Логические исследования
2018. Т. 24. № 2. С. 85–91
УДК 510.644

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 2, pp. 85–91
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-85-91

Л.Ю. Девяткин

О континуальном классе четырехзначных максимально паранормальных логик*

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: В современной философской логике важное место занимает проблема противоречивой или неполной информации. Широкое применение в этой области получили методы многозначной логики. Одним из перспективных направлений является изучение четырехзначных логик, допускающих работу как с противоречивой, так и с неполной информацией одновременно. Данная работа лежит именно в рамках этого подхода.

Эта статья посвящена континуально бесконечному множеству четырехзначных максимально паранормальных логик. Я описываю четырехзначную матрицу, которая задает логику $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, и демонстрирую, что, хотя она ни сильно максимально паранепротиворечива, ни сильно максимально параполна, существует континуально много четырехзначных языковых расширений этой логики, обладающих данными свойствами.

Решение поставленной задачи организовано следующим образом. Сначала я строю четырехзначные матрицы логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. Оказывается, что матрица $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ представляет собой функциональное расширение как первой, так и второй. Из этого следует, что $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ есть языковой вариант общего языкового расширения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. Известно, что $\mathbf{P}^1$ и все ее языковые расширения сильно максимально паранепротиворечивы. Поскольку логика $\mathbf{I}^1$ дуальна $\mathbf{P}^1$, как она сама, так и все ее языковые расширения сильно максимально параполны. Однако, хотя $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ погрузимы в $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, неверно, что она сильно максимально паранепротиворечива или сильно максимально параполна. В то же время этими свойствами обладает ряд ее языковых расширений.

Далее вычисляется нижняя граница числа всех языковых расширений $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ интересующего нас типа. Для этого я показываю, что множество всех операций, определимых в матрице $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, обогащенной операторами $\bot_f$ и $\top_t$, имеет континуальное множество попарно различных замкнутых надмножеств. Строим замкнутый класс функций F четырехзначной логики, имеющий счетный базис. Такой класс содержит континуально много попарно различных подклассов. В заключение демонстрируем, что никакие два подкласса F, дополненные операциями матрицы $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, $\bot_f$ и $\top_t$, не окажутся эквивалентны при замыкании относительно суперпозиции.

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: *Девяткин Л.Ю.* О континуальном классе четырехзначных максимально паранормальных логик // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 67–71.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность, многозначная логика

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* О континуальном классе четырехзначных максимально паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 85–91. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-85-91

Для экономии места опускаю элементарные определения. Необходимый для понимания работы материал изложен в указанных далее работах. Определения языка, следования, пропозициональной логики, логической матрицы, гомоморфизма, гомоморфного прообраза, языкового и дедуктивного расширения логики можно найти в книге Р. Вуйчицкого [Wójcicki, 1988, p. 7–35, 56–75, 189–220]. Определения паранепротиворечивости, параполноты, паранормальности, а также максимальности применительно к этим понятиям приводятся в статье А. Аврона и О. Ариэли [Arieli, Avron, 2017]. Используемые понятия, связанные с замкнутыми классами функций, изложены в книге Д. Лау [Lau, 2006].

Начнем с рассмотрения логики $\mathbf{P}^1$ и ее матрицы.

$$\mathcal{P}^1 = \langle \{1, \mathbf{t}, 0\}, \wedge_1, \vee_1, \supset_1, \neg_1, \{1, \mathbf{t}\} \rangle.$$

$\wedge_1$	1	$\mathbf{t}$	0
1	1	1	0
$\mathbf{t}$	1	1	0
0	0	0	0

$\vee_1$	1	$\mathbf{t}$	0
1	1	1	1
$\mathbf{t}$	1	1	1
0	1	1	0

$\supset_1$	1	$\mathbf{t}$	0
1	1	1	0
$\mathbf{t}$	1	1	0
0	1	1	1

	$\neg_1$
1	0
$\mathbf{t}$	1
0	1

Как показали А. Аврон, О. Ариэли и А. Заманская [Arieli, Avron, 2017], логика $\mathbf{P}^1$, задаваемая матрицей $\mathcal{P}^1$, а также все ее языковые расширения сильно максимально паранепротиворечивы. Логика называется сильно максимально паранепротиворечивой, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не паранепротиворечиво.

