывчатость приведенных объяснений, Аристотель видит необходимость объяснить еще раз: «В самом деле, если одно, не отличающееся от другого, удерживается, то появляется в душе первое общее (ибо хотя воспринимается единичное, но восприятие есть [восприятие] общего, например человека, а не человека Каллия). Снова останавливаются на этом, пока не удерживается нечто неделимое и общее, например, вместо живого существа такого-то [вида] — живое существо [вообще], и далее таким же образом» [Аристотель, 1978, Там же, 100a15 – 100b5].

Таким образом, убедительность парадеигмы как риторического приема основана на фундаментальной когнитивной способности, которую, в частности, пытался описать Гуссерль через механизм аппрезентации, основанный на генеративном a priori — интенции к отождествлению. Эта способность является не только фундаментальной, но и универсальной, присущей не только человеку, но и другим животным. Аппрезентативный перенос смысла с объекта образца на новый объект, осуществляемый на основании отождествления, оказывается у Гуссерля необходимым условием познания, позволяющим избежать бесконечного разнообразия мира. Аналогично парадеигма Аристотеля может рассматриваться как попытка усмотрения и вербализации первоначал. Выражая универсальный первоначальный принцип познания, легитимизируя операцию наделения смыслом любого объекта на основании пережитого ранее даже единичного случая, парадеигма в узком смысле не может быть отнесена ни к одному из существующих типов рассуждений. Она является условием этих рассуждений, что, собственно, подтверждается Аристотелем, когда он рассматривает рассуждение на основе примера как обосновывающее общую посылку силлогизма.

Фундаментальность и универсальность когнитивной парадеигмы проявляется в том, что подобное рассуждение присутствует в различных системах мышления, основанных на разных понятиях рациональности. В качестве примера можно обратиться к статьям А.В. Смирнова [Смирнов, 2017] и [Смирнов, 2018], в которых анализируется особое рассуждение «кийас-соизмерение» (qiyas). В частности, автор стремится показать, что это рассуждение не является рассуждением по аналогии, как считают большинство комментаторов. «Кийас-соизмерение», так же как и парадеигма, основано на подобии, при этом подобное понимается как наиболее близкое (соизмеримое). «Так устанавливается, что нечто схоже с чем-то другим, причем эта схожесть фиксируется как общность атрибута, как отнесение к общему классу» [Смирнов, 2017, с. 83]. При этом нечто обладает «смыслом», подобным «смыслу» исходного случая» [Смирнов, 2017, с. 84]. Примечательно, что на сходство парадеигмы Аристотеля и особого, «обосновывающего случая «кийас-соизмерения» (qiyas al-illa) обращают внимание и авторы работы [Rahman, Iqbal, 2018]: «Крайне важно отметить, что метод, используемый кийас-аль-илла-формой ко-реляционного вывода, нацелен не на установление сходства между источником и вариацией. Цель состоит в том, чтобы обнаружить общий закон и свойство, общее для обоих случаев, что позволяет вывести некоторое лежащее в основании правило. На самом деле это не пример аналогии сходств, а то, что в наше время называют дедуктивным параллельным рассуждением».

Таким образом, основанная на фундаментальном, универсальном, встроенном (телесно воплощенном) когнитивном механизме, парадеигма представляет собой не просто один из способов риторического убеждения, но и может рассматриваться как вербальное выражение познавательной способности, обеспечивающей саму возможность усмотрения закономерностей в мире.

Литература

Аристотель, 1978 – *Аристотель.* Соч.: в 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978. 687 с.

Аристотель, 2005 – *Аристотель.* Риторика. Поэтика. М.: Лабиринт, 2005. 256 с.

Ахманов, 2002 – *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. 2-е изд., стереотип. М.: Едиториал УРСС, 2002. 316 с.

Бочаров, Маркин, 2013 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Directmedia, 2013. 333 с.

Вольф, 2013 – *Вольф М.Н.* Основания аргументации в раннегреческой философии: аналогия как тип аргументации // Вестник НГУ. Философия. 2013. Т. 11. № 2. С. 110–119.

Гуссерль, 1998 – *Гуссерль Э.* Картезианские размышления. СПб.: Наука: Ювента, 1998. 315 с.

Зайцева, 2018 – *Зайцева Н.В.* Когнитивно-феноменологическая интерпретация риторического примера // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2018. № 45. С. 14–24.

Маковельский, 2004 – *Маковельский А.О.* История логики. Жуковский; М.: Кучково поле, 2004. 480 с.

Смирнов, 2017 – *Смирнов А.В.* О формализации умозаключения в процессуальной логике. Часть I // Философский журнал. 2017. Т. 10. № 4. С. 71–92.

Смирнов, 2018 – *Смирнов А.В.* О формализации умозаключения в процессуальной логике. Часть II // Философский журнал. 2018. Т 11. № 1. С. 5-27.

Aliseda, 2017 – *Aliseda A.* The Logic of Abduction: An Introduction // Springer Handbook of Model-Based Science / Ed. by L. Magnani, T. Bertolotti. Springer Cham., 2017. P. 219–230.

Bartha, 2010 – *Bartha P.* By parallel reasoning. Oxford University Press, 2010. 356 p.

Benoit, 1980 – *Benoit W.L.* Aristotle's example: The rhetorical induction // Quarterly Journal of Speech. 1980. Vol. 66. No. 2. P. 182–192.

Contreras, 2015 – *Contreras A.R.* Analogy and Isomorphism: Philosophy, Mathemafics and Space // 1st World Congree on Analogy. Puebla, Mexico. 2015. 62 p.

Gabbay, Woods, 2006 – *Gabbay D., Woods J.* Advice on abductive logic // Logic Journal of IGPL. 2006. Vol. 14. No. 2. P. 189–219.

Kennedy, 1991 – *Kennedy G.A.* (trans./ed.). Aristotle 'On Rhetoric': A Theory of Civic Discourse. New York/Oxford: Oxford University Press, 1991. 337 p.

McCormic, 2014 – *McCormick S.* Argument by comparison: An ancient typology // Rhetorica: A Journal of the History of Rhetoric. 2014. Vol. 32. No. 2. P. 148–164.

Rahman, Iqbal, 2018 – *Rahman S., Iqbal M.*.Unfolding Parallel reasoning in islamic jurisprudence: Epistemic and Dialectical Meaning in Abu Ishaq al-Shirazi's System of Co-Relational Inferences of the Occasioning Factor // Arabic Sciences and Philosophy. Vol. 28. No. 1. P. 67–132.

Natalia V. Zaitseva

The riddle of paradeigma

Natalia V. Zaitseva
Russian Foreign Trade Acdemy,
4a Pudovkin St., Moscow, 119285, Russian Federation.
E-mail: natvalen@list.ru

Abstract: The article continues the study of paradeigma (parallel reasoning, reasoning based on an example). Paradeigma was considered in detail by Aristotle in Prior Analytics, and in a rhetorical manner — in "Rhetoric" as being one of the two modes of argument. In previous papers, the emphasis was made on cognitive-epistemological interpretation of corresponding cognitive procedure. This paper zeros on the logical characteristics of paradeigma. The first section contains the analysis of the relevant fragments of the Aristotle's text and brief summary of the cognitive-phenomenological interpretation of paradeigma. The aim of the next section was to identify the logical form of reasoning based on an example. It is shown to be non-reducible to other types of plausible (non-deductive) reasoning, such as inductive generalization, analogy and abduction. On this basis, a reasonable assumption is made that pradaeigma is a special independent kind of plausible reasoning. In the final part of the article, the place of the paradeigma and the underlying cognitive procedure in the logical and philosophical views of Aristotle is considered. Special attention is paid to the corresponding cognitive procedure of the first principle grasping, as described by Aristotle in the Posterior Analytics.

Keywords: paradeigma, plausible reasoning, Aristotle, universal cognitive mechanisms of reasoning

For citation: Zaitseva N.V. "Zagadka paradeigmy" [The riddle of paradeigma], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 37–51. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-37-51 (In Russian)

References

Akhmanov, 2002 – Akhmanov, A. C. *Logicheskoe uchenie Aristotelya* [Aristotle's Logical Doctrine]. (2nd ed.). Moscow: Editorial URSS, 2002. 316 pp.(In Russian)

Aliseda, 2017 – Aliseda, A. "The Logic of Abduction: An Introduction", *Springer Handbook of Model-Based Science*, ed. by L. Magnani, T. Bertolotti. Springer Cham., 2017, pp. 219–230.

Aristotle, 1978 – Aristotel'. *Sochineniya v 4 tomakh* [Writings in 4 volumes]. Vol 2. Moscow: Mysl, 1978. 687 pp.(In Russian)

Aristotle, 2005 – Aristotel'. *Ritorika. Poetika.* [Rhetoric. Poetics]. Moscow : Labirint-Press, 2005. 256 pp.(In Russian)

Bartha, 2010 – Bartha, P. *By Parallel Reasoning.* Oxford University Press, 2010. 356 pp.

Benoit, 1980 – Benoit, W.L. "Aristotle's Example: The Rhetorical Induction", *Quarterly Journal of Speech*, 1980, Vol. 66, No. 2, pp. 182–192.

Bocharov, Markin, 2013 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii.* [Syllogistic Theories]. Moscow: Directmedia, 2013, 333 pp. (In Russian)

Contreras, 2015 – Contreras, A.R. "Analogy and Isomorphism: Philosophy, Mathemafics and Space", in: Proc. *1st World Congree on Analogy.* Puebla, Mexico, 2015, 62 pp.

Gabbay, Woods, 2006 – Gabbay, D., Woods, J. "Advice on Abductive Logic", *Logic Journal of IGPL*, 2006, Vol. 14, No. 2, pp. 189–219.

Husserl, 1998 – Gusserl', E. *Kartezianskie razmyshleniya.* [Cartesian Meditations]. St. Petersburg: Nauka: Juventas, 1998, 315 pp. (In Russian)

Kennedy, 1991 – Kennedy, G.A. (trans./ed.). *Aristotle 'On Rhetoric': A Theory of Civic Discourse.* New York/Oxford: Oxford University Press, 1991. 337 pp.

Makovel'skii, 2004 – Makovel'skii, A.O. *Istoriya logiki.* [History of Logic]. Joukowski; Moscow: Kuchkovo pole, 2004. 480 pp. (In Russian)

McCormic, 2014 – McCormick, S. "Argument by Comparison: An Ancient Typology", *Rhetorica: A Journal of the History of Rhetoric*, 2014, Vol. 32, No. 2, pp. 148–164.

Rahman, Iqbal, 2018 – Rahman, S., Iqbal, M. "Unfolding Parallel Reasoning in Islamic Jurisprudence: Epistemic and Dialectical Meaning in Abu Ishaq al-Shirazi's System of Co-Relational Inferences of the Occasioning Factor", *Arabic Sciences and Philosophy*, Vol. 28, No. 1, pp. 67–132.

Smirnov, 2017 – Smirnov, A.V. *O formalizatsii umozaklyucheniya v protsessual'noi logike. Chast' I* [Qiyās as a Formal Proof: the Way the Fuqahā' Argued. Part I], *Filosofskii zhurnal* [Philosophy Journal], 2017, Vol. 10, No. 4, pp. 71–92. (In Russian)

Smirnov, 2018 – Smirnov, A.V. *O formalizatsii umozaklyucheniya v protsessual'noi logike. Chast' II* [Qiyās as a Formal Proof: the Way the Fuqahā' Argued. Part II], *Filosofskii zhurnal* [Philosophy Journal], 2018, Vol. 11, No. 1, pp. 5–27. (In Russian)

Volf, 2013 – Volf, M.N. *Osnovaniya argumentatsii v rannegrecheskoi filosofii: analogiya kak tip argumentatsii* [Foundations of Argumentation in Early Greek Philosophy: Analogy as a Type of Argumentation], *Vestnik NGU. Filosofiya* [Vestnik NSU], 2013, Vol. 11, No. 2, pp. 110–119. (In Russian)

Zaitseva, 2018 – Zaitseva, N.V. *Kognitivno-fenomenologicheskaya interpretatsiya ritoricheskogo primera* [Cognitive-Phenomeniological Interpretation of a Rhetorical Example], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya* [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science], 2018, Vol. 45, pp. 14–24. (In Russian)

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 52–69
УДК 16

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 52–69
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-52-69

А.О. Копылова

Пустые термины в логике У. Оккама: к чему отсылают химеры*

Анастасия Олеговна Копылова
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики».
Российская Федерация, 101000, Москва, Мясницкая, 20.
E-mail: a.o.kopylova@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена проблеме суппозиции терминов в предложениях о вымышленных объектах и их условиям истинности в учении Уильяма Оккама. У. Оккам является одной из главных фигур схоластического номинализма. Его онтологическая позиция достаточно радикальна и предполагает признание *реального* существования только двух типов сущностей — единичных субстанций и качеств. Элиминация универсалий из онтологической системы У. Оккама привела к трансформации существовавших ранее семантических теорий, в частности теории суппозиции. В реконструкции, ставшей классической, суппозиция сближалась с референцией, однако в 2000-е годы К. Дьютил-Новаэш предлагается реконструкция, в рамках которой суппозиция понимается как теория пропозициональных значений. Этот подход предполагает понимание суппозиции как интенсиональной, а не экстенсиональной теории. Одним из ключевых аргументов в пользу данной интерпретации служит суппозиция в предложениях о вымышленных объектах. На наш взгляд, данный аргумент вызывает затруднения. Термин, отсылающий к вымышленным объектам, не может иметь персональную, но лишь простую или материальную суппозицию. Вымышленные объекты У. Оккам называет невозможными. Химера является невозможным объектом, потому что она понимается как то, что составлено из нескольких различных животных. Свойство быть смесью различных животных ведет к тому, что данная вещь должна включать в себя несколько субстанциальных форм, однако это исключено, поскольку то, что имеет больше чем одну субстанциальную форму, не может существовать в мире. Хотя объект является невозможным, термин, который к нему отсылает, может быть как субъектом, так и предикатом предложения. В учении У. Оккама утвердительные предложения о вымышленных объектах всегда будут ложными, так как в мире отсутствуют реально существующие химеры. Это, на наш взгляд, свидетельствует о том, что предложения о невозможных объектах скорее могут быть аргументом для экстенсионального, чем для интенсионального понимания суппозиции.

Ключевые слова: суппозиция, номинализм, вымышленные объекты, условия истинности

* Статья подготовлена в ходе проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Для цитирования: *Копылова А.О.* Пустые термины в логике У. Оккама: к чему отсылают химеры // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 52–69. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-52-69

Введение

Современному исследователю, который задумается над вопросом об онтологическом статусе несуществующих объектов, скорее всего в первую очередь придут на ум имена А. Мейнонга, Б. Больцано, Г. Фреге, Б. Рассела или, скажем, Э. Залты, их стратегии аргументации и способы постановки проблемы. Вопрос об онтологическом статусе таких объектов, как правило, трансформируется в вопрос о возможности референции к ним и условиях истинности пропозиций, содержащих термины, отсылающие к таким объектам. Исследование проблемы обычно происходит в контексте современной аналитической традиции. Цель данной статьи состоит в обращении к схоластическим истокам вопроса об онтологическом статусе вымышленных объектов и возможности референции к ним, а именно к учению одного из самых влиятельных представителей терминизма XIV века Уильяма Оккама. Задачами статьи являются выявление особенностей их суппозиции, а также экспликация условий истинности предложений, содержащих такие термины, в логике У. Оккама.

Широко известно, что У. Оккам является также одной из главных фигур схоластического номинализма[1]. Его онтологическая позиция достаточно радикальна и предполагает признание реального существования только двух типов сущностей — единичных субстанций и качеств, а любые универсалии, согласно его учению, реально не существуют. Позиция У. Оккама в отношении универсалий приводит к различным следствиям внутри его учения: во-первых, он отказывается от достаточно традиционной для своего времени концепции интенционального присутствия [Перлер, 2016], во-вторых, редуцирует систему аристотелевских категорий до двух (субстанций и качеств), в-третьих, в значительной степени изменяет и переопределяет смысл таких классических свойств терминов, как сигнификация (significatio) и суппозиция.

Говоря о роли вымышленных объектов в философии У. Оккама, мы можем рассматривать последние с нескольких позиций: с точки зрения их эпистемологического, метафизического и семантического статуса. Вместе с тем в некоторых случаях онтологическим проблемам сопутствуют семантические решения, семантике в свою очередь предшествуют определенные

[1]Хотя некоторые исследователи относят его скорее к концептуализму. Например, [Brown, 1996].

эпистемологические и метафизические основания, поэтому говорить о них как о полностью независимых постановках вопроса мы не можем. К тому же такое различение подходов несколько анахронично и не вполне соответствует аутентичному делению сочинений схоластов. Точнее было бы сказать, что У. Оккам обращается к проблеме вымышленных объектов в следующих контекстах: в размышлениях о природе концептов и онтологическом статусе универсалий, в теории определения и в теории суппозиции. Соответственно различные аспекты освещаются в трактатах: *Quodlibeta Septem, Ordinatio, Expositio aurea super artem veterem, Summa Logicae 1, Summa Logicae 2* (далее — *SL1* и *SL2*), *Reportatio*. В данной статье рассматриваются семантические аспекты вопроса о природе вымышленных объектов, в частности способность терминов, отсылающих к таким объектам, обладать функцией персональной суппозиции и сигнификации, поэтому вопрос о генезисе концептов вымышленных объектов по большей части остается за ее пределами. По этой причине основными источниками являются *SL1*, *SL2*, *QQ* и в меньшей *Expositio aurea super artem veterem.*

Интерпретация понятий «суппозиция» и «сигнификация» в логике У. Оккама стала предметом продолжительных дискуссий в исследовательской литературе. Среди основных концептуальных подходов к пониманию суппозиции можно выделить следующие: сближение суппозиции с референцией, сближение суппозиции с теорией пропозициональных значений, прагматическая интерпретация суппозиции[2]. В любом из этих подходов признается значимой роль суппозиции для определения условий истинности предложений. Важным для реконструкции теории суппозиции представляется вопрос о том, как возможна суппозиция терминов в предложениях о вымышленных объектах. Затруднения в референции терминов возникают по двум основным причинам: в силу особенностей контекста (например, в модальных или овремененных контекстах) или в силу специфического значения термина (например, в случае терминов, обозначающих вымышленные объекты) [Ashworth, 1977]. Примером термина, обозначающего вымышленные объекты, чаще всего была «химера». Схоласты соглашались между собой в том, что химера — это существо, составленное из частей различных животных, хотя их представление о том, из каких конкретно частей (или субстанциальных форм) оно состоит, менялось. Как от-

[2]Первый подход представлен большим кругом авторов, отдельно можно выделить, например: [McCord Adams, 1987, McCord Adams, 1977, McCord Adams, 1976, Ashworth, 1977, Spade, 1974]. Ко второму подходу можно отнести, например: [Panaccio, 2004]. Третий подход в первую очередь представляет работа [Dutilh Novaes, 2007]. Сближение суппозиции и референции является традиционным. Прагматическая интепретация суппозиции подчеркивает роль говорящего и интепертирующего для использования аппарата суппозиции.

мечает Д. Эшворт, референция к воображаемым объектам в средневековой логике затруднена не просто потому, что их не существует и общие термины соответственно являются пустыми, а потому, что они представлялись невозможными в том же смысле, как «современному читателю представляется невозможным круглый квадрат»[3]. Это связано с тем, что такие объекты, как «химера», истолковывались как предполагающие комбинацию нескольких субстанциальных форм, что нарушало метафизический принцип: то, что имеет больше, чем одну субстанциальную форму, не может существовать в мире[4]. Сама постановка вопроса о возможности обозначения вещей, не существующих в реальности, брала начало в небольшом фрагменте трактата Аристотеля «Об Истолковании»: «Подобно тому как мысль то появляется в душе, [16a10] не будучи истинной или ложной, то так, что она необходимо истинна или ложна, точно так же и в звукосочетаниях, ибо истинное и ложное имеются при связывании и разъединении. Имена же и глаголы сами по себе подобны мысли без связывания или разъединения, например, "человек" или "белое"; когда ничего не прибавляется, нет ни ложного, ни истинного, хотя они и [16a15] обозначают что-то: ведь и «козлоолень» что-то обозначает, но еще не истинно и не ложно, когда не прибавлен [глагол] "быть" или "не быть" — либо вообще, либо касательно времени» [Аристотель, 1983].

Термины, отсылающие к невозможным объектам, для многих средневековых логиков обладали значением, и их следовало отличать от терминов, у которых в принципе не может быть никакого значения, — вроде «скиндапсос» ('skindapsos') [Dewender, 2001].

Суппозиция и условия истинности предложений

Вопрос о том, обладают ли в логике У. Оккама предложения с терминами, отсылающими к вымышленным объектам, истинностным значением или являются бессмысленными, тесно связан с вопросом о том, могут ли такие термины обладать суппозицией и какой именно. Это обусловлено тем, что У. Оккам является одним из авторов, для которых теория суппозиции становится основным инструментом теории истины [Dutilh Novaes, 2011]. Суппозиция представляет собой свойство термина в предложении «стоять вместо чего-то», то есть, иными словами, «указывать на конкретную часть своего референциального значения в высказывании» [Лисанюк,

[3] Хотя предметом рассмотрения Эшворт являются позднесхоластические теории парижских логиков начала XVII века, они, в значительной степени, сохраняют черты общего схоластического представления о вымышленных объектах.

[4] Подробнее см. [Ashworth, 1977, Schierbaum, 2014].

2001]. Главной особенностью свойства суппозиции, отличающей его от свойства сигнификации, является то, что термин может обладать им только в предложении. Сигнификация в свою очередь является более фундаментальным свойством, чем суппозиция.

В первой книге трактата *SL* У. Оккам предлагает следующее определение свойства суппозиции:

«Суппозиция же означает подстановку вместо другого, так что когда термин стоит в высказывании вместо чего-либо (так что мы пользуемся этим термином вместо чего-либо, относительно чего или относительно местоимения, указывающего на то же, этот термин или именительный падеж этого термина, если он стоит в косвенном, сказываются истинно), то он подразумевает это; и все это истинно, по крайней мере тогда, когда термин, который суппонирует, взят сигнификативно»[5].

Иными словами, если термин «взят сигнификативно», то есть обозначает некоторую реальную единичную вещь или качество, то и суппонировать он будет в первую очередь, когда он подразумевает некоторую реально существующую конкретную вещь. То есть объект, который он суппонирует, совпадает с объектом, который он первично обозначает (или сигнифицирует). Важно отметить, что это определение, хотя и представлено как общее, в первую очередь применимо к одному из видов суппозиции, а именно к персональной суппозиции. Именно персональной суппозицией обладает термин, взятый сигнификативно, то есть в его обозначающей функции. Таким образом, персональная суппозиция выделяется У. Оккамом как основная, что радикально отличает его от таких, например, схоластов XII века, как Уильям Шервуд или Петр Испанский, для которых основным подвидом суппозиции была простая, так как она обозначала форму, или универсалию [Ebessen 1981]. У. Оккам отказывается от реального существования универсалий, признавая только реальные единичные субстанции и качества, и потому основным подвидом суппозиции в его системе становится персональная. Как пишет Е.Н. Лисанюк, «Оккам отводит свойству обозначения определяющую роль в процессе квалификации суппозиции термина: по крайней мере, персональная суппозиция оказывается в тесной зависимости от него. Иными словами, Оккам полагает, что каждое слово имеет некоторый базисный смысл (или смыслы — если это слово двусмысленно),

[5][Оккам, 2010, с. 29], [Ockham, 1974c, p. 193]. Dicitur autem suppositio quasi pro aho positio a, ita quod quando terminus in propositione stat pro aliquo, ita quod utimur illo termino pro ahquo de quo, sive de pronomine demonstrante ipsum, ille terminus vel rectus ilhus termini si sit obliquus verificatur, supponit pro illo; et hoc saltem verum est, quando terminus supponens significative accipitur.

по отношению к которому производится поиск актуальных референтов, то есть квалифицируется суппозиция»[Лисанюк, 2001].