Нетрудно построить и четырехзначную матрицу логики $\mathbf{P}^1$. Для этого добавим такое промежуточное значение «$\mathbf{f}$», что его строка и столбец совпадут с таковыми для значения «0».

$$\mathcal{P}^{1\mathbf{f}} = \langle \{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_2, \{1, \mathbf{t}\} \rangle.$$

$\wedge_2$	1	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	0
1	1	1	0	0
$\mathbf{t}$	1	1	0	0
$\mathbf{f}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	0
1	1	1	1	1
$\mathbf{t}$	1	1	1	1
$\mathbf{f}$	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	0
1	1	1	0	0
$\mathbf{t}$	1	1	0	0
$\mathbf{f}$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_2$
1	0
$\mathbf{t}$	1
$\mathbf{f}$	1
0	1

По построению, матрица $\mathcal{P}^{1\mathbf{f}}$ есть гомоморфный прообраз $\mathcal{P}^1$ относительно отображения h: $h(\mathbf{f}) = 0$ и $h(x) = x$, если $x \neq \mathbf{f}$. Как следствие, матрица $\mathcal{P}^{1\mathbf{f}}$ задает логику $\mathbf{P}^1$. Эта матрица рассматривается А.С. Карпенко и Н.Е. Томовой как $\mathcal{M}_8$ [Карпенко, Томова, 2016, с. 69].

Теперь рассмотрим матрицу, дуальную $\mathcal{P}^1$:

$$\mathcal{I}^1 = \langle\{1, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_3, \vee_3, \supset_3, \neg_3, \{1\}\rangle.$$

$\wedge_3$	1	**f**	0
1	1	0	0
f	0	0	0
0	0	0	0

$\vee_3$	1	**f**	0
1	1	1	1
f	1	0	0
0	1	0	0

$\supset_3$	1	**f**	0
1	1	0	0
f	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg_3$
1	0
f	0
0	1

В силу дуальности [Brunner, Carnielli, 2005], логика $\mathbf{I}^1$, задаваемая матрицей $\mathcal{I}^1$, а также все ее языковые расширения сильно максимально параполны. Называем логику сильно максимально параполной, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не параполно.

Как и в предыдущем случае, построим четырехзначный гомоморфный прообраз $\mathcal{I}^1$, на этот раз добавив значение «**t**», строка и столбец для которого совпадают с таковыми для «1». Кроме того, сделаем «**t**» выделенным значением.

$$\mathcal{I}^{1\mathbf{t}} = \langle\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_4, \{1, \mathbf{t}\}\rangle.$$

$\wedge_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	1	1
t	1	1	1	1
f	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_4$
1	0
t	0
f	0
0	1

Эта матрица рассматривается Томовой и Карпенко как $\mathcal{M}_{13}$ [Карпенко, Томова, 2016, с. 69].

Заметим, что матрицы $\mathcal{P}^{1\mathbf{f}}$ и $\mathcal{I}^{1\mathbf{t}}$ различаются определениями отрицаний, а бинарные операции и классы выделенных значений в них совпадают. Как вытекает из работ П. Войтыляка [Wojtylak, 1981] и Р. Вуйчицкого [Wójcicki, 1988, p. 56–75], если матрицы двух логик с совпадающими множествами-носителями и классами выделенных значений имеют общее функциональное расширение, то эти логики имеют общее языковое расширение. В работе А.С. Карпенко и Н.Е. Томовой [Карпенко, Томова, 2016, с. 76] показано, что таким функциональным расширением является матрица $\mathcal{I}^1\mathcal{P}^1$, являющаяся частью последовательности паранормальных матриц, предложенной В. Фернандесом [Fernández, 2001, p. 69].

$$\mathcal{I}^1\mathcal{P}^1 = \langle\{1, \mathbf{t}, \mathbf{f}, 0\}, \wedge_2, \vee_2, \supset_2, \neg_5, \{1, \mathbf{t}\}\rangle.$$

$\wedge_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\vee_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	1	1
t	1	1	1	1
f	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\supset_2$	1	**t**	**f**	0
1	1	1	0	0
t	1	1	0	0
f	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$\neg_4$
1	0
t	1
f	0
0	1

Аксиоматизация $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ также приводится В. Фернандесом в процитированной работе [Fernández, 2001, p. 121–123].

Итак, паранормальная логика $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ представляет собой языковой вариант общего языкового расширения логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. Однако она не является ни максимально параполной, ни максимально паранепротиворечивой. Дело в том, что как в $\mathbf{P}^1$, так и в $\mathbf{I}^1$ имеет место закон $(p \wedge \neg p) \supset (q \vee \neg q)$. Но эта формула принимает значение «0» в $\mathcal{I}^1\mathcal{P}^1$ при $p = \mathbf{t}$; $q = \mathbf{f}$. Таким образом, $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ имеет собственное дедуктивное расширение, которое паранепротиворечиво и параполно. В то же время имеет место следующий факт. Пусть функции $\perp_f$ и $\top_t$ отвечают следующим условиям:

- $\perp_f x = \mathbf{f}$, если $x = \mathbf{t}$, и $\perp_f x = 0$ в противном случае;
- $\top_t x = \mathbf{t}$, если $x = \mathbf{f}$, и $\top_t x = 1$ в противном случае.

Тогда любое функциональное расширение матрицы $\mathcal{I}^1\mathcal{P}^1$, содержащее $\perp_f$ и $\top_t$, задает языковое расширение $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, которое одновременно максимально параполно и максимально паранепротиворечиво относительно $\neg_4$. Покажем, что класс таких расширений имеет мощность континуум. Для этого рассмотрим функции следующего вида:

- $f_n(x_1, \ldots, x_n) = 1$, если $x_i = \mathbf{t}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, и $x_j = 1$ для всех $j \neq i$;
- $f_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{t}$, если $x_1 = \cdots = x_n = \mathbf{t}$;
- $f_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{f}$, если $x_1 = \cdots = x_n = \mathbf{f}$;
- $f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в противном случае.

Как следует из Леммы 14.10.4 в [Lau, 2006, p. 426], такие функции образуют счетный базис замкнутого класса функций $F = [\{f_i | i \geq 2\}]$, то есть $f_k \notin F_k = [\{f_i | i \geq 2\} \setminus \{f_k\}]$ для всех f_k. Это дает нам континуальное множество замкнутых классов функций. Теперь обозначим как G множество всех функций, выразимых посредством $\vee_2$, $\wedge_2$, $\supset_2$, $\neg_4$, $\perp_f$ и $\top_t$. Нетрудно убедиться, что для всех f_k также имеет место $f_k \notin [G \cup F_k]$. Допустим обратное: пусть f_k выражается формулой $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, где $\Phi \in G \cup F_k$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — либо переменные из списка $x_1, \ldots, x_k$, либо функции из $G \cup F_k$. Если $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ содержит хотя бы одну функцию из G, то $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m) \neq \mathbf{t}$ при $x_1 = \cdots = x_n = \mathbf{t}$ или $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m) \neq \mathbf{f}$ при $x_1 = \cdots = x_n = \mathbf{f}$. Но это невозможно по определению f_k. Следовательно, в $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ могут входить только функции из F_k. Однако это снова ведет к противоречию. Таким образом, существует континуум четырехзначных языковых расширений $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, которые одновременно максимально параполны и максимально паранепротиворечивы. Описанные расширения $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ попарно различны, то есть не являются языковыми вариантами друг друга, так как в расширениях $\mathbf{P}^1$ не имеет места принцип замены.

Литература

Карпенко, Томова, 2016 – *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

Arieli, Avron, 2017 – *Arieli O., Avron A.* Four-Valued Paradefinite Logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No 6. P. 1087–1122.

Arieli, Avron, Zamansky, 2011 – *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximal and Premaximal Paraconsistency in the Framework of Three-Valued Semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97. No. 1. P. 31–60.