В зависимости от типа суппозиции определяется, какой именно части области референциального значения соответствует термин в предложении. Например, в предложении «Человек есть трехсложное слово» термин «человек» обладает материальной суппозицией (потому что обозначает некоторый материально выраженный знак), а в предложении «Человек есть разумное существо» термин обладает персональной суппозицией, потому что обозначает множество реальных людей. Простой суппозицией термин обладает, когда он подразумевает концепт или интенцию души, но не взят сигнификативно. Материальная суппозиция же в свою очередь имеет место, когда термин не взят сигнификативно, но подразумевает слово произнесенное или слово написанное. Суппозицией может обладать любое выражение, стоящее на месте субъекта или предиката предложения. По словам Е.Н. Лисанюк, «поскольку сигнификатом каждого термина являются реально существующие вещи, постольку ни один термин не может обозначать нечто, обладающее иным онтологическим статусом, в сравнении с обозначаемым другим термином; и вообще, раз речь всегда идет о вещах, невозможно рассуждать об их форме и материи как о чем-то действительно актуальным образом различном, потому что в реальности таких дистинкций в самих вещах нет. Следовательно, никакого “неравноправия” между субъект- и предикат-термином в высказывании быть не может, и предикация — это идентификация суппонируемого субъект-термином с суппонируемым предикат-термином, то есть в реальности это есть один предмет»[Лисанюк, 2001].

Иными словами, в предложении «Химера есть нечто» субъект может иметь простую суппозицию — и тогда он отсылает к концепту, или материальную суппозицию — и тогда он отсылает к самому написанному слову «химера». В случае же с персональной суппозицией ситуация оказывается сложнее. Для того чтобы пояснить этот случай, рассмотрим определение сигнификации.

Как в первой книге трактата *SL*[6], так и в трактате *Quodlibeta Septem* [Ockham, 1974c] У. Оккам различает четыре смысла понятия сигнификации. В этой статье нас будет интересовать только первый смысл. В *SL* он формулируется следующим образом: «Во-первых, о знаке говорят как о сигнифицирующем, когда он суппонирует или способен суппонировать некоторую вещь таким образом, чтобы имя (термин) могло посредством глагола “есть” быть предицировано указательному местоимению, отсылаю-

[6] «Significare» multipliciter accipitur apud l o g i c o s [Ockham, 1974c, p. 95].

щему к этой вещи»[7]. Классический пример, который приводит У. Оккам, — «Сократ (есть) белый» («Sortes est albus»).

Если мы говорим о том, что качество «быть белым» сигнифицирует Сократа, значит, предложение «Он бел» должно быть истинно при условии, что указательное местоимение «он» отсылает к Сократу. Пример с белым в этом контексте не кажется случайным выбором У. Оккама. На это, на наш взгляд, есть две существенные причины: первая состоит в том, что «белый» это коннотативный, а не абсолютный термин (подробнее об этом см. ниже), вторая — пример иллюстрирует то, что качество может сигнификативно отсылать лишь к некоторой единичной реальной вещи, а не к универсалии.

Можно привести другой пример: возьмем предложение «Лэси — собака», где то, что собака сигнификативно отсылает к Лэси, означает, что можно сформировать некоторое истинное высказывание «Она собака» и указать на Лэси. Таким образом, упрощенная схема условий истинности предложений выглядит следующим образом: предложение будет истинно, когда субъект и предикат суппонируют одну и ту же вещь.

Термин не обладает возможностью суппонировать (персонально), если речь идет о невозможных объектах, например химерах, так как они не обладают реальным существованием.

Классической интерпретацией суппозиции является ее сближение с референцией, однако в 2000-е годы К. Дьютил-Новаэш предлагает другой концептуальный подход к пониманию теории суппозиции. Нельзя сказать, что он полностью заменил или опроверг предшествующий подход, однако в предложенной интерпретации более явно обозначились некоторые проблемные вопросы оккамовской теории. Главная особенность реконструкции К. Дьютил-Новаэш заключается в том, что суппозиция понимается, как то посредством чего продуцируется набор возможных смыслов предложения. Это, по мнению автора, подчеркивает ее интенсиональный, а не экстенсиональный характер, а точнее, то, что она представляет собой своеобразный гибрид — «экстенсиональную теорию интенсионалов» (extensional theory of intensions). Почему же, если суппозиция есть свойство термина стоять вместо объекта, ее нельзя определить как референцию? На наш взгляд, этот тезис в теории Дьютил-Новаэш обеспечен определением понятия референции в узком смысле как метода однозначного установления референта термина. Соответственно так как в ряде случаев суппозиция оказывается бесполезна

[7]Nam uno modo dicitur signum aliquid significare quando supponit vel natum est supponere pro illo, ita scilicet quod de pronomine demonstrante illudsper hoc verbum «est» illud nomen praedicatur. Et sic <album> significat. Sortem; haec enim est vera «iste est albus» demonstrando Sortem. Sic «rationale» significat hominem; haec enim est vera «iste est rationahs», demonstrando hominem. [Ockham, 1974c, p. 95].

для этой цели, ее, по мнению исследователя, нельзя понимать как референцию, а следует понимать как формальный метод семантического анализа предложений, продуцирующий лишь набор их возможных альтернативных прочтений. Основных концептуальных аргументов в пользу предложенного ею тезиса два:

- Значимость понятия «denotatur» для интенсиональной интепретации суппозиции.

  Термин «denotatur» неоднократно встречается в главах, посвященных суппозиции и возражениям возможных оппонентов против понимания суппозиции Оккамом. К. Дьютил-Новаэш предлагает переводить его как «утверждается» (it is asserted), (посредством предложения нечто утверждается) «указывается» (it is indicated), подразумевается, то есть одно предложение может пониматься в нескольких смыслах и соответственно создается некоторый набор параллельных равнозначных пропозициональных прочтений. Обычно термин употребляется в форме «per istam propositionem “p” denotatur quod. . . » В ложном предложении «Человек есть осел» ни субъект «человек», ни предикат «осел» не являются пустыми, однако пересечение их суппозиций является пустым. Утверждается, что человек суппонирует всех людей и что осел суппонирует всех ослов, однако, поскольку нет общего суппонента между субъектом и предикатом, но утверждается, что таковой должен быть, это предложение является ложным [Dutilh Novaes, 2007]. Похожий эффект возникает в предложениях с пустыми терминами. К. Дьютил-Новаэш пишет, что в предложении «Химера белая» химера ничего не суппонирует, однако подразумевается, что химера нечто суппонирует (в силу того, что предложение является утвердительным), хотя в силу того, что нет ни одной химеры, то, что подразумевается, не имеет места. Таким образом, она приходит к выводу, что в этом случае можно говорить о наличии пустой суппозиции, однако не терминов по отдельности, а их пересечения.

- Значимость понятия «est distignuenda» для интенсиональной интепретации суппозиции.

  Смыслы предложений (например, модальных или овремененных), согласно У. Оккаму, можно различать (est disitinguenda). Различение смыслов предложения возможно не во всех случаях, но тогда, когда возникает эквивокация (например, субъектного термина). Так, предложение «Некоторая белая вещь была белой вчера» может пониматься в двух смыслах: 1. Вещь, которая была белой, была белой вчера, 2. Вещь, которая есть белая, была белой вчера.

Представляется, что интерпретация, предложенная К. Дутил-Новаэш, содержит несколько спорных утверждений. Референция необязательно должна пониматься в узком смысле однозначного установления референта, а тогда не совсем ясно, почему теория суппозиции не может быть экстенсиональной. Кроме того, одним из самых проблематичных моментов в рамках этого подхода является интерпретация суппозиции терминов, отсылающих к невозможным объектам, которая носит, на наш взгляд, экстенсиональный характер.

Условия истинности предложений о вымышленных объектах

У. Оккам рассматривает суппозицию к воображаемым объектам (figmenta) в главе четырнадцатой второй книги трактата SL, выделяя предложения о вымышленных объектах как особую разновидность предложений. Каждому типу предложений соответствуют свои правила установления истинности. У. Оккам сближает предложения о вымышленных объектах с другим типом предложений, описанным им в предыдущей (тринадцатой) главе *SL*, — предложениями, содержащими отрицательные термины. Основанием для этого сближения служит то, что ни тем, ни другим ничто в реальности не соответствует. Вымышленные объекты У. Оккам называет невозможными. Скажем, химера является невозможным объектом, потому что она понимается как то, что составлено из нескольких различных животных. Свойство быть смесью различных животных ведет к тому, что данная вещь должна включать в себя несколько субстанциальных форм, однако это исключено, поскольку то, что имеет больше чем одну субстанциальную форму, не может существовать в мире. Хотя объект является невозможным, термин, который к нему отсылает, может быть как субъектом, так и предикатом предложения. Например, субъектом он может быть в традиционном для схоластов предложении «Химера есть белая вещь», а предикатом — в предложении «Всякий человек есть химера».

Можно ли, в целом, сказать, что предложения, содержащие такие термины, обладают истинностным значением или их следует признать бессмысленными? Ведь объекты являются не просто вымышленными, а невозможными, более того, сам термин «химера» в соответствии со схоластической метафизикой содержит в себе логическое противоречие, каким же образом можно установить истинность такого предложения? Если персональная суппозиция имеет место только тогда, когда термин подразумевает некоторый реальный объект, а интенциональных сущностей У. Оккам не признает, то как вообще можно говорить о том, что вымышленные термины что-то обозначают? Эти вопросы имеют разный характер. Вопрос о генезисе терминов относится к природе концепта и тому, можно ли получить такой концепт путем интуитивного или абстрактного познания, и находится за пределами данной статьи. Вопрос о том, что собой представляют подобные термины, отсылает нас к теории определения и различию между абсолютными и коннотативными терминами, что и будет принципиальным для понимания решения У. Оккамом проблемы установления истинности предложений с такими терминами. Предложенный им анализ условий истинности предложений с терминами, отсылающими к вымышленным объектам, можно реконструировать следующим образом:

1. Предложения данного типа состоят из нескольких составных конструкций, то есть лишь представляются категорическими, а фактически являются сложными (молекулярными) предложениями.
2. Термины, отсылающие к вымышленным объектам, являются коннотативными, а не абсолютными.
3. Коннотативные термины сигнифицируют вторично, а не первично, и ничего не суппонируют.
4. В предложениях данного типа субъект и предикат никогда сигнификативно не суппонируют одну и ту же вещь, следовательно, эти предложения являются ложными [Ockham, 1974c, p. 286], если термины взяты сигнификативно.

В классификации терминов, предложенной У. Оккамом, одним из первых является деление терминов на абсолютные и коннотативные. Хотя вопрос о природе, свойствах коннотативных имен и их роли в ментальном языке продолжает быть дискуссионным [Panaccio, 2004, Spade, 1980]), принято считать, что именно учение о коннотативных именах позволило схоласту редуцировать систему аристотелевских категорий с десяти до двух, обосновать решительный отказ от универсалий и наделить такие термины, как «химера», обозначающей функцией. Абсолютные термины первично сигнифицируют (обозначают) некоторый реальный объект или множество реальных объектов [Ockham, 1974c, p. 35]. Посредством абсолютных терминов обозначается реальная вещь, которая актуально существует или (что принципиально важно) могла бы существовать. Отрицательные и указывающие на отсутствие термины не сигнифицируют ничего, кроме того, что сигнифицировано/может быть сигнифицировано посредством утвердительных терминов. Абсолютные имена не сигнифицируют нечто первично, а нечто вторично; они сигнифицируют только первично. Примерами таких имен могут быть «человек», «животное», «ангел» и другие. Коннотативными являются такие термины, как «справедливый», «белый», «химера» и другие. Они в свою очередь обозначают нечто первично, а нечто вторично [Ockham, 1974c, p. 36]. Имя «белое», таким образом, согласно схоласту, «обозначается следующим предложением»: «нечто, формой чего является белизна», «нечто, обладающее белизной». Все категории Аристотеля, кроме качества и субстанции, в системе логики У. Оккама выражаются коннотативными терминами. Различение между абсолютными и коннотативными терминами поясняется им с помощью выделения двух типов (или смыслов) определений: реального и номинального. Определение первого типа представляет собой сущностное определение (определение, выражающее то, чем вещь является, ее сущностную метафизическую структуру), определение второго типа представляет собой определение, выражающее то, что значит имя. Абсолютные термины обладают реальными определениями[8], в то время как коннотативные термины — номинальными определениями. У любого коннотативного термина может быть только одно номинальное определение. Оно указывает как на первичную, так и на вторичную сигнификацию: на некоторые реальные субстанции, обладающие белизной, — первично и, соответственно, на некоторое качество «быть белым» — вторично[9]. Термин «химера» является коннотативным, а не абсолютным, так как нельзя дать никакого реального определения, которое описывало бы невозможный объект, однако можно сказать, что он представляет собой концепт комбинации составных частей нескольких животных.

В позднем сочинении *Quodlibeta Septem* в третьем вопросе третьего *Quodlibet* У. Оккам высказывает точку зрения, что термин «химера», обладающий персональной суппозицией, невозможен, но возможно, чтобы термин «химера» обладал материальной или простой суппозицией, то есть отсылал к звукосочетанию или знаку письменной речи или к концепту. Когда термин «химера» взят сигнификативно (то есть обладает персональной суппозицией и должен обозначать некоторую единичную вещь в реальности), то о нем нельзя ничего сказать утвердительно. У. Оккам эксплицитно указывает на то, что такой термин не может ни к чему персонально суппонировать [Ockham, 1974c, p. 286], хотя в некотором смысле

[8] Вопрос о том, сколькими реальными определениями в логике Оккама обладает абсолютный термин, остается проблематичным. С одной стороны, Оккам эксплицитно указывает, что абсолютный термин может обладать несколькими реальными определениями (как, например, термин «человек») или не обладать ни одним, с другой стороны, затруднительным является описание взаимосвязи между этими определениями. Например, возможны определения человека: как «Человек есть рациональное животное» или «Человек есть субстанция, состоящая из тела и души».

[9] Отношение первичной и вторичной сигнификации и соответственно отождествление вторичной сигнификации с коннотацией исследователи до сих пор считают проблематичным.

обладает сигнификацией. То есть в некотором смысле термины, отсылающие к невозможным объектам, обладают обозначающей функцией. Однако схоласт делает важное уточнение: нельзя сказать, что подобно тому, как существуют определенные сущности, которые сигнифицируют такие термины, как человек, животное и другие, есть некоторый мир невозможных или несуществующих объектов[10]. Напротив, сигнификация невозможного термина возможна лишь опосредованно через сигнификацию некоторого абсолютного термина, отсылающего к реальной единичной вещи. Точно так же отрицательный термин ничего не сигнифицирует сам по себе, а лишь посредством утвердительного.

Так как термин «химера» не может ничего суппонировать персонально, то У. Оккам делает вывод, что любое предложение, в котором имя «химера» является субъектом или предикатом, взятым сигнификативно, ложное. Оно является таковым, так как включает ложную часть. Например, предложение «Химера — это несуществующий объект» является ложным, поскольку имеет следующие части — «химера есть нечто» и «эта вещь есть несуществующий объект», первая из которых ложнен[11]. Хотя схоласт об этом прямо не пишет, однако можно предположить из представленного им анализа условий истинности таких предложений, что, строго говоря, они представляют собой конъюнкцию нескольких категорических предложений.

В силу указанных причин предложение «Химера есть химера» (в котором субъект и предикат взяты сигнификативно) также является ложным. Несмотря на то что У. Оккам ссылается на Боэция, который утверждал, что «ни одно предложение не является более истинным, чем то, в котором вещь предицирована самой себе»[12], по его мнению, это не каса-

[10][Ockham, 1974c, p. 287]. Unde non est imaginandum quod sicut sunt quaedam entia significata per tales terminos «homo», «animal», «album», «calidum», «longum», «breve» et huiusmodi, ita sunt quaedam non-entia et impossibilia, distincta totahter ab entibus, significata per tales terminos «chimaera», «hircocervus» et huiusmodi, quasi esset unus mundus ex impossibihbus sicut est unus mundus ex entibus. Sed quidquid imaginabile significatur per hoc nomen «chimaera» significatur per aliquem terminum de quo in propositione de inesse vel de possibili praedicatur esse; tamen hoc nomen «chimaera» pro illo non potest supponere.

[11][Ockham, 1974c, p. 287]. Propter quod quaelibet propositio affirmativa, in qua subicitur hoc nomen «chimaera» significative sumptum vel praedicatur, vel aliquid consimile, est falsa de virtute sermonis, quia habet aliquam exponentem falsam. Ista enim est falsa de virtute sermonis «chimaera est non-ens» et quaehbet consimilis, quia quaehbet talis habet istas exponentes «chimaera est aliquid» et «illud est non-ens», quarum prima falsa est.

[12][Ockham, 1974c, p. 287] Et si dicatur: numquid ista est vera «chimaera est chimaera»? Videtur quod sic, eo quod praedicatur idem de se, et B o e t h i u s dicit quod nulla propositio est verior illa in qua idem de se praedicatur: D i c e n d u m est quod de virtute vocis ista est falsa «chimaera est chimaera» si termini supponant significative, eo quod falsum implicatur.

ется предложений с терминами, отсылающими к невозможным объектам. Согласно У. Оккаму, логические тавтологии не всегда являются истинными. Установление ложности такого предложения не является проблематичным, так как оно лишь кажется имеющим форму простого категорического предложения, а на самом деле состоит из нескольких предложений. Экспликация условий истинности предложений с терминами, отсылающими к вымышленным объектам, на наш взгляд, позволяет установить экстенсиональный, а не интенсиональный характер суппозиции таких терминов. Термин «химера» может суппонировать просто или материально (соответственно, концепт или слово), однако не может суппонировать персонально и быть взятым сигнификативно, так как в мире реально не существуют такие объекты, как химеры. Ложность предложения о невозможных объектах обеспечивается тем, что такие предложения включают в себя несколько составляющих частей, как минимум одна из которых является ложной.

Заключение

Предложения о вымышленных объектах, согласно У. Оккаму, всегда являются ложными, если речь идет о персональной суппозиции терминов, отсылающих к таким объектам. Они могут нечто сигнифицировать, то есть обозначать, однако только вторичным образом. Именно поэтому можно говорить о том, что эти термины не являются бессмысленными в отличие от простого набора звуков. Отказавшись от третьего вида сущностей — интенциональных сущностей и различая только реальные и мысленные сущности, Оккам обеспечивает легитимность подобного различения на логическом уровне, а именно с помощью аппарата теории суппозиции. Эта теория позволяет показать, что предложения о вымышленных объектах являются ложными, даже если они построены как тавтологии, например «Химера есть химера».

Литература

Аристотель, 1983 – *Аристотель* Об истолковании. Соч.: в 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978. 687 с.

Лисанюк, 2001 – *Лисанюк Е.Н.* Теория суппозиции в средневековой логике // Verbum. Альманах Центра изучения средневековой культуры при философском факультете СПбГУ. СПб., 2001. No. 2. С. 14–36.

Оккам, 2010 – *Оккам У.* Избранное / Под ред. А.В. Апполонова. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 272 с.

Перлер, 2016 – *Перлер Д.* Теории интенциональности в Средние века. Г.С. Вдовина, пер. с нем. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2016. 472 с.

Ashworth, 2010 – *Ashworth E.J.* Terminist logic // The Cambridge History of Medieval Philosophy / Ed. by R. Pasnau. Cambridge University Press, 2010. P. 146–158.

Ashworth, 1977 – *Ashworth E.J.* Chimeras and Imaginary Objects: A Study in the Post-Medieval Theory of Signification // Vivarium. 1977. Vol. 15. No. 1. P. 57–77.

Brown, 1996 – *Brown D.J.* The Puzzle of Names in Ockham's Theory of Mental Language // The Review of Metaphysics. 1996. Vol. 50. No. 1. P. 79–99.

Dewender, 2001 – *Dewender T.* Ockham and Burley on signification and imaginary objects // Philosophy and Theology in the Long Middle Ages. Brill, 2001. P. 437–450.

Dutilh Novaes, 2007 – *Dutilh Novaes C.* Formalizing Medieval Logical Theories: Suppositio, Consequentiae and Obligationes. Springer, 2007. 316 p.

Dutilh Novaes, 2011 – *Dutilh Novaes C.* Medieval Theories of Truth // Lagerlund H. Encyclopedia of Medieval Philosophy. Springer, 2011. P. 1340–1347.

Ebessen 1981 – *Ebessen S.* Early supposition theory (12th-13th century) // Histoire Épistémologie Langage, 1981. Vol. 3. No. 1. P. 35–48.

Leff, 1975 – *Leff G.* William of Ockham: The Metamorphosis of Scholastic Discourse. Manchester University Press, 1975. 666 p.

McCord Adams, 1976 – *McCord Adams M.* What Does Ockham Mean by 'Supposition'? // Notre Dame Journal of Formal Logic, 1976. Vol. 17. No. 3. P. 375–391.

McCord Adams, 1977 – *McCord Adams M.* Ockham's Nominalism and Unreal Entities // Philosophical Review, 1977. Vol. 86. No. 2. P. 144–176.

McCord Adams, 1987 – *McCord Adams M.* William Ockham. University of Notre Dame Press, 1987. 1402 p.

Nuchelman, 1973 – *Nuchelman G.* Theories of the Proposition. North Holland, 1973. 309 p.

Ockham, 1974a – *Ockham W.* Part I of the Summa Logicae tr. M. Loux, Ockham's Theory of Terms, Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1974. 235 p.

Ockham, 1974b – *Ockham W.* Summa Logicae / Ed. by P. Boehner, G. Gál and S. Brown. St. Bonaventure: Franciscan Institute, 1974.

Ockham, 1974c – *Ockham W.* Opera Philosophica / Ed. by Gedeon Gál et al. The Franciscan Institute, 1974-88. Vol. 1. 800 p.

Ockham, 1998 – *Ockham W.* Part II of the Summa Logicae.tr. Fredosso. Ockham's Theory of Propositions. St. Augustine Press, 1998. 220 p.

Panaccio, 2004 – *Panaccio C.* Ockham on Concepts. Ashgate, 2004. 210 p.

Schierbaum, 2014 – *Schierbaum S.* Ockham's Assumption of Mental Speech. Brill, 2014. 276 p.

Spade, 1974 – *Spade P.V.* Ockham's rule of supposition: Two conflicts in his theory // Vivarium. 1974. Vol. 12. No. 1. P. 63–73.

Spade, 1980 – *Spade P.V.* Synonymy and equivocation in Ockham's mental language // Journal of the History of Philosophy. 1980. Vol. 18. No. 1. P. 9–22.

Pelletier, 2012 – *Pelletier J.* William Ockham on Metaphysics: The Science of Being and God. Brill, 2012. 352 p.

Weingartner, 2000 – *Weingartner P.* Basic Questions on Truth. Kluwer Academic Publishers, 2000. 230 p.

Anastasia O. Kopylova

Empty terms in W. Ockham's logic: what is the reference for chimaeras

Anastasia O. Kopylova
National Research University
Higher School of Economics,
Myasnitskaya, Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: a.o.kopylova@gmail.com

Abstract: The paper is devoted to the problem of supposition of terms in the propositions about imaginary objects and the conditions of their truth values in the doctrine of William of Ockham who was a leading figure of the scholastic nominalism. His rather radical ontological position acknowledges the existence of no more than two types of essences: unitary substances and qualities. Being devoid of the universals, the Ockhamist doctrine implied the transformation of the previously elaborated semantic theories, including the theory of supposition. In the reconstruction of Ockham's thought that became classical, the supposition closely approached the reference; however, in 2000s C.Dutilh-Novaes proposed the interpretation of supposition as a theory of propositional meanings. This approach brings forth the understanding of supposition as an intensional rather than extensional theory. One of the crucial arguments for this reconstruction is based on the application of supposition in the propositions about imaginary objects. According to our view, this argument is not free from some drawbacks. The term that makes the reference to the imaginary objects can have only simple or material supposition but not a personal one. W. Ockham names imaginary objects impossible objects.Chimaera is an impossible object, because it is considered as something which is combined of parts of different animals.That's why it should contain several substantial forms, which leads to contradiction with the metaphysical principle of the uniqueness of the substantial form. In Ockham's doctrine affirmative propositions about imaginary objects are always false since chimeras do not possess real existence. This observation implies that propositions about imaginary objects are more adequately squared with the extensional rather than intensional interpretation of supposition.

Keywords: supposition, nominalism, fictional objects, truth-conditions

For citation: Kopylova A.O. "Pustye terminy v logike U. Ockhama: k chemu otsylayut khimery" [Empty terms in W. Ockham's logic: what is the reference for chimaeras], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 52–69. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-52-69 (In Russian)

Acknowledgements. The article chapter was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program and funded by the Russian Academic Excellence Project '5-100'.

References

Aristotel', 1983 – Aristotel'. *Ob istolkovanii. Sochienie v 4 tomakh* [About interpretation. Writing in 4 volumes]. Moscow: Mysl', 1983. 687 pp. (In Russian)

Ashworth, 2010 – Ashworth, E.J. "Terminist logic", in: *The Cambridge History of Medieval Philosophy*, ed. by R. Pasnau. Cambridge University Press, 2010, pp. 146–158.

Ashworth, 1977 – Ashworth, E.J. "Chimeras and Imaginary Objects: A Study in the Post-Medieval Theory of Signification", *Vivarium*, 1977, Vol. 15, No. 1, pp. 57–77.

Brown, 1996 – Brown, D.J. "The Puzzle of Names in Ockham's Theory of Mental Language", *The Review of Metaphysics*, 1996, Vol. 50, No. 1, pp. 79–99.

Dewender, 2001 – Dewender, T. "Ockham and Burley on signification and imaginary objects", in: *Philosophy and Theology in the Long Middle Ages*. Brill, 2001, pp. 437–450.

Dutilh Novaes, 2007 – Dutilh Novaes, C. *Formalizing Medieval Logical Theories: Suppositio, Consequentiae and Obligationes*. Springer, 2007. 316 pp.

Dutilh Novaes, 2011 – Dutilh Novaes, C. "Medieval Theories of Truth", in: *Encyclopedia of Medieval Philosophy*, ed. by H. Lagerlund. Springer, 2011, pp. 1340–1347.

Ebessen 1981 – Ebessen, S. "Early supposition theory (12th-13th century)", *Histoire Épistémologie Langage*, 1981, Vol. 3, No. 1, pp. 35–48.

Leff, 1975 – Leff, G. *William of Ockham: The Metamorphosis of Scholastic Discourse*. Manchester University Press, 1975. 666 pp.

Lisanyuk, 2001 – Lisanyuk, E.N. "Teoriya suppozitsii v srednevekovoi logike" [Medieval supposition theory], *Verbum*, Al'manakh Tsentra izucheniya srednevekovoi kul'tury pri filosofskom fakul'tete SPbGU. Saint-Petersburg, 2001, No. 2, pp. 14–36. (In Russian)

McCord Adams, 1976 – McCord Adams, M. "What Does Ockham Mean by 'Supposition'?", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1976, Vol. 17, No. 3, pp. 375–391.

McCord Adams, 1977 – McCord Adams, M. "Ockham's Nominalism and Unreal Entities", *Philosophical Review*, 1977, Vol. 86, No. 2, pp. 144–176.

McCord Adams, 1987 – McCord Adams, M. *William Ockham*. University of Notre Dame Press, 1987. 1402 pp.

Nuchelman, 1973 – Nuchelman, G. *Theories of the Proposition*. North Holland, 1973. 309 pp.

Ockham, 1974a – Ockham, W. *Part I of the Summa Logiae tr. M. Loux, Ockham's Theory of Terms*. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1974. 235 pp

Ockham, 1974b – Ockham, W. *Summa Logicae*, ed. by P. Boehner, G. Gál and S. Brown. St. Bonaventure: Franciscan Institute, 1974.

Ockham, 1974c – Ockham, W. *Opera Philosophica*, ed. by Gedeon Gál et al. The Franciscan Institute, 1974-88, Vol. 1. 800 pp.

Ockham, 1998 – Ockham, W. *Part II of the Summa Logiae. tr. Fredosso. Ockham's Theory of Propositions*. St. Augustine Press, 1998. 220 pp.

Ockham, 2010 – Ockham, W. *Izbrannoe* [Elected], ed. by A.V. Appolonova. Ed. 2nd. Moscow: Knizhnyi dom "Librokom", 2010. 272 pp. (In Russian)

Panaccio, 2004 – Panaccio, C. *Ockham on Concepts*. Ashgate, 2004. 210 pp.

Perler, 2016 – Perler, D. *Teorii intentsional'nosti v Srednie veka* [Medieval intentionality theories]. Moscow: Izdatel'skii dom «Delo» RANKhiGS, 2016. 472 pp.

Schierbaum, 2014 – Schierbaum, S. *Ockham's Assumption of Mental Speech*. Brill, 2014. 276 pp.

Spade, 1974 – Spade, P.V. "Ockham's rule of supposition: Two conflicts in his theory", *Vivarium*, 1974, Vol. 12, No. 1, pp. 63–73.

Spade, 1980 – Spade, P.V. "Synonymy and equivocation in Ockham's mental language", *Journal of the History of Philosophy*, 1980, Vol. 18, No. 1, pp. 9–22.

Pelletier, 2012 – Pelletier, J. *William Ockham on Metaphysics: The Science of Being and God*. Brill, 2012. 352 pp.

Weingartner, 2000 – Weingartner, P. *Basic Questions on Truth*. Kluwer Academic Publishers, 2000. 230 pp.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 70–87
УДК 160.1+167.7

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 70–87
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-70-87

Vladimir Vasyukov

Quantum categories for quantum logic

Vladimir Vasyukov
Institute of Philosophy of RAS,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: vasyukov4@gmail.com

Abstract: The paper is the contribution to quantum toposophy focusing on the abstract orthomodular structures (following Dunn-Moss-Wang terminology). Early quantum toposophical approach to "abstract quantum logic" was proposed based on the topos of functors $[\mathsf{E}, \mathsf{Sets}]$ where E is a so-called orthomodular preorder category — a modification of categorically rewritten orthomodular lattice (taking into account that like any lattice it will be a finite co-complete preorder category). In the paper another kind of categorical semantics of quantum logic is discussed which is based on the modification of the topos construction itself — so called *quantos* — which would be evaluated as a non-classical modification of topos with some extra structure allowing to take into consideration the peculiarity of negation in orthomodular quantum logic. The algebra of subobjects of quantos is not the Heyting algebra but an orthomodular lattice. Quantoses might be apprehended as an abstract reflection of Landsman's proposal of "Bohrification", i.e., the mathematical interpretation of Bohr's classical concepts by commutative C*-algebras, which in turn are studied in their quantum habitat of noncommutative C*-algebras — more fundamental structures than commutative C*-algebras. The Bohrification suggests that topos-theoretic approach also should be modified. Since topos by its nature is an intuitionistic construction then Bohrification in abstract case should be transformed in an application of categorical structure based on an orthomodular lattice which is more general construction than Heyting algebra — orthomodular lattices are non-distributive while Heyting algebras are distributive ones. Toposes thus should be studied in their quantum habitat of "orthomodular" categories i.e. of quntoses. Also an interpretation of some well-known systems of orthomodular quantum logic in quantos of functors $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ is constructed where QSets is a quantos (not a topos) of quantum sets. The completeness of those systems in respect to the semantics proposed is proved.

Keywords: Quantum logic, quantum conditional, quantos, polynomial exponentiation, quantum sets

For citation: Vasyukov L. "Quantum categories for quantum logic", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 70–87. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-70-87

1. Introduction

If following M. Dunn, L. Moss and Z. Wang [Dunn et al., 2013] we divide the history of quantum logic into three eras or "lives" then the first life featuring Birkhoff and von Neumann's algebraic approach in the 1930's should be called "concrete quantum logic" [Birkhoff, Neumann, 1936]. It was the period of the atomic, non-distributive, orthomodular Hilbert lattice of projections on an infinite dimensional Hllbert space. The second life that began in the late 1950's and blossomed in the 1970's should be called "abstract quantum logic" because focusing on the abstract orthomodular structures. And the third life of recent developments in quantum logic coming from its connections to quantum computation and should be called "computational quantum logic".

But this qualification is not accurate since in modern literature we can find investigations dealing both with category theory and quantum logic that impell us to speak of one more life of quantum logic — "categorical quantum logic". Here the subject may be the categorical (topos) foundations for theories of phisycs (cf. e.g. [Isham, Doring, 2007]), sometimes it is the logic of strongly compact closed categories with biproducts [Abramsky, Duncan, 2004], the category of sheaves over a quantaloid (a quantum topos) (cf. [Crane, 2007]) etc. In case of "topos quantum logic" (*quantum toposophy*) we face with the explotation both "concrete" and "abstract" quantum logic approaches.

In particular, in [Landsman, 2017, p.461] the topos under consideration is a topos $\mathsf{T}(A)$ of functors $\underline{F}\colon \mathfrak{C}(A) \to \mathsf{Sets}$, i.e., $\mathsf{T}(A) = [\mathfrak{C}(A), \mathsf{Sets}]$ where A is a unital C*-algebra (in Sets), with associated poset $\mathfrak{C}(A)$ of all unital commutative C*-subalgebras $C \subset A$ ordered by inclusion. $\mathfrak{C}(A)$ is regarding as a (posetal) category, in which there is a unique arrow $C \to D$ iff $C \subseteq D$ and there are no other arrows. Since for any poset X we have an isomorphism of categories $[X, \mathsf{Sets}] \simeq \mathsf{Sh}(X)$, then we obtain $\mathsf{T}(A) \simeq \mathsf{Sh}(\mathfrak{C}(A))$. Moreover, for any small category C an internal C*-algebra in the associated presheaf topos $[\mathsf{C}^{op}, \mathsf{Sets}]$ is given by a contravariant functor $\underline{A}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{CA}$, where CA is the category that has C*-algebras as objects and homomorphims as arrows (but this is not true for internal C*-algebras on sheaf toposes $\mathsf{T} = \mathsf{Sh}(X)$).

More abstract approach is proposed in [Vasyukov, 1989], [Vasyukov, 2005] by means of the topos of functors $[\mathsf{E}, \mathsf{Sets}]$ where E is a so-called *orthomodular preorder category* — modification of a categorically rewritten orthomodular lattice (taking into account that like any lattice it will be a finite co-complete preorder category). In fact, this a lattice preorder category with the functor rendering the orthocomplementation properties. More formally:

Definition 1. An ortho preorder category E is a preorder category equipped with the contravaruant functor $\underline{\mathrm{N}}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ such that

(i) E *has an initial object* 0 *and a terminal object* 1;

(ii) E *has finite products* $\langle -, - \rangle$ *and finite co-products* $[-.-]$;

(iii) $\underset{\sim}{N}^2 a \cong a$ *for any object* a *in* E;

(iv) $\langle a, \underset{\sim}{N}a \rangle \simeq 0, [a, \underset{\sim}{N}a] \simeq 1$ for any object a in E;

(v) $\underset{\sim}{N}[a, b] \simeq \langle \underset{\sim}{N}a, \underset{\sim}{N}b \rangle, \underset{\sim}{N}\langle a, b \rangle \simeq [\underset{\sim}{N}a, \underset{\sim}{N}b \rangle]$ *for any two objects* a, b *in* E.

An ortho preorder category E *is an orthomodular preorder category when in addition the following condition is satisfied:*

(vi) *if* $a \to b$ *is an arrow in* E *then* $[a, \langle \underset{\sim}{N}a, b \rangle] \simeq b$ *for any two objects* a, b *in* E.

It is instructive that K. Landsman in his book "Foundations of Quantum Theory" [Landsman, 2017] writes that the topos-theoretic approach to quantum mechanics from his point of view encompasses quantum logic. But he at once remarks that if one adheres to the doctrine of classical concepts, then quantum logic turns out to be intuitionistic and hence distributive, rather than orthomodular. This is tightly connected with Bohr's doctrine of classical concepts that in the systems to which the quantum mechanical formalism is to be applied their quantum mechanical treatment will for this purpose be essentially equivalent with a classical description.

Landsman's proposal of "Bohrification", i.e., the mathematical interpretation of Bohr's classical concepts by commutative C*-algebras, which in turn are studied in their quantum habitat of noncommutative C*-algebras, suggests that topos-theoretic approach also should be modified. Noncommutative C*-algebras are more fundamental structures than commutative C*-algebras. The same concerns orthomodular lattices which are more general than Heyting algebras underlined intuitionistic logic — orthomodular lattices are non-distributive while Heyting algebras are distributive ones. Since topos by its origin is an intuitionistic construction then "Bohrification" in this case should be transformed in an application of categorical structure based on orthomodular lattice. Toposes thus should be studied in their quantum habitat of "orthomodular" categories.

The construction of the topos $[\mathsf{E}, \mathsf{Sets}]$ where E is a categorically treated orthomodular lattice from [Vasyukov, 2005] would be regarded, in a sense, as an embedding of quantum logic (based on orthomodular lattice) into intuitionistic universe since Sets is a topos. Does we always need an intuitionistic universe as the basis of quantum logic considerstions? More natural seems the exploitation of categories having quantum logic as its inner structure. There are formulations of quantum set theories (cf., e.g. [Takeuti, 1981]) which differ from classical ZF set theory and this allows one to think that such sets does not generate a topos. In this case $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ (where QSets is a category of quantum sets) does not be a topos and the interpretation above fails.

Following this line the construction of *quantos* is introduced which would be evaluated as a non-classical modification of topos with some extra structure allowing to treat the peculiarity of negation in quantum logic. The category QSets turns out to be a quantos and it is proved that the category $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ be a quantos too. The systems of quantum logic are intrpreted in both types of quantoses in more natural way then it was done in case of $[\mathsf{E}, \mathsf{Sets}]$. In a sense, quantoses should be considered as a quantum categorical universe for quantum logic considerations.

The well-known Goldblatt's, Nishimura's and Cutlend-Gibbins' systems of quantum logic are interpreted in a topos $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$. This interpretation is extended to the system of quantum logic by G. Hardegree with Sasaki arrow playing the role of quantum conditional.

2. Quantoses

To interpret quantum logic in more natural way we will introduce a special kind of non-standard categories more suitable for interpretation of quantum logics because of their "orthomodular" structure.

A *quantos* should be considered as a topos equipped with some additional structure. One might equally exploit the name "quantum topos" or "orthomodular topos" which are more informative on the peculiarities of its inner structure.

Definition 2. A quantos Q is a topos which is also complementary closed and orthomodular one.

Complementary closedness here means that

(i) *for any object a of Q there is an object a' such that*

for any arrow $f : a \to d$ of Q we have a mono $f' : a' \to d$, $a'' \cong a$,

for any arrow $g : a \to b$ of Q there is an arrow $g : b' \to a'$;

(ii) $a + a' \cong 0, a \times a' \cong 1$ *(with, possibly, binary coproducts and products) for any object a in Q;*

(iii) $(a + b)' \cong a' \times b', (a \times b)' \cong a' + b'$ *for any two objects a, b in Q.*

Othomodularity means that

(iv) *for any pair of objects a, b of Q there are objects*

$a \supset_1 b \cong (a' \times b) + (a' \times b') + (a \times (a' + b))$

$a \supset_2 b \cong (a' \times b) + (a \times b) + ((a' + b) \times b')$

$a \supset_3 b \cong a' + (a \times b)$

$a \supset_4 b \cong b + (a' \times b')$

$a \supset_5 b \cong (a' \times b) + (a \times b) + (a' \times b')$

such that

$a \supset_i b \cong b^a$ $(1 \leq i \leq 5)$.

The last point gives us a "polinomial exponentiation" in Q because we will have five evaluation arrows $ev : a \supset_i b \times a \to b$ $(1 \leq i \leq 5)$.

Proposition 1. *In quantos* Q *the collection* $Sub(d)$ *of all* Q*-arrows that are monic with* d *as codomain is an orthomodular lattice.*

Proof. Since any quantos Q is a topos then for any object d in Q the collection $Sub(d)$ of all Q-arrows that are monic with d as codomain will be preordered bounded lattice. The points (i)–(iii) of the definition 2 transform this collection into ortholattice (cf. [Dalla Chiara, Giuntini, 2002, p. 137]) and point (iv) leads to $Sub(d)$ be an orthomodular lattice (cf. [Dalla Chiara, Giuntini, 2002, p. 142]). ■

It is easily can be seen that in quantos we have $Sub(d) \cong Hom(d, \Omega)$ and thus $Hom(d, \Omega)$ will be an orthomodular lattice. But in this case the problem arises concerning the category Sets. The matter of fact is that in Sets we have $Sub(D) \cong \mathcal{P}(D)$ where $\mathcal{P}(D) = \{x : x \text{ is a subset of the set } D\}$. Since $\mathcal{P}(D)$ is a Boolean algebra of subsets and not the orthomodular lattice of sets, then we come to the conclusion that *Set* cannot be a quantos. But according to [Dalla Chiara, Giuntini, 2002, p. 144] (using the dual version of the theorem) or lemma 2.1.1 from [Vasyukov, 2005, p. 39] a lattice $E^+ = (E^+, \subseteq, ^*)$ of *-closed quasi-hereditary sets is an orthomodular lattice of sets and thus there are some sets which form such an algebra. So, either such sets generates the subcategory QSets of Sets or Sets is, in a sense, a subcategory of QSets.

G.Takeuti [Takeuti, 1981] in 1981 has been developed an important application of quantum logic to set theory. He constructed an orthomodular-valued model for set theory where the set of truth-values is supposed to have the algebraic structure of a complete orthomodular lattice instead of complete Boolean algebras in case of the usual Boolean-valued models. The standard axioms of set theory hold in orthomodular-valued model only in restricted form. Since the collection of all sets, plus $\varnothing, V, \cap, \cup, ^C$ (where $V = \{x : x = x\}$ and

$x^C = \{y : y \notin x\}$) form in ZF a complete Boolean algebra then it is easy to check that an algebra of sets in Takeuti's quantum set theory will be an orthomodular lattice. Then it seems attractive to consider category QSets as a category whose objects are exactly sets from an orthomodular-valued model.

Proposition 2. QSets *is a quantos.*

Proof.[Sketch of proof] For any set I we will have an orthomodular lattice of *-closed quasi-hereditary subsets $(I^+, \subseteq, ^*, \varnothing, [I))$ where $I^+ \subseteq \mathcal{P}(I)$. If we consider inclusion functions as arrows then we can define $[x) \leq [y)$ iff $[x) \hookrightarrow [y)$ and put $[x)' = [x)^*$ for complementary closedness. Thus, we can conclude that in QSets we have $Sub(d) \cong \mathcal{P}(d)$ and $Sub(d)$ will be an orthomodular lattice and so do $\mathcal{P}(d)$. But in this case we cannot take 2 as the classifying object exploiting the property that $\mathcal{P}(d) \cong 2^d$ because this gives rise to the Boolean algebra of characteristic arrows as in Sets. Moreover, we need to take into account that we deal with the orthomodular-valued sets in the universe V^E which is constructed as $V^E = \bigcup\limits_{\nu \in On} V(\nu)$, where

$V(0) = \varnothing$;

$V(\nu+1) = \{g : g \text{ is a function and } Dom(g) \subseteq V(v) \text{ and } Rang(g) \subseteq E)$;

$V(\lambda) = \bigcup\limits_{\nu < \lambda} V(\nu)$, for any limit-ordinal λ.

($Dom(g)$ and $Rang(g)$ are the *domain* and the *range* of function g, respectively)

It means that given an orthomodular universe V^E for any formula α we should define the truth-value $\|\alpha\|^\sigma$ in a complete orthomodular lattice E as induced by any interpretation σ of the variables in the universe V^E. Hence, for any $y \subseteq d$ unlike the usual definition of the characteristic arrow $\chi_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in y \\ 0, & \text{if } x \notin y \end{cases}$ in Sets we have $\chi_y(x) = \|x \in y\|^\sigma = \bigvee\limits_{g \in Dom(\sigma(y))} \{\sigma(y)(g) \wedge \|x = z\|^{\sigma[z/g]}\}$ in QSets (cf. [Dalla Chiara, Giuntini, 2002, p. 177]). This means that as the classifying object in QSets we should take not the two-element Boolean algebra but an orthomodular lattice E.

So, we have $\mathcal{P}(d) \cong E$ together with the function $true : 1 \to E$ (such that $true(\varnothing) = 1$) playing the role of the subobject classifier in QSets. Also we have respectively an arrow $false : 1 \to E$ (such that $false(\varnothing) = \varnothing$). ■

Now we define truth-arrows in quantos in general case. Let us Q will be a quantos with the subobject classifier $true : 1 \to \Omega$. Then the negation $\neg : \Omega \to \Omega$ will be the unique arrow for which the diagram

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "false"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

will be the pullback in Q. Thus, $\neg = \chi_{false}$. Given $f : a \rightarrowtail d$, the orthocomplement of f (relative to d) is the subobject $f' : a' \rightarrowtail d$ whose character is $\neg \circ \chi_f$. Thus f' is defined to be the pullback

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\neg \circ \chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

of $true$ along to the $\neg\circ\ \chi_f$, yielding $\chi_{f'} = \neg\circ\ \chi_f$, by definition.

Since quantos is a topos then conjunction truth-arrow will be defined standardly:

$\cap : \Omega\times\Omega \to \Omega$ is a character of the product of arrows $\langle true, true\rangle : 1 \to \Omega\times\Omega$ in a quantos Q.

As to the disjunction arrow then it is not a primitive and should be defined by means of negation and conjunction arrows.

Finally, we can define conditional taking $\supset : \Omega \times \Omega \to \Omega$ in the usual way as a character of the monic $e : \circledast \rightarrowtail \Omega \times \Omega$, which is an equalizer of the pair

$$\Omega \times \Omega \underset{pr_1}{\overset{\cap}{\rightrightarrows}} \Omega$$

where pr_1 is a projection on the first member of the product $\Omega \times \Omega$. But since our conditional is defined via polynomial exponentials then we, as consequnce, will have not one but five conditionals.

3. Interpretation of Quantum Logic in quantoses

R. Goldblatt in his paper *Semantic analysis of orthologic* [Goldblatt, 1974] treats logics as not a set of well-formed formulas but as the collection of their ordered pairs satisfying certain closedness condition. Logics of such a type he calls binary ones. They are characterized by the class of orto-, orthomodular lattices in terms of $A \vdash B$ iff $v(A) \leq v(B)$ where v is a function from the set of well-ordered formulas into an ortholattice in which connectives $\neg$ and $\wedge$ are interpreted as an orthocomplementation and a lattice meet respectively. His system O of orthologic characterized by the class of ortholattice is defined by means of the following axiomatics:

Axioms. (1) $\alpha \vdash \alpha$ (2) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$
(3) $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ (4) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
(5) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$ (6) $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta$

Rules. (7) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$ (8) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$
(9) $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$

Here $\alpha \vdash \beta$ means informally that β can be inferred from α.This notation can be extended to $\Gamma \vdash \alpha$ where Γ is a set of well-formed formulas and putting that $\Gamma \vdash \alpha$ iff for some $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Gamma$ we have $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n \vdash \alpha$.

One can pass from an orthologic O to quantum orthologic OM which is characterized by the class of orthomodular lattices while employing the definition $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ and adding to O one more axiom

(10) $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \vdash \beta$

Regarding Goldblatt's binary relation as an analogue of Genten's natural deduction H. Nishimura [Nishimura, 1980] elaborated sequential system GO for orthologic and GOM for quantum logics with $\wedge$ and $\neg$ as the primitive connectives. His formulation of GOM is as follows:

Axioms. $\alpha \vdash \alpha$

Rules.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi, \Gamma \to \Delta, \Sigma}\ (\text{extension}) \qquad \frac{\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha \quad \alpha, \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{cut})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to) \qquad \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\neg \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\neg\Delta \to \neg\Gamma}\ (\to \neg)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\neg \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \neg\neg\alpha}\ (\to \neg\neg)$$

We come to the sequential system GOM by adding to GO the following rule:

$$\frac{\neg\beta \to \neg\alpha \quad \alpha, \beta \to}{\neg\alpha \to \neg\beta}\ (OM)$$

The cut-elimination theorem fails for GO and GOM but the following claim is true: if the sequent $\Gamma \to \Delta$ (where Δ is not empty) is provable then for some $\alpha \in \Delta$, $\Gamma \to \alpha$ is provable too. This claim leads, in particularly, to the normalization theorem which is proved for both systems.