Brunner, Carnielli, 2005 – *Brunner A.B., Carnielli W.A.* Anti-Intuitionism and Paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

Fernández, 2001 – *Fernández V.L.* Semântica de Sociedades para Lógicas n-valentes. Campinas: IFCH-UNICAMP. 2001. 126 p.

Lau, 2006 – *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer. 2006. 670 p.

Wojtylak, 1981 – *Wojtylak P.* Mutual interpretability of sentential logic I // Reports on Mathematicl Logic. 1981. Vol. 11. P. 69–89.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

Leonid Y. Devyatkin

On a continual class of four-valued maximally paranormal logics

Leonid Y. Devyatkin
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The problem of contradictory or incomplete information has an important place in modern philosophical logic. The methods of many-valued logic have been widely applied in this field. One promising direction is the study of four-valued logics, which facilitate working with contradictory as well as incomplete information simultaneously. This work lies within this approach.

This paper is devoted to a set of continuum cardinality consisting of maximum strong four-valued paranormal logics. I describe the four-valued matrix that induces the logic $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ and demonstrate that, although it is neither maximally paraconsistent nor maximally paracomplete in the strong sense, there are continuum-many of its four-valued linguistic extensions that possess such properties.

The solution to the problem is structured as follows. First, I construct the four-valued matrices for the logics $\mathbf{P}^1$ and $\mathbf{I}^1$. It turns out that the matrix of $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ constitutes a functional extension of the former as well as the latter. This entails that $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ is a linguistic variant of a common linguistic extension of $\mathbf{P}^1$ and $\mathbf{I}^1$. It is known that $\mathbf{P}^1$ and all of its linguistic extensions are maximally paraconsistent in the strong sense. Since $\mathbf{I}^1$ is the dual of $\mathbf{P}^1$, it and all of its linguistic extensions are maximally paracomplete in the strong sense. However, while $\mathbf{P}^1$ and $\mathbf{I}^1$ are embeddable into $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, it is not the case that it is maximally paraconsistent or maximally paracomplete. At the same time, some of its linguistic extensions do have such properties.

Further, the lower boundary of the total amount of linguistic extensions of $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ of the relevant type is established. For this I show that the set of all operations definable in the matrix of $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ supplemented with the operators $\bot_f$ and $\top_t$ has continuum-many pairwise distinct closed supersets. The closed class F of functions of four-valued logic with the countable basis is constructed. Such a class contains continuum-many pairwise distinct subclasses. Finally, it is demonstrated that no two subclasses of F supplemented with operations of the matrix of $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, $\bot_f$ and $\top_t$ will be equivalent upon closure with respect to superposition.

Keywords: paraconsistnecy, paracompleteness, paranormality, many-valued logic

For citation: Devyatkin L.Yu. “O kontinual’nom klasse chetyrekhznachnykh maksimal’no paranormal’nykh logik” [On a continual class of four-valued maximally paranormal logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 85–91. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-85-91 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Devyatkin L.Yu. "O kontinual'nom klasse chetyrekhznachnykh maksimal'no paranormal'nykh logik" [On a continual class of four-valued maximally paranormal logics], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 67–71.

References

Arieli, Avron, 2017 – Arieli, O., Avron, A. "Four-valued paradefinite logics", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No 6, pp. 1087–1122.

Arieli, Avron, Zamansky, 2011 – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. "Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics", *Studia Logica*, 2011, Vol. 97, No. 1, pp. 31–60.

Brunner, Carnielli, 2005 – Brunner, A.B., Carnielli, W.A. "Anti-intuitionism and paraconsistency", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, No. 1, pp. 161–184.

Fernández, 2001 – Fernández, V.L. *Semântica de Sociedades para Lógicas n-valentes.* Campinas: IFCH-UNICAMP, 2001. 126 pp. (In Portugese)

Karpenko, Tomova, 2016 – Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

Lau, 2006 – Lau, D. *Function Algebras on Finite Sets: Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 2006. 670 pp.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

Wojtylak, 1981 – Wojtylak, P. "Mutual interpretability of sentential logic I", *Reports on Mathematicl Logic*, 1981, Vol. 11. pp. 69–89.