Unfortunately, it is known that Nishimura's calculus have two defects:

1. in quantum logic connectives $\wedge$ and $\vee$ usually are dual ones while this is not true for Nishimura's calculus (sequential calculus is dual iff for all finite Γ and Δ we always obtain $\vdash \Gamma \to \Delta$ iff $\vdash \Gamma^* \to \Delta^*$ where for α we obtain α^* by replacing $\wedge$ with $\vee$and the other way round; for a set Γ of formulas we obtain dual set $\Gamma^* = \{\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ but we need to take into account that such replacing in case of quantum logics supposes the choise of just one of the connectives $\wedge, \vee$ as a primitive).

2. this calculi is non-regular in that sense that the condition $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \to \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ iff $\Gamma_1 \wedge \cdots \wedge \Gamma_n \to \Delta_1 \vee \cdots \vee \Delta_n$ fails.

N.J. Cutland and P.F. Gibbins [Cutland, Gibbins, 1982] proposed a regular sequent calculus of quantum logic which is free of those shortcomings but in which unlike Nishimura's calculus the usual cut- rule is not accepted.

Axiomatics of their system $GO^\dagger$ which is an extension of Nishimura's system GO is as follows:

Axioms. $\alpha \vdash \alpha$

Rules.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Theta, \Gamma \to \Delta, \Sigma}\ (\text{extension})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha, \Delta_1 \quad \alpha \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{cut-1}) \qquad \frac{\Gamma_1 \to \alpha \quad \Gamma_2, \alpha \to \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta}\ (\text{cut-2})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to) \qquad \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta}\ (\to \wedge)^\dagger \qquad \frac{\alpha \to \Delta \quad \beta \to \Delta}{\alpha \vee \beta \to \Delta}\ (\vee \to)^\dagger$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}\ (\to \vee)^{\dagger} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}\ (\to \vee)^{\dagger}$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma, \neg\alpha \to}\ (\neg \to)^{\dagger} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\neg\Delta \to \neg\Gamma}\ (\to \neg)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\neg \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \neg\neg\alpha}\ (\to \neg\neg)$$

Rules with the sign † are specific rules of $GO^{\dagger}$. We obtain the system of quantum logic $GO^{\dagger}M$ by adding Nishimura's rule of orthomodularity, that is $GO^{\dagger}M = GO^{\dagger} + (OM)$.

To describe an algebraic semantic of all those calculi we need to introduce some concepts.

Firstly consider the concept of *hereditary sets* in an orthomodualr lattice E. For any element p the hereditary set $[p)$ is defined by the equality
$[p) = \{q : p \leq q\}$.

An orthocomplementation $^{\perp}$ in E is an involutive permutation where $b^{\perp} \leq a^{\perp}$ whenever $a \leq b$ $(a, b \in E)$. It is known (cf. [Birkhoff, 1967]) that in orthomodular lattices an every interval $[a, b]$ is an orthomodular lattice closed under $\wedge, \vee$ and relative complementation $c' = (a \vee c^{\perp}) \wedge b = a \vee (c^{\perp}) \wedge b$. For the hereditary sets an upper limit of interval is 1 and therefore $c' = (p \vee c^{\perp}) \wedge 1 = p \vee c^{\perp}$. Hence, the set E^{+} of all hereditary sets will be the set of orthomodular lattices.

To transform the lattice $E^{+} = (E^{+}, \subseteq)$ into an orthomodular lattice we need to define an orthocomplementation. In fact, this procedure should specify an involutive operation on E^{+}. From the definition of orthocmplementation it follows that if $c' = p \vee c^{\perp}$ then $c' \in [p)$. Thus it seems natural to define $[p)'$ as a set of such c that $c' \in [p)$. In this case $p \leq c^{\perp}$ but this is exactly the definition of an orthogonality relation since it is specified by the request that $a \perp b$ whenever $a \leq b^{\perp}$. It is known that the relation of orthogonality is symmetric and irreflexive.

Now we define $x \perp Y$ iff for any $y \in Y$, $x \perp Y$ and then introduce an operation * by means of the definition:

(i) $[p)^{*} = \{x : x \perp [p)\}$.

A set X is to be called *closed relative to* * if $(X^{*})^{*} = X$.

But from the definition (i) it follows that $[p)^{*} = \varnothing$ because $1 \in [p)$ and $x \perp 1$ if $x \leq 0$ i.e. $x = 0$. To avoid this let us modify the definition of hereditary sets in the following way: $[p) = \{q : p \leq q \ \&\ q \neq 1\}$.

Such sets usually are called *quasi-hereditary* ones but in order not to overburden the terminology we retain the original term (of heredutary sets). It is easy to reformulate all previous definitions taking into consideration the limitation accepted.

Lemma 1. *A lattice $E^+ = (E^+, \subseteq, ^*)$ of *-closed hereditary sets is an orthomodular lattice.*

Proof. A partially ordered by inclusion set of hereditary sets is a bounded distributive lattice whose meets and joins are specified by respective set-theoretical operations $\cap$ and $\cup$ Hence, $(E^+, \subseteq, ^*)$ will be a lattice with respect to $\cap$ and $\cup$. Then in virtue of closedness under *, symmetry and irreflexivity of the orthogonality relation $\perp$, $[p) \to [p)^*$ will be an involution while $(E^+, \subseteq, ^*)$ be an ortholattice (cf. [Birkhoff, 1967]). Since an every distributive lattice is a modular one and every modular ortholattice is an orthomodular one then $(E^+, \subseteq, ^*)$ will be an orthomodular lattice too.

Observe, that resulted ortholattice will be, in fact, a Boolean algebra. But we can also define E^+ as a non-distributive orthomodular lattice. To that end we can take advantage of the following definition:

$X \sqcup Y = (X^* \cap Y^*)^*$.

It is known that in general case $(X^* \cap Y^*)^* > X \cup Y$. It is easy to see that $(E^+, \subseteq, \sqcup, \cap, ^*)$ is an ortholattice. A necessary and sufficient condition for orthomodularity of E^+ is the following: if $[x) \subseteq [y)$ and $[x)^* \cap [y) = \varnothing$ then $[x) = [y)$. The proof of the satisfiability of dual condition in E^+ would be found in [Beran, 1984, p. 171]. In fact, we have been obtained a construction which is dual to Janovitz's embedding [Beran, 1984, p. 173]. ■

Note, that in proof of the lemma 5 in fact two lattices E_1^+ and E_2^+ are figured, the former of which is a distributive while the latter is a non-distributive one. In the sequel we will be mean by E^+ the latter.

Lemma 2. *A lattice $[p)^+$ of all *-closed hereditary sets in $[p)$ is an orthomodular lattice.*

Proof. It is sufficient to put $[c)^*_p = [c)^* \cap [p)$. Then in respect to that operation an interval $[\varnothing, [p)]$ will be an orthomodular lattice (cf. [Birkhoff, 1967]). ■

The relational semantics of all calculi above is described by means of the notions of ortho-, quantum frames and models.

Definition 3. *An orthoframe is a pair $\langle X, \perp\rangle$, where*

1. *X is a non-empty set,*
2. *$\perp$ is an orthogonality relation on X.*

Definition 4. *An orthomodel is a triple $\langle X, \perp, v\rangle$, where*

1. *$\langle X, \perp\rangle$ is an orthoframe,*
2. *v is a function assigning to each propositional variable p a *-closed subset $v(\alpha) \subseteq X$.*

Definition 5. *A quantum frame is a triple $\langle X, \perp, \Psi\rangle$, where*

1. *$\langle X, \perp\rangle$ is an orthoframe,*
2. *Ψ is a non-empty cillection of *-closed subsets of X such that*

   (a) *Ψ is closed under set intersection and the operation *,*
   (b) *for any $Y.Z \in \Psi$, $Y \subseteq Z$ and $Y * \cap Z = \varnothing$ implies $Y = Z$.*

Definition 6. *A quntum model is a 4-tuple $\langle X, \perp, \Psi, v\rangle$ where*

1. *$\langle X, \perp, \Psi\rangle$ is a quantum frame,*
2. *v is a function assigning to each propositional variable p a *-closed subset $v(\alpha)$ from Ψ.*

It is easily to be seen that in role of the collection of *-closed subsets of X in an orthomodular lattice E^+ would be chosen especially since the condition (b) from the definition 9 is satisfiable in E^+ (this follows from the fact that in ortholattices $a \leq b$ & $a^\perp \wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ is the necessary and sufficient condition of orthomodularity (cf. [Birkhoff, 1967])).

The quantum model should be defined as a model $M = \langle E^+, v\rangle$ with the quantum frame E^+ (here E^+ substitutes for the notation $\langle E, \perp, E^+\rangle$) where $v : \Phi \to E^+$ is some E-valuation and Φ is a set of propositional formulas. A valuation $v : \Phi_0 \to E$ of the system OM in orthomodular lattice E assigning to an every propositional letter π_i some truth-value $V(\pi_i) \in E$. It uniquely would be extended in a following way

(1) $v(\neg\alpha) = v(\alpha)^\perp$;
(2) $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)\rangle$;

to the function $v : \Phi \to E$. The sentence α such that $v(\alpha) = 1$ for every E-valuation v is called E-valid and this is denoted as $E \models \alpha$.

Theorem 1. *For any orthomodular lattice E we have $\vdash_{OM,GOM,GO^{\dagger}M}$ α iff $E \models \alpha$.*

Proof. From left to right we check immediately E-validity of all OM-axioms and rules (GOM, $GO^{\dagger}M$). For obtaining the proof of the claim from right to left we putting into the correspondence to each element x of an algebra E the hereditary set $[x)$. Thus, we obtain an algebra E^{+} which will be an orthomodular lattice. Then we define E^{+}-valuation as a function $v_c : \Phi_0 \to E^{+}$ by means of the formula valuation $v_c(\pi_i) = [v(\pi_i))$. The rest is standard. ■

Let us define now an interpretation of the system considered above in an arbitrary quantos Q. The truth-value in quantos we will call an arrow of the type $1 \to \Omega$ and the collection of all such Q-arrows will be the set $\mathsf{Q}(1, \Omega)$.

Q-valuation will be a function $V : \Phi_0 \to \mathsf{Q}(1, \Omega)$ assigning to an every propositional variable π_i some truth-value $V(\pi_i) : 1 \to \Omega$. This function apparently might be extended to the set Φ of all formulas:

(a) $V(\neg\alpha) = \neg \circ V(\alpha)$;

(b) $V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ \langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$;

Thus, we extend the valuation V in such a way that to each sentence α corresponds some Q-arrow $V(\alpha){:}1 \to \Omega$. Q-validity of α (which is denoted $\mathsf{Q} \models \alpha$) means that $V(\alpha) = true : 1 \to \Omega$ for all V.

Since in quantos we have $Sub(d) \cong Hom(d, \Omega)$ then $Sub(d) \cong \mathsf{Q}(d, \Omega)$, i.e. bringing into correspondence with some subobject f its character χ_f we transfer the structure of orthomodular lattice from $Sub(d)$ on $\mathsf{Q}(d, \Omega)$. The connection between quantos semantics and theory considered as in case of Heyting algebra (cf. [Goldblatt, 1979]) consists in that for any quantos

$\mathsf{Q} \models \alpha$ iff $\mathsf{Q}(1, \Omega) \models \alpha$ iff $Sub(1) \models \alpha$

Hence, the validity in any quantos Q is equal to the validity in orthomodular lattice $\mathsf{Q}(1, \Omega)$ and $Sub(1)$. This implies the following theorem:

Theorem 2. *If $\vdash_{OM,GOM,GO^{\dagger}M}$ α then for any quantos Q we have $\mathsf{Q} \models \alpha$.*

Proof. Let α be some $OM-, GOM-, GO^{\dagger}M$-theorem. Then α is valid in orthomodular lattice by the theorem 11. In particular, $\mathsf{Q}(1, \Omega) \models \alpha$ from where $\mathsf{Q} \models \alpha$ according to the previous claim. ■

In orthomodular lattice an introduction of implication as conditional connective is problematic by many reasons (cf. [Dalla Chiara, Giuntini, 2002, p.

146]). One of the best approximation for a material conditional in quantum logic is so-called *Sasaki arrow* (or *Sasaki hook*) which was originally proposed by P. Mittelstaedt and P.D. Finch and was further investigated by G. Hardegree. Sasaki arrow is usually introduced by the following definition:

(SH) $a \to_S b = a^{\perp} \vee (a \wedge b)$

In fact, it is an algebraic counterpart of our $a \supset_3 b$. Sasaki arrow has the following interesting properties [Hardegree, 1981, p. 4]:

(c1) if $a \leq b$ then $a \to_S b = 1$;

(c2) $a \wedge (a \to_S b) \leq b$;

(c3) $b^{\perp} \wedge (a \to_S b) \leq a^{\perp}$;

(c4) $a \wedge b^{\perp} \leq (a \to_S b)^{\perp}$;

(c5) there is a binary operation $+$ such that for any a, b, c we have $a + b \leq c$ iff $a \leq b \to_S c$.

An operation $+$ would be defined in orthomodular lattice by means of the following identity:

(S) $a + b = (a \vee b^{\perp}) \wedge b$

In essence, (c5) corresponds the residuation $a \wedge b \leq c$ iff $a \leq b \to c$ in Boolean and Heyting algebras which allows to consider them categorically as Cartesian closed finitely cocomplete preorder categories. But it is easily can be seen that in orthomodular lattice one might also define exponentiation with Sasaki arrow playing the role of exponential.

Lemma 3. *An orthomodular lattice with Saski arrow categorically should be considered as Cartesian closed finitely cocomplete preorder category.*

Proof. One might take as exponential Sasaki arrow from the definition (SH). An evaluation arrow $ev : (a \to_S b) \to b$ is defined according to (c2). From (c5) we obtain that for any arrow $g : c + a \to b$ there is an arrow $\hat{g} : c \to (a \to_S b)$ (here $+$ is an operation from (S)). But $c \leq a \to b$ implies $c \wedge a \leq a \wedge (a \to b)$ (the isotone property of $\leq$) hence an existence of $\hat{g}$ implies an existence of the arrow $c \times a \to (a \to_S b) \times a$. By the property of $\wedge$ we have $c \leq (c \vee a^{\perp})$ and then in virtue of the isotone property of $\leq$ we have $c \wedge a \leq (c \vee a^{\perp}) \wedge a$ but in categories this leads to an occurence of an arrow $c \times a \to c + a$.

In fact, we obtain a diagram

$$\begin{tikzcd}
(a \to_S b) \times a \arrow[r, "ev"] & b \\
c \times a \arrow[u] \arrow[r] & c + a \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

In virtue of the transitivity of $\leq$ from $c \times a \leq c + a, c + a \leq b$ we obtain $c \times a \leq b$ i.e. we rebuild the diagram to exponential one required. Hence, an orthomodular lattice categorically is Cartesian closed in respect to Sasaki arrow. ■

G. Hardegree in [Hardegree, 1981] proposed a system of orthomodular quantum logic OMC where the only primitive connections are the conditional $\supset$ (corresponding to the Sasaki hook on orthomodular lattice) and the constant 'false' f. This logic to be a smallest subset of formulas satisfying the following clauses:

(A1) $\vdash x \supset [(x \supset y) \supset x]$

(A2) $\vdash [(x \supset y) \supset x] \supset x$

(A3) $\vdash [(x \supset y) \supset (x \supset)] \supset [(y \supset x) \supset (y \supset z)]$

(A4) $\vdash [(x \supset y) \supset (y \supset x)] \supset \{[(x \supset z) \supset (x \supset y)] \supset [(x \supset z) \supset (y \supset z)]\}$

(A5) $\vdash f \supset x$

(R1) If $\vdash x$, and $\vdash x \supset y$, then $\vdash y$.

(R2) If $\vdash x$, then $\vdash y \supset x$.

The expression '$\vdash x$' is short for '$x \in OMC$' which is read 'x is a thesis of OMC'. The competeness of OMC is proved by yielding the Lindenbaum-Tarski algebra for OMC which appears to be the orthomodular lattice and the unit element of which is the equivalence class of theses of OMC.

In [Hardegree, 1981, p. 10] the valuation v is defined relative to E and in the role of E the Lindenbaum-Tarski algebra for OMC appears but since E^+ is also an orthomodular lattice then it is easy to reformulate the valuation v for the case of E^+.

In this case we can enrich the Q-valuation with the point

(3) $v(\alpha \supset \beta) = v(\alpha) \supset_3 v(\beta)\rangle$

and extend our theorem 10 to

Theorem 3. *If* $\vdash_{OM,GOM,GO^{\dagger}M,OMC} \alpha$ *then for any quantos* Q *we have* $\mathsf{Q} \models \alpha$.

An open question is whether there are systems of quantum logic with diverse conditionals corresponding $\supset_1, \supset_2, \supset_4$ or $\supset_5$.

4. Interpretation of Quantum Logic in quantos $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$

In order to build the category $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ as a quantos we consider the functor $\underline{\Omega} : \mathsf{E} \to \mathsf{QSet}$ which will represent the classifying object in quantos $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$. Hereafter we will use E both as an algebra and the category. For any functor $\underline{F}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{QSets}$ we denote by $\underline{F}_p$ the value $\underline{F}(p)$ of functor $\underline{F}$ for object p from E. For any q and p such that $p \leq q$ a functor $\underline{F}$ defines the function from $\underline{F}_p$ to $\underline{F}_q$ which we denote $\underline{F}_{pq}$. A functor $\underline{F}$ will be treated as the collection $\{\underline{F}_p : p \in \mathsf{E}\}$ of sets indexed by elements from an algebra E and endowed with the transition mapping $\underline{F}_{pq} : \underline{F}_p \to \underline{F}_q$ under $p \leq q$ (in particular, $\underline{F}_{pp}$ will an identity function on $\underline{F}_p$).

We continue in this fashion putting $\underline{\Omega}_p = [p)^+$ and for p and q such that $p \leq q$ the function $\underline{\Omega}_{pq} : \underline{\Omega}_p \to \underline{\Omega}_q$ maps every $S \in [p)^+$ into $S \cap [q) \in [q)^+$, i.e. $\underline{\Omega}_{pq}(S) = S_q$.

A constant functor $\underline{1}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{QSets}$ which is a terminal object of the category $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ might be defined with a help of conditions $\underline{1}_p = \{0\}$ for $p \in \mathsf{E}$ and $\underline{1}_{pq} = id_{\{0\}}$ under $p \leq q$. A subobject classifier $true : \underline{1} \to \underline{\Omega}$ is a natural transformation whose p-th component $true_p : \{0\} \to \underline{\Omega}_p$ will be determined by the equality $true_p(0) = [p)$. Thus, the function $true$ chooses the greatest element from every orthomodular lattice of $[p)^+$ type.

Let $\tau : \underline{F} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \underline{G}$ be an arbitrary subobject of $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$-object $\underline{G}$. An every component τ_p is injective and can be treated as the inclusion function $\underline{F}_p \hookrightarrow \underline{G}_p$. The p-th component $(\chi_\tau)_p : \underline{G}_p \to [p)^+$ of a characteristic arrow $\chi_\tau : \underline{G} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \underline{\Omega}$ will be defined by the equality

$(\chi_\tau)_p(x) = \{q : p \leq q \text{ and } \underline{G}_{pq}(x) \in \underline{F}_q\}$

for every $x \in \underline{F}_p$.

Now we construct truth arrows in a quantos $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$. Let us start with an arrow $false$.

An initial object $\underline{0} : \mathsf{E} \to \mathsf{QSets}$ of category $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$ is the constant functor such that $\underline{0}_p = \varnothing$ and $\underline{0}_{pq} = id_\varnothing$ for $p \leq q$. Components of a natural transformation $\underline{0} \underset{\bullet}{\rightarrowtail} \underline{1}$ are the inclusions $\varnothing \hookrightarrow \{0\}$ (the same component for any

p). According to the usual definition an arrow $false$ is the characteristic arrow of subobject $! : \underline{0} \rightarrowtail \underline{1}$. For its component $false_p : \{0\} \to \underline{\Omega}_p$ we have $false_p(0) = \{q : p \leq q \text{ and } \underline{1}_{pq}(0) \in \underline{0}_q\} = \{q : p \leq q \text{ and } \underline{0} \in \varnothing\} = \varnothing$ and hence a natural transformation chooses the null element from every orthomodular lattice.

Conjunction can be handled in same way as in case of topos $[\mathsf{P}, \mathsf{Sets}]$ where P is a Heyting algebra (cf. [Goldblatt, 1979]), i.e. we, in fact, need for $\cap : \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}$ the definitions of their p-th components in a form of

$$\cap_p(\langle S, T\rangle) = S \cap T.$$

The negation is $\neg : \underline{\Omega} \rightarrowtail \underline{\Omega}$ whose p-th component $\neg_p : \underline{\Omega}_p \to \underline{\Omega}_p$ in case of indentifying $false_p$ with the inclusion $\{\varnothing\} \hookrightarrow \underline{\Omega}_p$ (and since $\neg : \underline{\Omega} \rightarrowtail \underline{\Omega}$ is a characteristic arrow of subobject $false$) is as follows:

$\neg_p(S) = \{q : p \leq q \text{ and } \underline{\Omega}_{pq}(S) \in \{\varnothing\}\} = \{q : p \leq q \text{ and } S \cap [q) = \{\varnothing\} = [p) \cap \neg S = (\neg S)_p$.

The conditional is $\supset_3 : \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}$ whose p-th component $\supset_{3p} : \underline{\Omega}_p \times \underline{\Omega}_p \to \underline{\Omega}_p$ will be $\cup_{p(}(\neg S)_p, (S \cap T)_p)$ according to the polinomiality of $\supset_3$.

Finally, we will call $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$-valuation a function $V : \Phi_0 \to [\mathsf{E}, \mathsf{QSets}](1, \underline{\Omega})$ assigning to every propositional variable π_i some truth-value $V(\pi_i) : 1 \rightarrowtail \underline{\Omega}$. This function apparently might be extended to the set Φ of all formulas:

(a) $V(\neg\alpha) = \neg \circ V(\alpha)$;

(b) $V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ \langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$;

(c) $V(\alpha \supset \beta) = \supset_3 \circ \langle V(\alpha), V(\beta)$

We say that the formula α be $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$-valid (we write $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}] \models \alpha$) if $V(\alpha) = true : \underline{1} \to \underline{\Omega}$ for all $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$-valuations V.

Using valuation $v : \Phi_0 \to E$ from above it is easy to prove at the same way the following theorem:

Theorem 4. *For any quantos* $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}]$, $[\mathsf{E}, \mathsf{QSets}] \models \alpha$ *iff* $\vdash_{OM, GOM, GO^{\dagger}M, OMC} \alpha$ *(i.e.* α *is provable in* $OM, GOM, GO^{\dagger}M, OMC$*).*

Acknowledgements. The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project '5100'.

References

Abramsky, Duncan, 2004 – Abramsky, S., Duncan, R. "Categorical quantum logic", *Proc.* QPL, 2004. pp. 3–20.

Beran, 1984 – Beran, L. *Orthomodular Lattices: Algebraic Approach*, Prague, Academia, 1984. 394 pp.

Birkhoff, 1967 – Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Providence, Rhode Island, 1967. 423 pp.

Birkhoff, Neumann, 1936 – Birkhoff, G., Neumann, J. von. "The logic of quantum mechanics", *Annal. Math*, 1936, Vol. 37, pp. 823–843.

Crane, 2007 – Crane, L. *What is the mathematical structure of quantum space-time?*, 2007. arXiv: [gr-qc/0706.4452].

Cutland, Gibbins, 1982 – Cutland, N. J., Gibbins, P. F. "A regular sequent calculus for quantum logic in which $\wedge$ and $\vee$ are dual", *Log. et Anal*, 1982, Vol. 25, No. 95, pp. 221–248.

Dalla Chiara, Giuntini, 2002 – Dalla Chiara, M.-L., Giuntini, R. "Quantum Logic", *Handbook of Philosophical Logic* (2nd Edition), eds by D. Gabbay and F. Guenthner. Vol. 6, 2002, pp. 129–228.

Dunn et al., 2013 – Dunn, J.M., Moss, L.S. and Wang, Z. "The Third Life of Quantum Logic: Quantum Logic Inspired by Quantum Computing", *Journal of Philosophical Logic*, 2013, Vol. 42, Issue 3, pp. 443–459.

Goldblatt, 1974 – Goldblatt, R.I. "Semantic analysis of orthologic", *J. Phil. Log*, 1974, Vol. 3, No. 1–2, pp. 19–35.

Goldblatt, 1979 – Goldblatt, R.I. *Topoi. The categorial analysis of logic.* North-Holland, Amsterdam, N.Y., Oxford, 1979. 486 pp.

Hardegree, 1981 – Hardegree, G.M. "An axiom system for orthomodular quantum logic", *Studia Logica*, 1981, Vol. 40, No. 1, pp. 1–12.

Isham, Doring, 2007 – Isham, Ch., Doring, A. *A topos foundation for theories of physics* (in 4 parts), 2007. arXiv: [quantph/0703060], [quant-ph/0703062], [quant-ph/0703064], [quant-ph/0703066].

Landsman, 2017 – Landsman, K. "Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebras", *Fundamental Theories of Physics*, 2017, Vol. 188, 881 pp.

Nishimura, 1980 – Nishimura, H. "Sequential method in quantum logic", *J.Symb.Log.*, 1980, Vol. 45, No. 2, pp. 335–352.

Takeuti, 1981 – Takeuti, G. "Quantum Set Theory", in: *Current Issues in Quantum Logic*, Ettore Majorana International Science Series, eds by E.G. Beltrametti and B.C. van Fraassen. Plenum, New York, Vol. 8, 1981, pp. 303–322.

Vasyukov, 1989 – Vasyukov, V.L. "Kvantovaya logika v toposakh" [Quantum Logic in Topoi], in *Investigations on Non-Classical Logics*, ed by V.A. Smirnov. Moscow: Nauka, 1989. pp. 338–348. (In Russian)

Vasyukov, 2005 – Vasyukov, V.L. *Kvantovaya logika* [Quantum Logic]. Moscow, 2005. 192 pp. (In Russian)

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 88–99
УДК 510.643

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 88–99
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99

И.А. Горбунов

Конечная аксиоматизируемость квазинормальных модальных логик*

Игорь Анатольевич Горбунов
Тверской государственный университет.
Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Аннотация: Квазиномальными модальными логиками называют логики в модальном языке, которые содержат логику **K**, замкнуты по правилу modus ponens и для которых не постулирована замкнутость относительно правила Гёделя. До последнего времени этим логикам уделялось мало внимания, несмотря на то, что среди первых систем модальных логик, сформулированных К. И. Льюисом, содержались и квазинормальные логики. Здесь мы рассмотрим вопрос о конечной аксиоматизируемости квазинормальных модальных логик.

Как известно, квазинормальный напарник логики **K** не имеет конечной аксиоматизации. Кроме того, существуют и другие модальные нормальные конечно-аксиоматизируемые логики, квазинормальные напарники которых не имеют конечной аксиоматизации, например логика **D**. Поэтому вопрос о конечной аксиоматизируемости той или иной модальной квазинормальной логики нетривиален.

Отметим, что известные частные критерии конечной аксиоматизируемости квазинормальных логик сформулированы только для квазинормальных напарников нормальных модальных логик.

В данной работе получено обобщение этих частных критериев на случай произвольных квазинормальных модальных логик, попутно указана возможная аксиоматизация этих логик. Таким образом, получен частный критерий конечной аксиоматизируемости, общий как для квазинормальных напарников нормальных логик, так и для квазинормальных логик, которые таковыми не являются.

Также в работе приведен алгоритм, который по относительной аксиоматизации квазинормальной логики L над квазинормальным вариантом логики **K** дает абсолютную аксиоматизацию логики L.

Отдельно рассмотрены аксиоматизации расширений логики **K4**. Сформулирован частный критерий конечной аксиоматизируемости расширений этой логики. Приведен алгоритм, который по относительной аксиоматизации квазинормальной логики L над квазинормальным вариантом логики **K4** дает абсолютную аксиоматизацию логики L.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №17-03-00818-ОГН и №18-011-00869-а.

Ключевые слова: квазинормальные логики, квазинормальные напарники нормальных логик, абсолютная аксиоматизация, относительная аксиоматизация, конечная аксиоматизируемость

Для цитирования: *Горбунов И.А.* Конечная аксиоматизируемость квазинормальных модальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 88–99. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99

Введение

Логикой будем называть множество формул, замкнутое относительно любой подстановки.

Если L — некоторая логика, то добавляя к L множество формул Γ и замыкая полученное множество относительно *modus ponens* (MP) и всех подстановок, получаем логику, которую будем обозначать $L + \Gamma$. Если мы замкнем множество $L \cup \Gamma$ относительно MP, всех подстановок и правила Гёделя (GR), имеющего вид $\frac{p}{\Box p}$, то получим логику, которую будем обозначать посредством $L \oplus \Gamma$.

Рассмотрим классическую логику высказываний, заданную в языке со связками $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, и $\bot$ (ложь) некоторым исчислением, содержащим конечное множество схем аксиом Cl и единственное правило вывода — *modus ponens*. Чтобы иметь возможность задавать модальные логики, расширим язык классической логики одноместной связкой $\Box$ («необходимо»). Полученную логику будем обозначать **Cl**.

Логику $\mathbf{K} = \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ будем называть *минимальной модальной логикой. Модальной логикой* будем называть логику, содержащую множество **K**.

Пусть Γ — некоторое множество формул. Логику $\mathbf{K} + \Gamma$ будем называть *квазинормальной модальной логикой*, а логику $\mathbf{K} \oplus \Gamma$ будем называть *нормальной модальной логикой.*

Квазинормальным напарником некоторой нормальной логики будем называть то же самое множество формул, не постулируя для этого множества замкнутости относительно правила Гёделя.

Для любой формулы φ, посредством $\Box^{+n}\varphi$ обозначим формулу $\bigwedge\limits_{0 \le i \le n} \Box^i \varphi$, где $\Box^0\varphi = \varphi$. Формулу $\Box^{+1}\varphi = \varphi \wedge \Box\varphi$ будем, как обычно, обозначать $\Box^+\varphi$.

Введем обозначения для некоторых формул:

$$tra_n = \Box^{+n} p \rightarrow \Box^{n+1} p \ ; \ tra_m^n = \Box^m p \rightarrow \Box^{n+1} p \ ; \ tra = tra_1^1.$$

Пусть Γ — некоторое множество формул. Будем использовать следующие обозначения для множеств формул:

$\Box^k\Gamma = \{\Box^k\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, где $k \geq 0$; $\Box\Gamma = \Box^1\Gamma$;

$\Box^{\leq n}\Gamma = \bigcup\limits_{0\leq i\leq n} \Box^i\Gamma$;

$\Box^{\omega}\Gamma = \bigcup\limits_{i<\omega} \Box^i\Gamma$.

Известно, что квазинормальный напарник логики **K** не имеет конечной аксиоматизации ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997], с. 124, упр. 4.6). Поскольку каждая квазинормальная логика содержит множество формул **K**, то вопрос о конечной аксиоматизируемости той или иной квазинормальной логики нетривиален. Это касается и квазинормальных напарников конечно-аксиоматизируемых нормальных логик.

Взаимосвязь аксиоматизаций нормальных логик и их квазинормальных напарников выражается следующей теоремой: *если L — нормальная логика, то для любого множества формул Γ верно, что $L \oplus \Gamma = L + \Box^{\omega}\Gamma$* ([Kracht, 1999], с. 53. Теорема 2.1.5). Таким образом, в общем случае, из конечной аксиоматизируемости нормальной логики неправомерно делать вывод о конечной аксиоматизируемости ее квазинормального напарника. Так, например, квазинормальные напарники ряда конечно-аксиоматизируемых нормальных логик (логики **D** и некоторых других) не являются конечно-аксиоматизируемыми ([Segerberg, 1971], с. 182–183).

На данный момент известны следующие частные критерии конечной аксиоматизируемости квазинормальных логик.

Известно, что *всякая табличная квазинормальная логика является конечно аксиоматизируемой* ([Zakharyaschev et al., 2001], с. 149).

Если говорить о квазинормальных напарниках нормальных модальных логик, то в некоторых частных случаях из конечной аксиоматизируемости нормальных модальных логик следует и конечная аксиоматизируемость их квазинормальных напарников.

Так, в 1948 году МакКинси и Тарский ([McKinsey, Tarski, 1948]) доказали, что для любого множества формул Γ верно, что $\mathbf{K4} \oplus \Box\Gamma = \mathbf{K4} + \Box\Gamma$, где $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus tra$. Также известно, что *если конечно-аксиоматизируемая нормальная логика содержит формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, то и ее квазинормальный напарник имеет конечную аксиоматизацию* ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997] с. 124, упр. 4.9).

Заметим, что формула $\Box^n tra \to tra^n_n \in \mathbf{K}$, а при $m \leq n$ формула $tra^m_n \to tra_n \in \mathbf{Cl}$. (В дальнейшем расматриваем только такие формулы tra^m_n, в которых $m \leq n$.) Таким образом, если формула $\Box^n tra$ или формула tra^m_n принадлежат модальной логике, то и формула tra_n принадлежит этой логике. Следовательно, *если конечно-аксиоматизируемая нормальная логика содержит хотя бы одну из формул из следующего списка: tra_n, $\Box^n tra$*

или tra_n^m *для некоторого* $n \geq 0$*, то и ее квазинормальный напарник имеет конечную аксиоматизацию.*

Однако знание последнего факта не позволяет нам ни эффективно привести такую конечную аксиоматизацию, ни ответить на вопрос о конечной аксиоматизируемости квазинормальной логики, которая не является квазинормальным напарником нормальной логики. Здесь мы рассмотрим факты, которые позволят нам ответить на эти два вопроса.

1. Операторы добавления следствий E, $E^\Box$ и Ω

Для любого множества формул Γ, посредством $E(\Gamma)$ обозначим логику $\varnothing + \Gamma$, а посредством $E^\Box(\Gamma)$ — логику $\varnothing \oplus \Gamma$.

Несложно доказать, что E и $E^\Box$ обладают всеми свойствами операторов замыкания, заданных на множестве всех формул ([Расёва, Сикорский, 1972], с. 212), а также свойствами финитности и структурности ([Горбунов, 2011]). Более того, все замкнутые множества операторов E и $E^\Box$, замкнуты относительно любой подстановки. Операторы, обладающие последним свойством, будем называть *инвариантными операторами*.

Лемма 1. *Для любого множества формул* Γ *верно, что:*

$$E(\Gamma) \subseteq E^\Box(\Gamma);\ E^\Box(E(\Gamma)) = E^\Box(\Gamma);\ E(E^\Box(\Gamma)) = E^\Box(\Gamma).$$

Кроме того, для обоих операторов выполняются следующие свойства оператора замыкания:

$$E(E(\Gamma) \cup \Delta) = E(\Gamma \cup \Delta);\ E^\Box(E^\Box(\Gamma) \cup \Delta) = E^\Box(\Gamma \cup \Delta).$$

Введем обозначения для следующих формул:

$$ltr = (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r));$$

$$ml = \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

Используя оператор E, на множестве всех формул определим финитарный и инвариантный оператор Ω следующим образом:

$$\Omega(\Gamma) = E(\Box^\omega(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \{ltr\})$$

.

Лемма 2. *Для любой формулы* φ *верно, что если* $\varphi \in E^\Box(\Gamma)$*, то в этом случае* $\Box^\omega\{\varphi\} \subseteq \Omega(\Gamma)$*.*

Доказательство. Доказываем индукцией по длине вывода формулы φ в $E^{\Box}(\Gamma)$.

Базис очевиден.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi$ — вывод формулы φ и для любого $1 \leq k \leq m$ множество $\Box^{\omega}\{\psi_k\} \subseteq \Omega(\Gamma)$.

Пусть φ является подстановочным случаем некоторой предыдущей формулы вывода, то есть существуют формула ψ_i и подстановка ε, такие, что $\varphi = \varepsilon\psi_i$. По индукционному предположению, $\Box^{\omega}\{\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma)$. Тогда, в силу инвариантности оператора Ω, получаем, что

$$\Box^{\omega}\{\varphi\} = \Box^{\omega}\{\varepsilon\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma).$$

Если φ получена из предыдущих формул по правилу MP, то существуют такие формулы ψ_i и $\psi_j = \psi_i \to \varphi$, что для любого $n \geq 0$ формулы $\Box^n\psi_i, \Box^n\psi_j, \Box^n ml \in \Omega(\Gamma)$.

Так как $ltr \in \Omega(\Gamma)$, то получаем, что для любого числа $n \geq 0$ формула $\Box^n\psi_j \to (\Box^n\psi_i \to \Box^n\varphi) \in \Omega(\Gamma)$.

Если φ получена из предыдущих формул по правилу GR, то существует такая формула ψ_i, что $\varphi = \Box\psi_i$, и, значит, множество $\Box^{\omega}\{\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma)$. Заметим, что для любого $n \geq 0$ верно, что $\Box^n\varphi = \Box^{n+1}\psi_i$. Таким образом, $\Box^{\omega}\{\varphi\} \subseteq \Box^{\omega}\{\psi_i\}$. ■

Следствие 1. *Для любого множества* Γ *верно, что* $E^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Omega(\Gamma)$.

Теорема 1. *Для любого множества формул* Γ *верно, что если формулы* $ml, ltr \in E^{\Box}(\Gamma)$, *то* $E^{\Box}(\Gamma) = \Omega(\Gamma)$.

Доказательство. Следует из Леммы 1, монотонности оператора E и того факта, что $\Box^{\omega}(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \{ltr\} \subseteq E^{\Box}(\Gamma)$. ■

2. Абсолютная квазинормальная аксиоматизируемость модальных логик

Множество формул Γ назовем *(абсолютной) квазинормальной аксиоматизацией* логики L, если $L = E(\Gamma)$; если же $L = E^{\Box}(\Gamma)$, то множество формул Γ будем называть *(абсолютной) нормальной аксиоматизацией* логики L. Множество формул Γ будем называть *(относительной) квазинормальной аксиоматизацией* логики $L + \Gamma$ *над логикой* L. Аналогично, множество формул Γ будем называть *(относительной) нормальной аксиоматизацией* логики $L \oplus \Gamma$ *над логикой* L.

Теорема 2. $\mathbf{K} = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\})) = \Omega(Cl)$.

Доказательство. По определению, $\mathbf{K} = \mathbf{Cl} \oplus ml = E^{\Box}(Cl \cup \{ml\})$. Так как $ltr \in E(Cl)$ и $E(Cl) \subseteq E(\Box^{\omega} Cl)$, то, в силу Леммы 1, формула ltr принадлежит множеству $E^{\Box}(Cl \cup \{ml\})$. Следовательно, по Теореме 1,

$$\mathbf{K} = E^{\Box}(Cl \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \{ml\}) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{ltr\}) = \Omega(Cl).$$

В силу того, что $ltr \in E(\Box^{\omega} Cl \cup \{ml\})$, мы получим равенство

$$E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{ltr\}) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\})).$$

■

Теорема 3. $\mathbf{K} \oplus \Gamma = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\})) = \Omega(Cl \cup \Gamma)$. *То есть если нормальная логика аксиоматизируется над логикой* $\mathbf{K}$ *множеством формул* Γ, *то множество формул* $\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\})$ *является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.*

Доказательство. Согласно определениям и Лемме 1, получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{K} \oplus \Gamma = E^{\Box}(\mathbf{K} \cup \Gamma) = E^{\Box}(E^{\Box}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma) = E^{\Box}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}).$$

Как и выше, в силу Теоремы 1, получим, что:

$$E^{\Box}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \Gamma).$$

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве вышеприведенной теоремы, получаем, что $\Omega(Cl \cup \Gamma) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}))$. ■

Используя Теорему 3, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 4. $(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta)$.

Следствие 2. *Если квазинормальная логика аксиоматизируется над логикой* $\mathbf{K}$ *множеством формул* Γ, *то множество формул* $\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma$ *является ее квазинормальной абсолютной аксиоматизацией, то есть* $\mathbf{K} + \Gamma = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma)$.

3. Логики, содержащие формулы tra_n

Обозначим посредством Υ_n множество формул $\{tra_n, ltr, ad\}$, где $ad = p \to (q \to (p \wedge q))$.

Теперь для любого $n \geq 0$, как и выше, определим оператор добавления следствий Ω_n. Положим $\Omega_n(\Gamma) = E(\Box^{\leq n}(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \Upsilon_n)$.

Лемма 3. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что* $\Box^\omega(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma) \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

Доказательство. Докажем, что для любого $k \geq 0$ верно, что если формула $\varphi \in Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma$, то $\Box^{n+k}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

Пусть для некоторого $k \geq 0$ верно, что для любого $m < k+1$ выполнено, что $\Box^{n+m}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

При подстановке $\varepsilon(p) = \Box^k\varphi$, $\varepsilon(tra_n) = \bigwedge\limits_{k \leq i \leq n+k} \Box^i\varphi \to \Box^{n+(k+1)}\varphi$. Так как $\{\Box^k\varphi, \ldots, \Box^{n+k}\varphi\} \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$, то, применяя формулу ad, получим, что $\bigwedge\limits_{k \leq i \leq n+k} \Box^i\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$. Таким образом, $\Box^{n+(k+1)}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$. ■

Лемма 4. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что если $tra_n \in \Omega(Cl \cup \Gamma)$, то $\Omega(Cl \cup \Gamma) = \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.*

Доказательство. Включение $\Omega_n(Cl \cup \Gamma) \subseteq \Omega(Cl \cup \Gamma)$ следует из того, что $\Upsilon_n \subseteq \Omega(Cl \cup \Gamma)$ и $\Box^{\leq n}(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma) \subseteq \Box^\omega(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma)$.

Включение $\Omega(Cl \cup \Gamma) \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$ следует из Теоремы 3 и Леммы 3. ■

Используя Теорему 3 и Лемму 5, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что если $tra_n \in \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то*

$$\mathbf{K} \oplus \Gamma = \Omega_n(Cl \cup \Gamma) = E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}).$$

То есть если нормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, аксиоматизируется над логикой $\mathbf{K}$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}$ является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.

Рассмотрим теперь аксиоматизацию логик вида $(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta$.

Теорема 6. *Для любого $n \geq 0$ и любых множеств формул Γ и Δ верно, что если $tra_n \in (\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta$, то*

$$(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta = E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta \cup \{tra_n\}).$$

То есть если квазинормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, аксиоматизируется над нормальной логикой $\mathbf{K} \oplus \Gamma$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta \cup \{tra_n\}$ является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.

Доказательство. Используя Теорему 5, получим следующую цепочку равенств:

$$(\mathbf{K}\oplus\Gamma)+\Delta = E((\mathbf{K}\oplus\Gamma)\cup\Delta) = E(E(\Box^{\leq n}(Cl\cup\Gamma\cup\{ml\})\cup\{tra_n\})\cup\Delta) =$$

$$= E(\Box^{\leq n}(Cl\cup\Gamma\cup\{ml\})\cup\{tra_n\}\cup\Delta).$$

■

Следствие 3. *Если квазинормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$ аксиоматизируется над логикой $\mathbf{K}$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl\cup\Gamma\cup\{ml\})\cup\{tra_n\}$ является ее квазинормальной абсолютной аксиоматизацией, то есть $\mathbf{K}+\Gamma = E(\Box^{\leq n}(Cl\cup\Gamma\cup\{ml\})\cup\{tra_n\})$.*

Таким образом, если множество Γ — конечное, то логика $\mathbf{K}+\Gamma$ имеет конечную аксиоматизацию. Из этого факта и из частного критерия конечной аксиоматизируемости для нормальных логик, который приведен в ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997], с. 124, упр. 4.9), следует частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости для модальных логик.

Теорема 7. *Всякая логика, замкнутая относительно правила MP, имеющая конечную аксиоматизацию над некоторой конечно-аксиоматизируемой модальной логикой и содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

Как говорилось выше, для любых $n \geq 0$ и $m \leq n$ верно, что формулы $\Box^n tra \to tra_n^n \in \mathbf{K}$ и $tra_n^m \to tra_n \in \mathbf{Cl}$. Так как $\mathbf{Cl} \subseteq \mathbf{K}$ и любая модальная логика содержит логику $\mathbf{K}$, то мы имеем и следующий, более общий, частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости.

Теорема 8. *Всякая логика, замкнутая относительно правила MP, имеющая конечную аксиоматизацию над некоторой конечно-аксиоматизируемой модальной логикой и содержащая хотя бы одну формулу из следующего списка: $\Box^n tra$, tra_n^m или tra_n для некоторого $n \geq 0$ и некоторого $m \leq n$, имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

4. Квазинормальная аксиоматизация расширений логики K4

Свойства нормальной модальной логики **K4** и нормальных ее расширений достаточно хорошо изучены, в то время как расмотрению свойств ее квазинормальных расширений посвящено не так и много работ ([Zakharyaschev et al., 2001], [Zakharyaschev, 1992], [Zakharyaschev, 1996], [Горбунов, 2006]). Поэтому, в качестве заключения, уделим внимание вопросу о конечной аксиоматизируемости расширений этой логики.

Для множества формул Γ посредством $\Box^+\Gamma$ обозначим множество $\{\Box^+\varphi : \varphi \in \Gamma\}$.

Лемма 5. $E(Cl \cup \Box^{\leq 1}\Gamma) = E(Cl \cup \Box^+\Gamma)$.

Доказательство. Поскольку $\{p \wedge q \to p, p \wedge q \to q, ad\} \subseteq E(Cl)$. ■

Мы будем использовать эту лемму при доказательстве теорем, приведенных ниже.

Теорема 9. $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box^+ tra$

Доказательство. В силу доказанных выше теорем и того факта, что формулы $p \wedge q \to p$ и $p \wedge q \to q$ принадлежат $E(Cl)$, мы получим следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus tra = E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{tra\} \cup \{ml\})) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{\Box^+ tra\}) = \mathbf{K} + \Box^+ tra.$$

■

Отсюда следует, что $\mathbf{K4} + \Gamma = \mathbf{K} + (\{\Box^+ tra\} \cup \Gamma)$.

Теорема 10. $\mathbf{K4} \oplus \Gamma = \mathbf{K} + \Box^+(\Gamma \cup \{tra\})$, *при этом квазинормальный напарник логики* $\mathbf{K4} \oplus \Gamma$ *аксиоматизируется множеством формул* $\{\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra, ml\})\}$.

Доказательство.

$$\mathbf{K4} \oplus \Gamma = \mathbf{K} \oplus (\{tra\} \cup \Gamma) = E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup (\{tra\} \cup \Gamma) \cup \{ml\})) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra\})) = \mathbf{K} + \Box^+(\Gamma \cup \{tra\}) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra, ml\})).$$

■

Исходя из сказанного выше, несложно заметить, что верно следующее утверждение.

Теорема 11. $(\mathbf{K4} \oplus \Gamma) + \Delta = \mathbf{K} + (\Delta \cup \Box^{+}(\Gamma \cup \{tra\}))$*, при этом логика* $(\mathbf{K4} \oplus \Gamma) + \Delta$ *будет аксиоматизироваться следующим множеством формул:* $\{\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^{+}(\Gamma \cup \{tra, ml\}) \cup \Delta\}$.

Таким образом, можно сформулировать следующий частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости расширений логики **K4**.

Теорема 12. *Если логика, замкнутая относительно правила MP, аксиоматизируется над некоторым конечно-аксиоматизируемым расширением логики* **K4** *конечным множеством формул, то она имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

Литература

Горбунов, 2006 – *Горбунов И.А.* Модальные квазинормальные логики без независимой аксиоматизации. Тверь: Изд-во ТвГУ, 2006. 81 с.

Горбунов, 2011 – *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логические исследования. Вып. 17. М.: СПб: ЦГИ, 2011. С. 95–108.

Расёва, Сикорский, 1972 – *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М: Наука, 1972. 295 с.

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – *Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V.* Modal Logic. Oxford University Press. 1997. 620 p.

Kracht, 1999 – *Kracht M.* Tools and Techniques in Modal Logic //Studie in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 142. Elsevier Science, 1999. 528 p.

McKinsey, Tarski, 1948 – *McKinsey J.C.C., Tarski A.* Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // Journal of Symbolic Logic. 1948. Vol 13. No. 1. P. 1–15.

Segerberg, 1971 – *Segerberg K.* An Essay in Classical Modal Logic // FILOSOFISKA STUDIER. No. 13. Uppsala, 1971. 250 p.

Zakharyaschev et al., 2001 – *Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, Vol 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 83–266.

Zakharyaschev, 1992 – *Zakharyaschev M.V.* Canonical formulas for K4. Part I: Basic results // Journal of Symbolic Logic. 1992. Vol 57. No. 4. P. 1377–1402.

Zakharyaschev, 1996 – *Zakharyaschev M.V.* Canonical formulas for K4. Part II: Cofinal subframe logics // Journal of Symbolic Logic. 1996. Vol 61. No. 2. P. 421–449.

Igor A. Gorbunov

Finite axiomatizability of quasi-normal modal logics

Igor A. Gorbunov
Tver state university,
33 Zhelyabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Abstract: Quasi-normal modal logics are logics in a modal language that contain the logic **K**, are closed according to the modus ponens rule, and for which is not postulated Godel's rule. Until recently, little attention was paid to these logics, despite the fact that among the first systems of modal logics formulated by C.I. Lewis, there were also quasi-normal logics. In this paper, we consider the question of finite axiomatizability of quasi-normal modal logics.

As is well known, the quasi-normal partner of the logic **K** does not have a finite axiomatization. In addition, there are other modal normal finitely axiomatizable logics, whose quasi-normal partners have no finite axiomatization. (An example of such logic is the logic **D**.) Therefore, the question of the finite axiomatizability of a particular modal quasi-normal logic is not trivial.

Note that the well-known special criteria for the finite axiomatizability of quasi-normal logics concern only quasi-normal partners of normal modal logics.

In this paper, a generalization of these particular criteria is obtained for the case of arbitrary quasi-normal modal logics. Thus, we obtain a special criterion of finite axiomatisability applicable both for quasi-normal partners of normal logics and for quasi-normal logics which are not a quasi-normal partner of any normal logic.

In addition, a method for constructing a possible finite axiomatization of these quasi-normal finitely axiomatizable logics is given. We also present an algorithm that gives an absolute axiomatization of the logic L according to the available relative axiomatization of the quasi-normal logic L over the quasi-normal partner of the logic **K**.

Separately, the axiomatization of extensions of the logic **K4** is considered. A special criterion for the finite axiomatizability of extensions of this logic is formulated. We present an algorithm that gives an absolute axiomatization of the logic L by the available relative axiomatization of the quasi-normal logic L over the quasi-normal partner of the logic **K4**.

Keywords: quasi-normal modal logics, quasi-normal partners, absolute axiomatization, relative axiomatization, finite axiomatizability

For citation: Gorbunov I.A. "Konechnaya aksiomatiziruemost' kvazinormal'nykh modal'nykh logik" [Finite axiomatizability of quasi-normal modal logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 88–99. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №17-03-00818-ОГН and №18-011-00869-а.

References

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V. *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997, 620 pp.

Gorbunov, 2006 – Gorbunov I.A. *Modal'nye kvazinormal'nye logiki bez nezavisimoi aksiomatizatsii* [Modal quasi-normal logics without independent axiomatization]. Tver: Tver St. Univ. Publ., 2006, 81 pp. (In Russian)

Gorbunov, 2011 – Gorbunov I.A. "Khorosho opredelennye logiki" [Well-determined logics], *Logical Investigations*, 2011, Vol. 17, pp. 95–108. (In Russian)

Kracht, 1999 – Kracht M. "Tools and Techniques in Modal Logic", *Studie in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 142, Elsevier Science, 1999, 528 pp.

McKinsey, Tarski, 1948 – McKinsey J.C.C., Tarski A. "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting", *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol 13, No. 1, pp. 1–15.

Raseva, Sikorskiy, 1970 – Raseva E., Sikorskiy R. *The Mathematics of Metamathematics.* Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1970, 519 pp.

Segerberg, 1971 – Segerberg K. "An Essay in Classical Modal Logic", *FILOSOFISKA STUDIER*, No. 13, Uppsala, 1971, 250 pp.

Zakharyaschev et al., 2001 – Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A. "Advanced Modal Logic", in: *Handbook of Philosophical Logic*, Vol 3, 2nd edition, ed. by D.M. Gabbay and F. Guenthner. Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 83–266.

Zakharyaschev, 1992 – Zakharyaschev M.V. "Canonical formulas for K4. Part I: Basic results", *Journal of Symbolic Logic*, 1992, Vol 57, No. 4, pp. 1377–1402.

Zakharyaschev, 1996 – Zakharyaschev M.V. "Canonical formulas for K4. Part II: Cofinal subframe logics", *Journal of Symbolic Logic*, 1996, Vol 61, No. 2, pp. 421–449.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 100–119
УДК

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 100–119
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-100-119

Giorgi Japaridze

Computability logic: Giving Caesar what belongs to Caesar

Giorgi Japaridze
Villanova University and Institute of Philosophy Russian Academy of Sciences,
800 Lancaster Avenue, Villanova, PA 19085, USA .
E-mail: giorgi.japaridze@villanova.edu

Abstract: The present article is a brief informal survey of *computability logic* (CoL). This relatively young and still evolving nonclassical logic can be characterized as a formal theory of computability in the same sense as classical logic is a formal theory of truth. In a broader sense, being conceived semantically rather than proof-theoretically, CoL is not just a particular theory but an ambitious and challenging long-term project for redeveloping logic.

In CoL, logical operators stand for operations on computational problems, formulas represent such problems, and their "truth" is seen as algorithmic solvability. In turn, computational problems — understood in their most general, interactive sense — are defined as games played by a machine against its environment, with "algorithmic solvability" meaning existence of a machine which wins the game against any possible behavior of the environment. With this semantics, CoL provides a systematic answer to the question "What can be computed?", just like classical logic is a systematic tool for telling what is true. Furthermore, as it happens, in positive cases "What can be computed" always allows itself to be replaced by "How can be computed", which makes CoL a problem-solving tool.

CoL is a conservative extension of classical first order logic but is otherwise much more expressive than the latter, opening a wide range of new application areas. It relates to intuitionistic and linear logics in a similar fashion, which allows us to say that CoL reconciles and unifies the three traditions of logical thought (and beyond) on the basis of its natural and "universal" game semantics.

Keywords: Computability logic; game semantics; constructive logic; intuitionistic logic; linear logic; interactive computability

For citation: Japaridze G. "Computability logic: Giving Caesar what belongs to Caesar", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 100–119. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-100-119

The present article is essentially a transcript of a lecture I gave in Moscow at the Institute of Philosophy on October 19, 2017. This explains some peculiarities of its style, such as speaking in first person or absence of formal definitions.

Thanks go to my good old friend Vladimir Shalack for organizing the lecture and forcefully nudging me afterwards to write an article based on it.

1. Computability logic versus classical logic

Not to be confused with the generic term "computational logic", "computability logic" (CoL) is the proper name of an approach and ongoing ambitious project initiated by myself back in 2003 [Japaridze, 2003]. I characterize it as a "formal theory of computability in the same sense as classical logic is a formal theory of truth". To see what this means, let us compare the two logics.

- In classical logic, the central semantical concept is *truth*; formulas represent *statements*; and the main utility of the logic is that it provides a systematic answer to the questions "What is (always) *true*?" or "Does *truth* of P (always) follow from *truth* of Q?".[1]
- In computability logic, the central semantical concept is *computability*; formulas represent *computational problems*; and the main utility of the logic is that it provides a systematic answer to the questions "What is (always) *computable*?" or "Does *computability* of P (always) follow from *computability* of Q?".

As we see, the second bulleted item is identical to the first one, only with "truth" replaced by "computability" everywhere and, correspondingly, "statements" by "computational problems" (for computability is the desired property of computational problems just like truth is the desired property of statements). In positive cases computability logic additionally provides a systematic answer to not only questions in the style "*what...*", but also "*how...*", such as "*How* to (always) compute P?", or "*How* to (always) obtain an algorithm for P from an algorithm for Q?". With potential applications in mind, such questions are of course more interesting than their "*what*" style counterparts.

Things are naturally set up so that statements of classical logic turn out to be special cases of computational problems, and classical truth a special case of computability. Eventually this makes classical logic a conservative fragment of CoL: the language of CoL is a proper extension of that of classical logic, but if we limit the former to the latter, CoL validates nothing more and nothing less than what classical logic does.

2. Computability logic versus intuitionistic and linear logics

Similarly, intuitionistic and linear logics can also be viewed as fragments of CoL, albeit "not quite" conservative ones, as CoL validates certain principles

[1] Of course, one is a special case of the other.

not provable in those logics, even if there are more similarities than differences. To me this fact indicates that those two logics are incomplete and do not fully correspond to their underlying philosophies and intuitions.

Let me take the liberty to philosophize a little bit here. I believe the right way to build a new logic is to:

(I) Start with the philosophy and intuitions that we want to capture — call this *informal semantics.*

(II) Then elaborate a *formal semantics* that adequately corresponds to the informal semantics.

(III) And only after that ask what should be provable and what not in a *proof system* for the resulting logic, construct such a system and verify its soundness and completeness.

This is the way classical logic evolved, culminating in Gödel's completeness theorem for first order logic. CoL, too, follows the same pattern. On the other hand, I would say that intuitionistic and linear logics jumped from informal semantics directly into proof systems, skipping the formal semantics phase.

Take Heyting's intuitionistic logic for instance. Its construction started by looking at proof systems for classical logic and removing the postulates that appeared to be wrong from the informal intuitionistic point of view, such as the law of excluded middle.

Similarly, linear logic was obtained from Gentzen's sequent calculus for classical logic as a result of deleting certain rules obviously incompatible with the resource philosophy of linear logic, such as contraction.

Yes, in both cases the underlying philosophical and intuitive considerations were sufficient to clearly see that the expelled principles were indeed wrong. But where is the guarantee that, together with the law of excluded middle or contraction, some innocent, deeply hidden principles did not vanish as well? Idiomatically speaking, where is the guarantee that such a revision of classical logic did not throw out the baby with the bathwater? And, indeed, I dare to argue that this is exactly what happened. In the case of intuitionistic logic, among such "babies" is

$$\begin{gathered}(\neg P \to A \vee B) \wedge (\neg Q \to C \vee D) \wedge \neg(P \wedge Q) \to \\ (\neg P \to A) \vee (\neg P \to B) \vee (\neg Q \to C) \vee (\neg Q \to D).\end{gathered} \tag{1}$$

And an example of an innocent victim of rudely rewriting classical logic into linear logic is

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \to (A \vee C) \wedge (B \vee D), \tag{2}$$

with its connectives understood in the multiplicative sense. I call the latter Blass's principle as Andreas Blass [Blass, 1992] was the first to study it as an example of a game-semantically vaild principle underivable in linear logic.

Of course some, mostly retroactive, attempts have been made to create formal semantics matching the proof systems of intuitionistic or linear logics. But the reasonable way to go is to match a proof system with a convincing formal semantics rather than vice versa. It is always possible to come up with some formal semantics that matches the target proof system, but the whole question is how adequately and convincingly that semantics captures the philosophy and intuitions underlying the logic.

When constructing a deductive system, we ask what should be provable in it and what not. An answer to this question stems from the underlying semantics and only semantics, formal or informal: those things should be provable that are semantically valid. Some popular approaches to intuitionistic logic have attempted to explain everything in terms of proofs. For instance, you can see the meaning of $A \vee B$ explained by saying that this formula should be considered "good" (true? provable?) if either A or B can be proven. But the whole point is that we are just trying to understand what should be provable and what not. Trying to justify provability in terms of provability creates a vicious circle.

Why is taking a shortcut from the earlier described stage (I) directly to stage (III) wrong? Because it is hardly possible to convincingly argue directly that a given proof system corresponds to a given informal semantics. On the other hand, adequacy (soundness and completeness) of a proof system with respect to a formal semantics can be proven mathematically, as both, unlike informal semantics, are mathematical objects. Now you can ask here: "OK, but where is then the guarantee that the formal semantics adequately captures the informal semantics and thus the original motivations and philosophy underlying the logic?". Of course, there is no guarantee, as this cannot be proven mathematically. But it is easier to argue that the two match each other (when they really do) because both are semantics. Comparing apples with apples is easier than comparing them with oranges.

I have been pushing forward the above points since long ago. While having heard the angry "How dare you!" many times from sympathizers of intuitionistic or linear logics, I am still waiting to see some more convincing attempts to refute them.

Summarizing much of what has been said in this section, my favorite excerpt from [Japaridze, 2009], not without sarcasm, notes:

> *The reason for the failure of the principle of excluded middle in CoL is not that this principle ... is not included in its axioms. Rather, the failure of this principle is exactly the reason why it, or anything*

entailing it, would not be among the axioms of a sound system for CoL.

3. Computational problems as games

Anyway, what is computability? Before trying to answer or even ask this question, one should first understand what a computational problem is, for computability is a property of computational problems. So, what is a *computational problem*? According to Church, a computational problem is nothing but a *function* (to be computed). That is, the task of systematically generating the values of that function at different arguments. The tradition of seeing computational problems as functions has since firmly established in theoretical computer science. Such an approach, however, as acknowledged by Turing [Turing, 1936] himself, is too narrow. Most tasks performed by computers are *interactive*, far from being as simple as just receiving an input and generating an output. For instance, take a look at the work of a network server. It is in fact an infinite process, with signals moving back and forth between it and its environment in a not quite synchronized or regulated fashion, affecting not only current events but some future events as well. Such tasks are not always reducible to functions, at least reducible in some "nice" way. We need something more here, a more general concept to be able to adequately model complex tasks performed by computers.

Such "something more" for us are *games*: a computational problem is a game between a machine, denoted $\top$, and its environment, denoted $\bot$. Then *computability* is understood as existence of a machine which always wins the game, i.e., wins it no matter how the environment acts. In this presentation I am not giving you any formal definitions, including definitions of our concepts of games or game-playing. But such definitions, of course, do exist.

Even though often it is us who act in the role of $\bot$, we are fans of $\top$ rather than $\bot$. That is because $\top$ (machine) is a tool, and its losing the game would mean failing to perform the task it was supposed to perform for us. The behavior (game-playing strategy) of $\top$, as the word "machine" suggests, should be algorithmic as it is a mechanical device. On the other hand, there are no restrictions on the behavior of $\bot$, as the latter represents a capricious user, the blind forces of nature or the devil himself (and you can't ask the devil to only follow algorithmic strategies).

Games can be visualized as trees in the style of Figure 1. Vertices of such a tree represent positions in the game, and edges — their labels, that is — represent legal moves, prefixed with $\top$ or $\bot$ to indicates which player can make the move. On the other hand, the label $\top$ or $\bot$ of a vertex indicates which player is considered to be the winner if the game ends in the corresponding position. The game can end anywhere, it does not have to continue to the "end": after all, some branches can be infinite and thus there will be nothing that could be understood as the "end". So, if the machine made the move α in the game of Figure 1, the environment responded with γ and no further moves were made, the machine loses as the corresponding vertex of the tree is $\perp$-labeled.

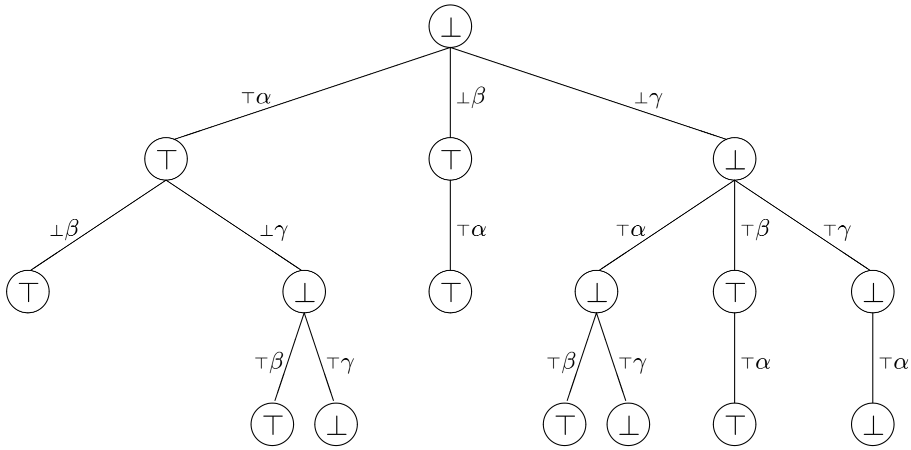

Figure 1: A game of depth 3

Games in logic have been studied by many authors, but our understanding of games is apparently unique in that it does not impose any regulations on the order in which the players should or could move, and permits positions where both players have legal moves. For instance, the root position of the game of Figure 1, as we see, allows either player to move. In that position, a move (if any) will be made by the player which can or want to act faster.

It turns out that, in the sort of games we consider, the relative speed of either player does not matter. Namely, it never hurts a player to postpone making moves and let the adversary go first whenever possible. Such games are said to be *static*, and they are defined by imposing a certain technical yet simple condition on games. Striving to keep this presentation non-technical, I will not discuss that condition here. Suffice it to say that all "pure" (speed-independent) interactive problems turn out to be static, and the class of static games is closed under all game operations studied in CoL. The game of Figure 1 is static, in which the machine has a winning strategy. An interactive algorithm that guarantees the machine a win reads as follows:

Regardless of what the adversary is doing or has done, go ahead and make move α; make β as your second (and last) move if and when you see that the adversary has made move γ, no matter whether this happened before or after your first move.

It is left as an exercise for the reader to see that $\top$, following this interactive algorithm (strategy), wins no matter what and how fast $\perp$ does.

Computational problems in the traditional sense, i.e. functions, are static games of depth 2 of the kind seen in Figure 2.

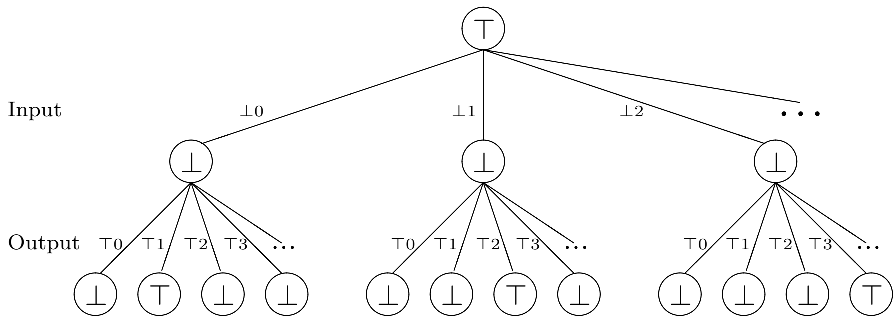

Figure 2: The successor function as a game

In such a game, the upper level edges represent possible inputs provided by the environment, so they are $\perp$-labeled. The lower level edges represent possible outputs generated by the machine, so they are $\top$-labeled. The root is $\top$-labeled because it corresponds to the situation where nothing happened, namely, no input was provided by the environment. The machine has nothing to answer for in this case, so it wins. The middle level nodes are $\perp$-labeled because they correspond to situations where there was an input but the machine failed to generate an output, so the machine loses. Each group of the bottom level nodes has exactly one $\top$-labeled node, because a function has exactly one (correct) value at each argument. It is not hard to see that the particular game of Figure 2 represents the successor function $x+1$: if the input is 0, the machine, in order to win, should generate the output 1, if the input is 1, the output should be 2, etc.

Now CoL rhetorically asks why limit ourselves only to trees of the kind seen in Figure 2. First of all, we may want to allow branches to be longer than 2, or even infinite to be able to model long or infinite tasks performed by computing machines. And why not allow all sorts of distributions of $\top$ and $\perp$ in nodes or on edges? For instance, consider the task of computing the function $3/x$. It would be natural to make the node to which the input 0 takes us not $\bot$-labeled, but $\top$-labeled. Because the function is not defined at 0, so the machine cannot be held responsible for failing to generate an output on such an input.

It makes sense to generalize computational problems not only in the direction of increasing their depths, but also decreasing. Games of depth 0 are said to be *elementary*. These are games with no legal moves (the game "tree" is just its root), and thus games where one of the players automatically wins by doing nothing. We understand true atomic sentences of classical logic such as $2 \times 2 = 4$ or $\top$ as the elementary game automatically won by the machine, and false sentences such as $2 \times 2 = 5$ or $\bot$ as the elementary game lost by the machine. Note the two different yet related meanings of the symbols $\top$ and $\bot$ in CoL: depending on the context, such a symbol stands either for the corresponding elementary game, or the player which wins that game.

Thus, classical propositions for us are nothing but elementary games. This generalizes to predicates in the standard way. In classical logic, predicates can be thought of as "propositions that (may) depend on variables". Similarly, we allow "games that (may) depend on variables", with predicates being nothing but elementary sorts of such games. As a result, classical logic becomes a special case of CoL — CoL where only elementary games are allowed.

4. Choice operators

Logical operators in CoL stand for operations on games. There is a whole zoo of them, with (at least) four sorts of conjunction and disjunction as well as universal and existential quantifiers, a bunch of so called recurrence (repetition) operations and corresponding implication-style and negation-style operations, and more. In this short presentation we shall only look at the following subset of the logical operators studied in CoL:

$$[\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup, \text{⫰}, \text{⫯}, \multimap, \circ\!\!\neg\,.]$$

Using the classical notation for the first six of these is no accident. They are conservative generalizations of their classical counterparts from elementary games to all games. Conservative in the sense that, when applied to elementary games (propositions, predicates) only, their extensional meanings and logical behavior turn out to be exactly classical. This is how classical logic naturally becomes a special (elementary) fragment of CoL.

We start with the *choice connectives* $\sqcap$ (conjunction) and $\sqcap$ (disjunction). The way they combine two games A and B to get the new game $A \sqcap B$ or $A \sqcup B$ is depicted in Figure 3.

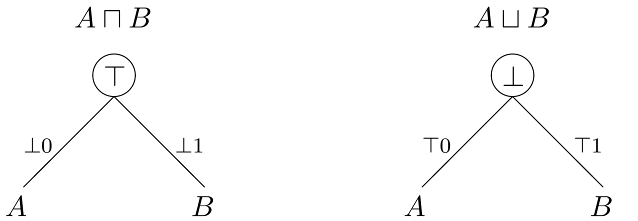

Figure 3: Choice conjunction and disjunction

As we see, $A \sqcap B$ is the game where the first legal move is (only) by the environment. Such a move should be either 0 or 1. If move 0 is made, the game "turns into" A, in the sense that it continues — and the winner is determined — according to the rules of A. Similarly for B in the case of move 1. Intuitively, making move 0 or 1 means choosing between the left disjunct and the right disjunct. Making such a choice is not only a privilege of the environment, but also an obligation: as seen in the picture, the root of $A \sqcap B$ is $\top$-labeled, meaning that the environment loses if it fails to make an initial move/choice.

$A \sqcup B$ is fully symmetric/dual to $A \sqcap B$: in it, it is the machine rather than the environment who makes the initial choice and who loses if no choice is made.

For simplicity, let us agree that the universe of discourse is always $\{0, 1, 2, \cdots\}$. If so, the *choice universal quantification* $\bigsqcap x A(x)$ (note that $\bigsqcap$ is larger than $\sqcap$) can be understood as the infinite choice conjunction $A(0) \sqcap A(1) \sqcap A(2) \sqcap \cdots$, and the *choice existential quantification* $\bigsqcup x A(x)$ as the infinite disjunction $A(0) \sqcup A(1) \sqcup A(2) \sqcup \cdots$. So, now a choice is made not just between 0 or 1, but among $0, 1, 2, \cdots$, as shown in Figure 4.

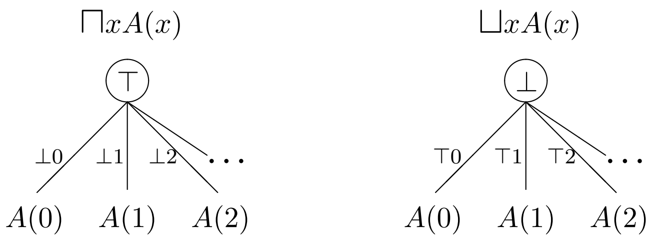

Figure 4: Choice quantifiers

Having these operators in the language, we may now conveniently express standard computational problems (and beyond) without drawing trees. So, for instance, the problem of computing the successor function depicted in Figure 2 can be simply written as $\sqcap x \sqcup y(y = x + 1)$. In this game, the first move — for instance 2 — is by the environment. Intuitively, this can be seen as asking the machine the question "What is the successor of 2?". The game continues as $\sqcup y(y = 2+1)$. The next move — say 3 — is by the machine, which amounts to saying that 3 is the successor of 2. The game is now brought down ("continues as") $3 = 2 + 1$. This is an elementary game with no further moves, and the machine has won because $3 = 2 + 1$ is true. Had the machine made the move 4 instead of 3, or no move at all, it would have lost.

Rather similarly, the problem of deciding a predicate p is expressed by $\sqcap x\big(\neg p(x) \sqcup p(x)\big)$.

5. Negation

Negation $\neg$ is an operation which flips the roles of the two players, turning $\top$'s wins and legal moves into $\bot$'s wins and legal moves, and vice versa. For instance, if *Chess* is the game of chess from the point of view of the white player, then $\neg$*Chess* is the same game as seen by the black player. Figure 5 illustrates how applying $\neg$ to a game A generates the exact "negative image" of A, with $\top$ and $\bot$ interchanged both in the nodes and on the arcs of the game tree.

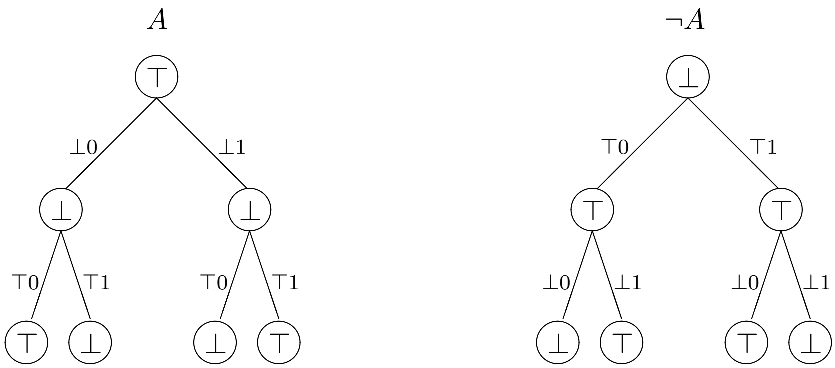

Figure 5: Negation

Obviously if A is a true proposition, i.e., an elementary game automatically won by the machine, then $\neg A$ remains an elementary game but now lost by the machine; in other words, $\neg A$ is a false proposition. This is exactly what was meant when promising that the meaning of $\neg$, or any other operator for which we use classical notation, is exactly classical when limited to elementary games.

It can be easily seen that the games $\neg\neg A$ and A are identical: switching the roles twice brings each player to its original status. Similarly, it can be seen that $\neg$ interacts with choice operations in the kind old DeMorgan fashion. E.g., $\neg(A \sqcap B) = \neg A \sqcup \neg B$. Looking back at Figure 5, notice that the game A shown there is nothing but $(\top \sqcup \bot) \sqcap (\bot \sqcup \top)$, and $\neg A$ is its DeMorgan dual $(\bot \sqcap \top) \sqcup (\top \sqcap \bot)$.

6. Parallel connectives

The operations $\wedge$ and $\vee$ are called *parallel conjunction* and *parallel disjunction*. Unlike their choice counterparts $A \sqcap B$ and $A \sqcup B$, in $A \wedge B$ or $A \vee B$ no choice between A and B is made by either player. Rather, the play proceeds in parallel in both components. To win in $A \wedge B$, the machine should win in both A and B, while for winning $A \vee B$ winning in just one of the two components is sufficient.

Consider, for instance, $\mathit{Chess} \wedge \mathit{Chess}$. This is in fact a play on two boards, where $\top$ plays white on both boards. Perhaps it plays against two adversaries: Peter and Paul, though, for $\top$, they together form just what it calls the (one) environment. In order to win, $\top$ needs to defeat Peter on the left board *and* Paul on the right board. The first move in this compound game is definitely by $\top$, as the opening move is by the white player on both boards. But, after $\top$ makes its first move, say against Peter, the situation changes. Now both $\top$ and its environment naturally have legal moves. Namely, $\top$ has a legal move against Paul, while Peter (and thus the environment from $\top$'s point of view) also has a legal move in response to $\top$'s initial move. It would be unnatural here to impose some regulations regarding which player can go next. This is why CoL's understanding of games does not insist that in each position only either $\top$ or $\bot$ (but not both) should be allowed to move.

To appreciate the difference between the choice and the parallel sorts of connectives, let us compare the two games $\neg \mathit{Chess} \sqcup \mathit{Chess}$ and $\neg \mathit{Chess} \vee \mathit{Chess}$. We assume that draw outcomes are ruled out in *Chess*, and the player who fails to make a move on his turn is considered to have lost. Imagine I am playing in the role of $\top$, and the world champion Kasparov in the role of $\bot$. In $\neg \mathit{Chess} \sqcup \mathit{Chess}$, I have a choice between playing on the left board ($\neg \mathit{Chess}$) or on the right board (*Chess*). That is, I get to decide whether I want to play black or play white. After such a choice is made, I have to defeat Kasparov on the chosen board, while the other board is discarded. Obviously I stand no chance to win, regardless of whether I choose to play black or white. On the other hand, I can easily beat Kasparov in $\neg \mathit{Chess} \vee \mathit{Chess}$. This is a parallel play on two boards. At the beginning, both Kasparov and I have legal moves: Kasparov on the left board where he is playing white, and I on the right board.

Rather than hurrying to make an opening move, I wait to let Kasparov move first. If he, too, chooses to do nothing, then I win due to being the winner on the left board. Now suppose Kasparov makes his opening move on the left board. Can you guess how I should respond? Yes, by making the exact same move on the right board. I wait again. Whatever move Kasparov makes on the right board in response, I copy that move back on the left board. And so on. By using this copy-cat strategy, I am in fact letting Kasparov play against himself. Eventually, both he and I are guaranteed to win on one board and lose on the other. Since this is a disjunction, having won in one of the disjuncts makes me the winner in the overall game.

In general, the law of excluded middle "$\neg A$ OR A" is invalid in CoL with OR understood as $\sqcup$ but valid when OR is understood as $\vee$: one can prove that, while the above seen copy-cat strategy wins all games of the form $\neg A \vee A$, for some A no machine can win $\neg A \sqcup A$ against a sufficiently smart adversary.

7. Putting things where they belong

What is meant by "Giving Caesar what belongs to Caesar" (... and God what belongs to God) in the title of this article? The twentieth century has witnessed endless and fruitless fights between the classically-minded and the constructivistically-minded regarding whether the law of excluded middle should be accepted or rejected. It is obvious that the two schools of thought were talking about two very different meanings of disjunction. Yet, for some strange reason, they chose the same symbol $\vee$ for both, and then started arguing with each other. Not quite serious I would say. CoL neutralizes this and similar controversies by putting things where they belong. And, as pointed out in Section 2., it does so *semantically*, not because it allows or forbids them among the postulates of some purportedly "right" deductive system.

Give the classically minded what belongs to the classically-minded ($\vee$), and the constructivists what belongs to the constructivists ($\sqcup$)!

- Yes, classical logic is right: $\neg A \vee A$ is indeed valid.
- Yes, intuitionistic logic is right: $\neg A \sqcup A$ is indeed invalid.

No subject for arguing!

The classical tautology $(\neg A \wedge \neg A) \vee A$ fails in CoL unless A is stipulated to be elementary. Observe that, at least, the copy-cat trick used earlier in our winning strategy for $\neg \mathit{Chess} \vee \mathit{Chess}$ no longer works for the "similar" $(\neg \mathit{Chess} \wedge \neg \mathit{Chess}) \vee \mathit{Chess}$. I can try to copy Kasparov's moves in *Chess* within both conjuncts of $\neg \mathit{Chess} \wedge \neg \mathit{Chess}$ and vice versa. However, Kasparov may start acting in different ways in these two conjuncts, and then, at best, I will be able to synchronize only one of them with *Chess*. It is then possible that eventually I lose in *Chess* and in the unsynchronized conjunct of $\neg Chess \wedge \neg Chess$, which makes me lose in the overall game $(\neg Chess \wedge \neg Chess) \vee Chess$. Anyway, classical logic accepts the principle $(\neg A \wedge \neg A) \vee A$ and linear logic rejects it (with $\wedge, \vee$ seen as multiplicatives). Which one is "right"?

The formal language of pure CoL has two sorts of nonlogical atoms: *elementary* and *general*. Elementary atoms are meant to be interpreted as elementary games, and general atoms as any games, elementary or not. We use the lowercase $p, q, \cdots$ for elementary atoms and the uppercase $P, Q, \cdots$ for general atoms.

And, again, Caesar is being given what belongs to Caesar and God what belongs to God. The semantics of CoL classifies:

- $(\neg p \wedge \neg p) \vee p$ as valid. Yes, classical logic is right!
- $(\neg P \wedge \neg P) \vee P$ as invalid. Yes, linear logic is right!

(As for the earlier discussed law of excluded middle, both $\neg P \vee P$ and $\neg p \vee p$ are valid and both $\neg P \sqcup P$ and $\neg p \sqcup p$ are invalid.)

From CoL's perspective, classical logic differs from intuitionistic logic in its understanding of logical constants (operators), and differs from linear logic in its understanding of logical variables (nonlogical atoms).

8. Reduction

The *implication* operation $\rightarrow$ is defined in the standard way by

$$A \rightarrow B \ =_{def} \neg A \vee B.$$

The intuition associated with this operation is that of a *reduction* of the consequent to the antecedent. Since A is negated here and thus the roles of the two players are interchanged in it, A can be seen by $\top$ as an environment-provided *resource* rather than a task. Namely, $\top$ can observe how the environment is playing in A and use that information in its play in B. The task of $\top$ is to win B as long as the environment wins A; in other words, to solve problem B as long as the environment is (correctly) solving problem A.

To get a feel of $\rightarrow$ as a reduction operation, consider the game

$$\begin{gathered} \sqcap x \sqcup y\big(y = Father(x)\big) \wedge \sqcap x \sqcup y\big(y = Mother(x)\big) \\ \rightarrow \ \sqcap x \sqcup y\big(y = PaternalGrandmother(x)\big), \end{gathered}$$

where *Father*(x) is the function "x's father", and similarly for *Mother*(x) and *PaternalGrandmother*(x). Here, the task $\top$ is facing is telling the name of an arbitrary person's paternal grandmother while the environment (correctly) tells the name of an arbitrary person's father and the name of an arbitrary person's mother. In other words, this is the problem of reducing the paternal grandmotherhood problem to the fatherhood and motherhood problems. Winning this game is easy and does not require any knowledge of anyone's relative's names. Here is a strategy for $\top$: Wait till $\bot$ makes a move a in the consequent (if not, $\top$ wins automatically). Intuitively, such a move amounts to asking $\top$ the question "Who is a's paternal grandmother?". Make the same move a in the first conjunct of the antecedent, i.e., ask the counterquestion "Who is a's father?". $\bot$ will have to answer correctly, or else it loses. Let us say $\bot$'s answer/move is b. Make the same move b in the second conjunct of the antecedent, thus asking $\bot$ to tell who b's mother is. $\bot$, again, will have to provide the correct answer, let us say c. Now, by making the same move c in the consequent, i.e., answering "c" to $\bot$'s original question regarding a's paternal grandmother, $\top$ wins: c is indeed a's paternal grandmother (unless the environment lied in the antecedent about a's father or b's mother, but in that case, as already noted, $\top$ is no longer responsible for anything).

9. Blind quantifiers

The operations $\forall$ and $\exists$, called *blind quantifiers*, conservatively generalize their classical counterparts, just like $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ do. Unlike the choice quantifiers, there are no moves associated with $\forall$ or its dual $\exists$. Playing $\forall x A(x)$ or $\exists x A(x)$ means playing $A(x)$ "blindly", without knowing the value of x as the latter is not specified by either player. In order to win $\forall x A(x)$ (resp. $\exists x A(x)$), $\top$ needs to play $A(x)$ in such a way that it wins for all (resp. at least one) possible values of x.

An alternative intuitive characterization of $\forall x A(x)$ and $\exists x A(x)$ would be that, in these games, a third party chooses a value for x but never shows it to either player. In order to win $\forall x A(x)$ (resp. $\exists x A(x)$), $\top$ (resp. $\bot$) needs to play $A(x)$ in a way that guarantees success regardless of what that chosen value might have been.

Let us compare the games

$$\sqcap x\big(\mathit{Even}(x) \sqcup \mathit{Odd}(x)\big) \quad \text{and} \quad \forall x\big(\mathit{Even}(x) \sqcup \mathit{Odd}(x)\big).$$

$\sqcap x\big(\mathit{Even}(x) \sqcup \mathit{Odd}(x)\big)$, which is a game of depth 2, is easy to win: wait till the adversary selects a value m for x; if m is even, respond by choosing the left disjunct of $\mathit{Even}(m) \sqcup \mathit{Odd}(m)$, otherwise respond by choosing the right disjunct, and rest your case. On the other hand, $\forall x\big(\mathit{Even}(x) \sqcup \mathit{Odd}(x)\big)$ is a game of depth 1, and it is impossible to win. Here the value of x is not specified by the adversary or whoever for that matter, yet you should do the impossible task of choosing between $Even(x)$ and $Odd(x)$ so that all of the elementary games/propositions $Even(0), Even(1), Even(2), \cdots$ (if you chose $Even(x)$) or $Odd(0), Odd(1), Odd(2), \cdots$ (if you chose $Odd(x)$) are won/true.

This should not suggest than all $\forall$-games are unwinnable. Consider

$$\forall x\Big(Even(x) \sqcup Odd(x) \rightarrow \bigsqcap y\big(Even(x+y) \sqcup Odd(x+y)\big)\Big).$$

Here, given a number chosen by the environment for y, let us say 5, in order to tell whether $x+5$ is even or odd it is not necessary to know the actual value of x. Rather, just knowing whether x is even or odd is sufficient. And, luckily, this piece of information on x will have to be provided by the environment as mandated by $Even(x) \sqcup Odd(x)$ in the antecedent. If the environment claims that x is even, then $\top$ chooses $Odd(x+5)$ and wins; otherwise, it chooses $Even(x+5)$.

$\forall$ can be seen to be stronger than $\bigsqcap$, in the sense that the semantics of CoL validates the principle $\forall x A(x) \rightarrow \bigsqcap x A(x)$ but not its contrapositive. This means that $\bigsqcap x A(x)$ is reducible to $\forall x A(x)$ but not vice versa. Symmetrically, $\exists$ is weaker than $\bigsqcup$.

Speaking philosophically, choice quantifiers are *constructive* versions of their blind counterparts. While not as popular as the law of excluded middle, $\exists x \forall y\big(p(x) \vee \neg p(y)\big)$ is another example of a valid principle of classical logic which, however, is not valid in any constructive sense, and not provable in intuitionistic logic. Again giving Caesar what belongs to Caesar, CoL unsurprisingly establishes:

- Both $\exists x \forall y\big(p(x) \vee \neg p(y)\big)$ and $\exists x \forall y\big(P(x) \vee \neg P(y)\big)$ are valid. Yes, classical logic is right!
- Both $\bigsqcup x \bigsqcap y\big(p(x) \vee \neg p(y)\big)$ and $\bigsqcup x \bigsqcap y\big(P(x) \vee \neg P(y)\big)$ are invalid. Yes, intuitionistic logic is right!

On the other hand, the valid principle $\forall y \exists x\big(p(x) \vee \neg p(y)\big)$ of classical logic is commonly recognized to be valid in every reasonable constructive sense, and is provable in intuitionistic logic. As expected, CoL validates this principle with both (blind and choice) sorts of quantifiers and both (elementary and general) sorts of atoms.

10. Recurrences

Out of several types of so called *recurrence* operations studied within the framework of CoL, here we shall only take a look at *branching recurrence* $⫰$. Its dual *corecurrence* operation $⫯$ can simply be understood as $\neg ⫰ \neg$. When applied to a game G, $⫰$ turns it into a game playing which means repeatedly playing G.

When G is seen as a resource (e.g., when it is in the antecedent of an implication), ⫰ generates multiple "copies" of G, thus making G a reusable/recyclable resource.

In classical logic, this sort of an operation would be meaningless, because classical logic is resource-blind, seeing no difference between one and many copies of G. In the resource-conscious CoL, however, recurrence operations are not only meaningful, but also necessary to achieve a satisfactory level of expressiveness and realize CoL's potential and ambitions. Hardly any computer program is used only once; rather, it is run over and over again. Loops within such programs also assume multiple repetitions of the same subroutine. In general, the tasks performed in real life by computers, robots or humans are typically recurring ones or involve recurring subtasks.

Let me use our old friend *Chess* to explain the meaning of ⫰. A play of ⫰*Chess* starts as an ordinary play of *Chess*. At any time, however, the environment may decide to split the current position into two identical ones, thus creating two runs of *Chess* out of one that have a common past but possibly diverging futures. From that point on, the play continues on two boards. At any time, the environment can again create two identical copies of the then-current position on either board, and the play correspondingly continues on three boards. The environment can keep splitting positions in this fashion, creating more and more sessions of *Chess* to be played in parallel. Eventually, $\top$ will be considered the winner if it wins in all of those sessions. ⫯*Chess* is similar, with the difference that now splitting positions is $\top$'s privilege, and $\top$ wins if it wins in at least one of the multiple sessions of *Chess*.

11. Brimplication

The implication-style operation ⟜, called *brimplication* ("br" for "branching"), is defined by

$$A ⟜ B \ =_{def} ⫰A \to B.$$

Intuitively $A ⟜ B$, just like $A \to B$, is a problem of reducing B to A. The difference between the two reduction operations is that, while in $A \to B$ the machine has a single copy of A available as an environment-provided informational resource for solving B, in $A ⟜ B$ the resource A — as well as any game/position it has evolved to — can be duplicated and reused any number of times. As a result, $A ⟜ B$ is easier for $\top$ to win than $A \to B$ because, as a resource, the antecedent of $A ⟜ B$ is stronger (very much so) than the antecedent of $A \to B$. While being the most *basic* sort of reduction allowing us to naturally define ⟜ or other reduction-style operations, $\to$ is a stricter and thus less general operation of reduction than ⟜. In fact, according to Thesis 1 below, ⟜ is *the most general* sort of reduction.

We say that a problem/game B is *brimplicatively reducible* to a problem A iff there is a machine with a winning strategy for $A \circ\!- B$.

Thesis 1. *Brimplicative reducibility is an adequate mathematical counterpart of our intuition of reducibility in the weakest — and hence the most general — algorithmic sense possible. Namely, for all games/problems A and B, we have:*

(I): *Whenever B is brimplicatively reducible A, B is also algorithmically reducible to A according to everyone's reasonable intuition.*

(II): *Whenever B is algorithmically reducible to A according to everyone's reasonable intuition, B is also brimplicatively reducible to A.*

This is pretty much in the same sense as, by Church's celebrated thesis, a function f is Turing-machine computable iff f is algorithmically computable according to everyone's reasonable intuition.

It should be also mentioned that, unsurprisingly, brimplicative reducibility turns out to be a conservative generalization of Turing reducibility, commonly accepted in theoretical computer science as the most general relation of reducibility between the traditional, non-interactive sorts of problems.

12. On intuitionistic logic once again

According to Kolmogorov's [Kolmogorov, 1932] well known thesis, intuitionistic logic is a logic of problems. This thesis was stated by Kolmogorov in rather abstract, philosophical terms. No past attempts to find a strict and adequate mathematical explication of it have fully succeeded. The following theorem tells a partial success story ("partial" because it is limited to only positive propositional fragment of intuitionistic logic):

Theorem 1. *[Japaridze [Japaridze, 2007b]; Mezhirov and Vereshchagin [Mezhirov, Vereshchagin, 2010]] The positive (negation-free) propositional fragment of Heyting's intuitionistic calculus is sound and complete with respect to the semantics of CoL, with intuitionistic implication understood as $\circ\!-$, conjunction as $\sqcap$ and disjunction as $\sqcup$.*

As for the intuitionistic operators not mentioned in the above theorem, CoL sees the intuitionistic universal quantifier as $\bigsqcap$, existential quantifier as $\bigsqcup$, and negation as what it calls *brefutation* $\circ\!\neg$, defined by

$$\circ\!\neg A \ =_{def} A \circ\!- \bot.^2$$

[2]As we remember from Section 3., the meaning of the logical constant $\bot$ in CoL is standard: this is an always-false proposition, i.e., the elementary game automatically lost by the machine.

So, formula (1) from Section 2. should in fact have been written as

$$
\begin{gathered}
(\circ\!\!\neg\, P \circ\!\!-\, A \sqcup B) \sqcap (\circ\!\!\neg\, Q \circ\!\!-\, C \sqcup D) \sqcap \circ\!\!\neg\, (P \sqcap Q) \circ\!\!-\\
(\circ\!\!\neg\, P \circ\!\!-\, A) \sqcup (\circ\!\!\neg\, P \circ\!\!-\, B) \sqcup (\circ\!\!\neg\, Q \circ\!\!-\, C) \sqcup (\circ\!\!\neg\, Q \circ\!\!-\, D).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

This formula, as noted earlier, is valid in CoL but unprovable in Heyting's calculus, making the latter incomplete with respect to the semantics of CoL. At the same time, Heyting's calculus in its full first order language has been shown [Japaridze, 2007a] to be sound with respect to CoL's semantics. So, intuitionistic logic — at least, Heyting's formal version of it — is a fragment of CoL but, unlike classical logic, "not quite" a conservative one. Nevertheless, since (3) is the shortest formula known to separate Heyting's calculus from the corresponding fragment of CoL, one can say that Heyting's calculus is quite close to being complete.

13. Conclusion

Computability logic (CoL) is a formal theory of computability in the same sense as classical logic is a formal theory of truth. Its formulas represent computational problems, logical operators stand for operations on such problems, and validity means being "always computable". Computational problems, in turn, are understood in their most general — interactive — sense and, mathematically, are defined as games played by a machine against its environment.

This article was a brief, informal and incomplete survey of CoL. The latter is not a subject that can be duly introduced within a 1-hour presentation and, in order to well understand it, one will have to use additional sources. Out of the numerous publications devoted to CoL, the most recommended reading for a beginner are the first ten sections of [Japaridze, 2009]. An even more comprehensive — and the most up-to-date — survey of CoL can be found online in [Japaridze, 20019].

There was no discussion of related literature in this article. Such discussions can be found elsewhere, including the already mentioned [Japaridze, 2009] or [Japaridze, 20019]. I just want to point out here that the main precursors of CoL are Lorenzen's [Lorenzen, 1961] dialogue semantics for intuitionistic logic, Hintikka's [Hintikka, 1973] game-theoretic semantics for classical logic and Blass's [Blass, 1992] game semantics for linear logic, the latter being the closest one.

The language of CoL is much more expressive than the fragment surveyed in the present article. Important topics not covered here also include the proof theory of CoL. And, of course, actual and potential applications of CoL outside logic itself. Such applications include theory of (interactive) computation, knowledgebase systems, systems for planning and action, declarative programming languages, constructive applied theories, and more.

So far the most manifestly realized extra-logical utility of CoL has been using it as a logical basis for applied theories [Japaridze, 20010]-[Japaridze, 20016c], with such theories offering substantial advantages over their classical-logic-based counterparts. CoL-based number theory, termed *clarithmetic*, will be the subject of a forthcoming paper expected to appear in the next issue of this journal.

I want to close this article by pointing out that, despite having been evolving for 15 years already, CoL, due to its ambitiousness, still remains at an early stage of development, with more open questions than answered ones. A researcher who decides to join the project will find enough interesting material to be occupied with for many years to come. Students are especially encouraged to try.

References

Blass, 1992 – Blass, A. "A game semantics for linear logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1992, Vol. 56, pp. 183–220.

Hintikka, 1973 – Hintikka, J. *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Clarendon Press, 1973.

Japaridze, 2003 – Japaridze, G. "Introduction to computability logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2003, Vol. 123, pp. 1–99.

Japaridze, 2007a – Japaridze, G. "Introduction to computability logic", *Acta Cybernetica*, 2007, Vol. 18, No. 1, pp. 77–113.

Japaridze, 2007b – Japaridze, G. "The intuitionistic fragment of computability logic at the propositional level", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2007, Vol. 143, No. 1, pp. 187–227.

Japaridze, 2009 – Japaridze, G. "In the beginning was game semantics", in: *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy*, eds. by O. Majer, A.-V. Pietarinen and T. Tulenheimo. Springer, 2009, pp. 249–350.

Japaridze, 20010 – Japaridze, G. "Towards applied theories based on computability logic", *Journal of Symbolic Logic*, 2010, Vol. 75, pp. 565–601.

Japaridze, 20011 – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic I", *nformation and Computation*, 2011, Vol. 209, pp. 1312–1354.

Japaridze, 20014 – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic III", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2014, Vol. 165, pp. 241–252.

Japaridze, 20016a – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic II", *Information and Computation*, 2016, Vol. 247, pp. 290–312.

Japaridze, 20016b – Japaridze, G. "Build your own clarithmetic I: Setup and completeness", *Logical Methods in Computer Science*, 2016, Vol. 12, Issue 3, Paper 8, pp. 1–59.

Japaridze, 20016c – Japaridze, G. “Build your own clarithmetic II: Soundness”, *Logical Methods in Computer Science*, 2016, Vol. 12, Issue 3, Paper 12, pp. 1–62.

Japaridze, 20019 – Japaridze, G. “Computability Logic Homepage”, *An Online Survey of Computability Logic*. 2019. [`www.csc.villanova.edu/$\sim$japaridz/CL/`, accessed on 21.02.2019]

Kolmogorov, 1932 – Kolmogorov, A. N. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 1932, Vol. 35, pp. 58–65.

Lorenzen, 1961 – Lorenzen, P. “Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium”, in: *Infinitistic Methods*. PWN, Proc. Symp. Foundations of Mathematics., Warsaw, 1961, pp. 193–200.

Mezhirov, Vereshchagin, 2010 – Mezhirov, I., Vereshchagin, N. “On abstract resource semantics and computability logic”, *Journal of Computer and Systems Sciences*, 2010, Vol. 76, pp. 356–372.

Turing, 1936 – Turing, A. “On Computable numbers with an application to the entsheidungsproblem”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1936, Vol. 2:42, pp. 230–265.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 120–130
УДК 160.1+167.7

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 120–130
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-120-130

Дискуссии
Discussions

Nikolai Nepejvoda

Deformalization as the immanent part of logical solving

Nikolai Nepejvoda
Ailamazyan Program Systems Institute of RAS,
Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Russian Federation.
E-mail: nnn@nnn.botik.ru

Abstract: Deformalization is the part of logical process least investigated and studied. It is often non-trivial and hard task because of subjective and objective complexities.

Subjective complexities connected with logic. Deformalization is needed to present results of logical investigations to outsiders. Outsiders usually use languages and formalisms very far from logical ones. Their thesaurus usually barely intersects with logical one. Thus formulations on logical language cannot be appreciated and comprehended by outsiders and formulation of results needs to be completely replaced by non-logical. This task often is like to translating from one natural language into another with radically different semantic structure and system of notions (e.g. from Russian into Chinese and vice versa).

Subjective complexities connected with roles. Systems of values of the problem solver and the decision consumer is radically different. Many aspects which were important during solution are out of scope of interests of the consumer. Many aspects which were "important" for the consumer are to be negligible for the solver but they are to be restored in presentation of the decision. This side of deformalization leads a bridge to the objective complexities.

Objective complexities. Methods applied during formalization and solving induce "dual" methods are to be applied during deformalization.

General conclusions and propositions. After analyzing whole process of logical solving in its unity it is possible to make some conclusions how logic can take a place which it is worth both in scientific analysis and in education.

Interesting in more detailed speculations of this matter are addressed to the Russian variant.

Keywords: Applied logics, formalization, deformalization, translation from logical languages, methodological conclusions, pedagogic conclusions

For citation: Nepejvoda N. "Deformalization as the immanent part of logical solving", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 120–130. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-120-130

1. Logical Process

Let us remember the structure of the process of problem solving by using logics as described in [Nepejvoda, 2017] and main statements made there.

$$\begin{tikzcd} \text{Problem} \arrow[d, "\text{Formalizing}"] & \text{Treatment} \\ \text{Task} \arrow[r, "\text{Proof search}"] & \text{Solution} \arrow[u, "\text{Deformalizing}"'] \end{tikzcd}$$

Fig. 1. Solving process

State of arts with deformalization in logical investigations is "almost ignoring". Before to step into this new matter we need to summarize state of art with formalization.

Formalization includes both well described in scholar studies parts and poorly investigated ones.

Omitting of "negligible" or "insignificant" values and properties is well presented and deeply analyzed in physics, applied mathematics, logic and so on. Its philosophical treatment is almost always adequate and often sufficiently deep.

Introduction of higher order notions (abstractions, ideal objects) is also well studied logically and philosophically (even better than this topic for numerical models) though it is often somewhat poorly treated in natural sciences and by common sense.

Approximative models are well and deeply studied in numerical mathematics but in logics their status is poorly described. Logical approximation is purely qualitative and numerical insights are mainly misleading here.

Transformation notions into terms is well studied both for numerical and in logical paradigms of scientific thinking. But terms are very often mixed with initial notions in usual scientific activity, in praxis and in common sense.

2. Non-triviality of deformalization in common settings

Formal solutions are precise (modulo formalization) but not necessarily adequate.

Notions transformed into terms too often can reveal inadequacy of transformations only after solution is found. And sometimes only after it is implemented. Omitted aspects and hidden epistemological assumptions can avenge themselves. It is dangerous because usually they remain hidden in presentation of precise results. Moreover, epistemological assumptions of standard formalism are usually maximally strong (e.g. classical logic as mentioned in [Nepejvoda, 2017], and real numbers, see theory of measurements [Stevens, 1946, Pfangzal, 1973, Roberts, 1985]). Hypotheses necessary to correct application of these notions almost never are satisfied in full scale. Moreover too often such "common" notions are applied when their underlying epistemological assumptions are completely wrong. The well known example here is so called *scientometrics* [Scientometrics, 1978], thoroughly used anywhere in the world to "evaluate and control" scientific activity. Scientometrics is only (maybe striking) an example of current habit to evaluate all by one-dimensional numerical values.

Our formal models are almost always approximative ones. Theory and praxis of numerical approximations had been well developed in XIX century [Kelvin, Tait, 1912] and nowadays it successfully progresses (see e.g. [Anastassiou, Oktay, 2013]. A logical approximation is qualitative one and is poorly studied. Consider an example.

Example 1. "Each human has a mother" is "true" statement and can be formalized logically as

$$\forall x\,(\mathrm{Human}(x) \supset \exists y\,(\mathrm{Human}(y) \wedge \mathrm{Mother}(y,x))) \tag{1}$$

But how for Adam (or Manu)?

Nevertheless you probably agree that this formalization is good and mention the counterexample of Adam can be reasonable maybe only in formal analysis of Bible.

Thus a formal solution is to be tested for adequacy by completely different and often informal methods. Otherwise hidden assumption and roughening will avenge recklessly. It is better if this vengeance will occur earlier than the decision would be implemented and widely used practically (scientometrics again is here a striking example).

Usually a sufficiently good testing method for mathematical and logical solutions is physics or common sense. This way of "testing and debugging" of formally correct solutions is well shown in the classical treatise [Kelvin, Tait, 1912]. But this treatise also contains examples when this checking do not prevent errors (e.g. see there the computation of the age of Earth and Sun).

3. Absolute subjective aspects

Even if a solution is *in principle* adequate it is often expressed in scientific language and by thesaurus strange for addressee. Unfortunately logical language which is hardly understandable by overwhelming majority of other scientists and practitioners. But there are a lot of less "exotic" examples which can be viewed comparing treatises [Kelvin, Tait, 1912] presenting the classical physics and [Ivanov, 2015] presenting the quantum physics. The same words are used differently.

Usually the logical structure of a complex result in each precise science is the following:

$$A_1 \& \cdots \& A_n \to B_1 \& \cdots \& B_k. \tag{2}$$

Here A_i are conditions or assumptions and B_j are results. Here are some fine moments.

Some of premisses A_i can be hardly understandable and almost non-significant for practitioners.

Example 2. Soviet times. A mathematician explains in all details the results of his work chartered by an agricultural establishment. He have built a statistical models of losses of agricultural products. His report lasts more than half of hour. Charterer is boring and almost sleeping.
Mathematician: “Assume that distribution of losses is normal”.
Charterer (slightly awakened): “Of course, it is not insane”.

The mathematician noticed and heard nothing. He continued his speech.

Some of results also can be completely blah for addressee (e.g. that our functions are smooth and belong to space $\mathbb{C}_2$). They can be omitted. But it is fair to hide them into comments, e.g.:
By statistical methods we showed...
Proposed mathematical methods can be correctly applied here.

And last by not least result is to be edited to present it in more attractive manner without falsifying. Below we consider some aspects of editing. Now we concentrate on logical languages and results.

4. Aspects of deformalization of logical results

There are the following main aspects of deformalization activity.

1. Treatment of the general structure of proposition.
2. Treatment of quantifiers and embedded quantifiers.
3. Treatment of logical connectives.
4. Editing of deformalization result.

4.1. Treatment of the general structure

Propositions are translated by blocks. These blocks can be sufficiently large and complex as in modern systems of machine translation (Translation memory, [Rlimam, 2007, Lagoudaki, 2006, Pym, 2013]).

Example 3. If word by word translate between very different by their logic languages we can get things like the following. There are two sentences expressing the same fact.

Vanya has a hat

У Вани есть шляпа

After word for word translation we get

(English $\to$ Russian $\to$ English)

Vanya fucks a hat

Russian $\to$ English

Near Vanya exists a hat

Clear, monosemantic and univocal structure of logical languages makes possible to divide the complex proposition into several simple ones. Nevertheless in logic it is possible to write clumsy and badly comprehensible formulas. The situation here is like to situation in well designed programming language. Programmers understand that it is necessary to write not only syntactically correct but well structured and well commented programs. Now we try to describe "well structured" formulas for usual predicate language. Note that usually treated as standard normal forms (prenex or disjuncts particularly) convenient for some theoretical considerations are inconvenient for juggling between formal and informal and for clear and expressive formal description.

Simplest blocks in many logics are aristotelian ones: $\forall x\,(A(x) \to B(x))$, $\exists x\,(A(x)\&B(x))$. Formalizing natural sentences in predicate calculus we can restrict yourself (without "loss of generality", not increasing seriously length of statements and making simpler their understanding and transformations) by conjunctions of *polished* formulas of the following structure.

Definition 1. a) Elementary formulas and their negations are superpolished and polished.

b) Conjunction of superpolished formulas is superpolished and polished.

c) Disjunction and negation of superpolished formulas is polished.

d) Formulas of the form $\forall x\,(A(x \to B(x))$, $\exists x\,(A(x)\&B(x))$, where A is superpolished and B is polished, are superpolished.

Of course in non-classical logic this definition needs some polishing. It works well in classical and intuitionistic logics. We consider below deformalization of modal propositional and polished predicate formulas.

4.2. Treatment of quantifiers and embedded quantifiers

Transliteration of quantifier structure usually leads to awkward natural language statements. Moreover resulting statements looks unnatural and macaronic mix of natural and debris of formal languages. To overcome this it necessary to apply some fantasy and art.

Example 4. Consider an example of practical modal sentence used in [Nepejvoda, 2018].

$$\mathbf{AG}(Req \to \mathbf{AF}Ack) \tag{3}$$

It can be read as

"*For each request there will be acknowledgement*"

This is precise, is straightforward but a bit clumsy.

"*Each request will be processed*"

is better.

Now consider an example how from many variants how to read a propositional connective select an adequate.

$$\text{Outlaw(Robin Hood)\&Good-Hearted(Robin Hood)} \tag{4}$$

Here a variant

"*Robin Hood was an outlaw and good hearted*"

seems adequate maybe only in a dispute when somebody defends a proposition that criminals cannot be good people and you oppose him/her. A variant "*Robin Hood was good-hearted despite he was outlaw*"
is of course more adequate and better.

Embedded quantifiers can be often replaced by actions when they describe a constructive statement/

Example 5. Consider the following statement.

$$\forall x(x \in \mathbb{N} \to \exists y(y > x \& \text{Prime}(y))) \tag{5}$$

Its "transliteration" is barely understandable and maybe monstrous.

For each x if x belongs to the set of natural numbers then exists y such that $y$is greater than x and y is a prime number.

There is a fine constructive translation.

"*For each number can be found a larger prime number*"

Another fine translations needs applying some context and extra knowledge.

There are arbitrary large prime numbers.

There is infinitely many prime numbers.

We can see that finding a good variant often demands understanding an unmanifest context and using extra knowledge (as in translation between natural languages).

We see that in good translation of quantified sentences no bounded variable is mentioned explicitly. And let us note that we also stepped into editing of deformalized statements.

4.3. Treatment of logical connectives

Each logical connective has many variants how to be expressed in natural language because here the same term represents different notions. We are to choose a convenient in the particular situation.

Example 6. Consider an example of practical modal sentence used in [Nepejvoda, 2018].

$$\mathbf{AG}(Req \to \mathbf{AF}Ack) \tag{6}$$

It can be read as

"*For each request there will be acknowledgement*"

This is precise, is straightforward but a bit clumsy.

"*Each request will be processed*"

is better.

Now consider an example how from many variants how to read a propositional connective select an adequate.

$$\text{Outlaw(Robin Hood)\&Good-Hearted(Robin Hood)} \tag{7}$$

Here a variant

"*Robin Hood was an outlaw and good hearted*"

seems adequate maybe only in dispute when somebody defends a proposition that criminals cannot be good people and you oppose him/her. A variant
"*Robin Hood was good-hearted despite he was outlaw*"
is of course more adequate and better.

4.4. Editing of deformalization result

We have considered this during examining other aspects of deformalization.

4.5. Brief summary

Logical languages are principally different from natural or programming languages. Thus any direct translation become at least clumsy and vague. We are to use context, extra knowledge and common sense to make them clear and really more adequate.

So, after getting the result we have two new tasks.

1. To comprehend it.
2. To explain it to others having another paradigm and do not mastering logical languages.

Both tasks can be non-trivial.

5. Final

5.1. Aesthetic, effectiveness and adequacy

Each statement can be translated into different language by several ways and no one is completely precise. Attempts to reach full precision failed. A striking example is here a sophisticated project UNL (Unified Networking Language) [AGDA, 2017, Uchida et al, 2005, Martins, 2013]. This project is intended to be global. The system "key, modifiers and relations" pretends to express precisely meaning of each word and peculiarities of phrases. Key (English root) describes an approximate meaning of a concept; modifiers try to stress distinctions from English semantics, relations describe the structure of a sentence and role of a notion in the sentence.

Example 7. Маша вышла замуж.

agt(marry(icl>do,icl>woman,icl>time(past):02),
Masha(icl>person,icl>woman),ptn(man):01)

This is described for foreigner also a "hidden" semantics if the Russian sentence:
"The woman Masha have made marriage with a man"

Direct translation "Masha have married" lost many obvious for Russian attributes.

Of course universal language become non-universal. Book [Fomichov, 2009, p. 140] says:

Fact 1. First of all, the language UNL is oriented at representing the contents of only separate sentences but not arbitrary discourses. Even the UNL specifications published in 2006 don't contain a theory of representing the meanings of discourses.

Thus very ambitious project ("A gift for Millenium") lead to cumbersome but nevertheless not fully precise descriptions. This was one more exemplification of Arnold's principle [Arnold, 2004]. Full precision is inaccessible for complex situations. A good formalism is to be deliberately imprecise. It is to be adequate only in its main domain. Less precise model usually can be made better. Too precise one is incurable. It is described by the Russian proverb (I don't know a good English analogue):

Недосол на столе, пересол на спине.

Of course if a model is applied outside its domain of adequacy troubles would begin. If the author(s) claimed their model as "universal" one they can be responsible for those troubles. Otherwise only too positive thinking and optimistic applicant does.

Thus precision is the secondary from important aspects. Adequacy and often even aesthetical criteria are more crucial. Adequacy cannot be mixed with complete infallibility. Often it is better to have a small chance of error than move too slow or into a global deadlock. By the way only a fine decision can be sometimes applied beyond its initial domain.

6. Consequences and propositions

Formalization, deformalization and solving are to be three equally important main components of reasoning in Applied logic and in System approach. They are to be considered in complex. Thus it is bad to start from formulation of task and finish by formal result. It is better to start for an imprecise but informative formulation and finish by natural language explanation of the result. Viewing logic in this manner it is reasonable to use thoroughly assistance of proof assistant programs like AGDA [AGDA, 2017] notwithstanding their big shortcomings [Meshveliani, 2017].

Traditional courses of system theory, system approach et al. lead to the other deadlock: try to estimate all by numbers and to overestimate one dimensional model of values (money or testing score) and linear models of "reality". This deadlock is made more deep by habits of people with physical "scientific and materialistic" paradigm of thinking to take into account only those values which can be measured by numbers. As a consequents of this it is usual to present systemless approach and narrow-minded restricted by one dimension approaches as all possible alternatives to system one. This is valid if we consider mathematics as the background of all possible exact argumentations.

But there is another background very poorly consistent with numbers[1] and arrowed to qualitative analysis of notions. This is logic as had been shown in [Nepejvoda, 2008][2] This is not a rival of system approach, this is sight from other side of notions.

Thus logic (in the form of Applied Logic; see e.g. [Kohen, Nagel, 1993] or [Nepejvoda, 2000] as more current approach) but not in forms of mathematical, philosophical or formal logic) can be another background of exact knowledge

[1] This can be seen examining "fuzzy logics"

[2] Words "in mathematical descriptions" were inserted by demand of publishers to make this paper a bit less radical.

especially useful when studying artificial and virtual objects[3]. 20 years experiment in Udmurt State University showed that this can people to enter rapidly into completely new domains of knowledge and practice and solve problems *without deep studying particular domains* [Nepejvoda, 2008]. This they can work with projects in completely different branches of human activity, engineering and science as informational analytics of highest qualification. Applied logic become the connector between mathematical, technical and humanitarian branches of knowledge and tend to connect them into a system of knowledge (instead of heap of data and algorithms). It is very actual because without system a wave of information leads to degradation of mind down to twitter thinking.

Author is grateful for his institution and philosophical department of Moscow state university for encouraging to write these two articles, for valuable discussions and remarks. I understand that this is only the first small step into a very complex domain.

Acknowledgements. Partially supported by project AAAA-A16-116021760040-6 of RAS.

References

Anastassiou, Oktay, 2013 – Anastassiou, G.A., Oktay, D. (eds.) *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory Contributions from AMAT 2012*. Springer, 2013, 486 pp.

AGDA, 2017 – "The AGDA Wiki". [`http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php`, accessed on 08.08.2017].

Arnold, 2004 – Arnold, V.I. *"Zhestkie" i "myagkie" matematicheskie modeli* ["Hard" and "soft" mathematical models]. Moscow: MCNIMO, 2004. 32 pp. (In Russian)

Cardeñosa et al, 2005 – Cardeñosa, J., Gelbukh, A., Tovar, E. with prologue by Pèrez C.G. *Universal Networking Language: Advances in Theory and Application. Special issue of Research on Computing Science*. IPN, 2005. 443 pp.

Rlimam, 2007 – Elimam, A. S. "The Impact of Translation Memory Tools on the Translation Profession", *Translation Journal*, Vol. 11, No. 1, 2007.

Fomichov, 2009 – Fomichov, V. A. *Semantics-oriented natural lanuage processing: Mathematical Models and Algorithms*. Springer, 2009. 328 pp.

Ivanov, 2015 – Ivanov, M.G. *Kak ponimat' kvantovuyu mehaniku* [Understanding quantum mechanics], Moscow — Izhevsk: R&C Dynamics, 2015. 552 pp. (In Russian)

Kohen, Nagel, 1993 – Kohen, M.R., Nagel, E. *An Introduction to logic and scientific method*. Harcourt: Brace and Co. 2nd ed. 1993.

Lagoudaki, 2006 – Lagoudaki, E. *Translation Memory systems: Enlightening users' perspective*. Imperial College London, Translation Memories Survey, 2006. 16 pp.

[3]And maybe our World if it is considered as created by the plan of Highest Essence.

Martins, 2013 – *Lexical Issues of UNL: Universal Networking Language 2012 Panel*, ed by Ronaldo Martins. Cambridge Scholars Publishing, 2013. 144 pp.

Kelvin, Tait, 1912 – Lord Kelvin, Tait, P.G. *Treatise of natural philosophy part I, II.* Cambridge: University Press, 1912.

Meshveliani, 2017 – Meshveliani, S.D. "Programmirovanie vychislitel'noj algebry na osnove konstruktivnoj matematiki. Oblasti s razlozheniem na prostye mnozhiteli" [Programming of computer algebra by constructive mathematics. Domains with factorization], *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya*, 2017, Vol. 8, No. 1, pp. 3–46. (In Russian)

Nepejvoda, 1989 – Nepejvoda, N.N. "Logicheskij podhod kak al'ternativa sistemnomu v matematicheskom opisanii sistem" [Logical approach as alternative to system approach in a mathematical description of systems], *Ekspertnye sistemy: sostoyanie i perspektivy* [Expert systems: state of arts and perspectives]. Moscow: Nauka, 1989, pp. 20–30. (In Russian)

Nepejvoda, 2000 – Nepejvoda, N.N. *Prikladnaya logika* [Applied logics]. Nsk: NGUPress, 2000. 521 pp. (In Russian)

Nepejvoda, 2008 – Nepejvoda, N.N. "Logika kak central'noe zveno v obuchenii informatikov i analitikov" [Logic as crucial chain in tutoring of informatic and system analysis specialists], *Sovet Rektorov*, 2008, No. 3, 4, pp. 6–12, 7–15. (In Russian)

Nepejvoda, 2017 – Nepejvoda, N.N. "Formalizaciya i deformalizaciya kak neot'emlemye chasti logiki" [Formalization and deformalization as part of logics], in *Desyatye smirnovskie chteniya po logike* [Tenth Smirnov Readings on logic]. Moscow: Sovremennye Tetradi, 2017, pp. 105–106. (In Russian)

Nepejvoda, 2018 – Nepejvoda, N.N. "Formalization as the Immanent Part of Logical Solving", *Logical investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 129–145.

Pfangzal, 1973 – Pfangzal, J. *Theory of Measurement*, 2nd ed. Physica-Verlag, 1973. 236 pp.

Roberts, 1985 – Roberts, F.S. *Measurement Theory with Applications to Decision-making, Utility, and the Social Sciences.* Cambridge University Press, I985. 420 pp.

Scientometrics, 1978 – *Scientometrics.* Akademiai Kiado, Springer Science, Business Media, 1978.

Stevens, 1946 – Stevens, S.S. "On the Theory of Scales of Measurement", *Science New Series*, Vol. 103, No. 2684 (Jun. 7, 1946), pp. 677–680.

Pym, 2013 – Pym, A. "Translation Skill-Sets in a Machine-Translation Age", *Meta: Translators' Journal*, Vol. 58, No. 3, pp. 487–503. [`http://id.erudit.org/iderudit/1025047ar`, accessed on 18.09.2018].

Uchida et al, 2005 – Uchida H., Zhu M., Della Senta T. *Universal Networking Language*, 2nd ed. UNDL Foundation, 2005.

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла).

• При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 20 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списоки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять по адресу
`logicalinvestigations@gmail.com`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format).

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 20 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be e-mailed to the following address:
`logicalinvestigations@gmail.com`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2019. Том 25. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*, *Ю.В. Хорькова*

Корректор: *Г.Н. Барышева*

Художник: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 21.05.2019.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста исользован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 10,8. Уч.-изд. л. 8,3. Тираж 1 000 экз. Заказ № 09.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Свободная цена

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`