Логические исследования
2018. Т. 24. № 2. С. 151–157
УДК 164

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 2, pp. 151–157
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-151-157

В.И. Шалак

# Слабое отношение следования между $\lambda$-термами*

**Владимир Иванович Шалак**
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.
E-mail: shalack@gmail.com

**Аннотация:** Язык $\lambda$-исчисления находит широкое применение для решения задач в логике, информатике, лингвистике и искусственном интеллекте. Само $\lambda$-исчисление строится вокруг базисного отношения между термами, которое называется $\beta$-редукцией. В предлагаемом докладе для типизированного в смысле Карри $\lambda$-исчисления формулируется более слабое отношение между термами, которое может как иметь самостоятельное значение, так и позволить установить более тонкие связи между логикой и $\lambda$-исчислением. Основная идея заключается в том, что при приписывании терму X типа $\alpha$ относительно контекста $\Gamma$, что записывается в виде $\Gamma \vdash X : \alpha$, понятие контекста играет роль, аналогичную понятию модели в логике. Если в логике выражение $M \vDash A$ означает, что формула $A$ истинна в модели $M$, то в типизированном $\lambda$-исчислении выражение $\Gamma \vdash X : \alpha$ означает, что в контексте $\Gamma$ терму $X$ приписан тип $\alpha$, и этот терм имеет значение, которое может быть вычислено. В логике отношение следования между формулами $A$ и $B$ определяют как $A \vDash B \Leftrightarrow \forall M(M \vDash A \Rightarrow M \vDash B)$. Если перенести эту схему в $\lambda$-исчисление, то отношение $\lambda$-следования между темами может быть определено как $X \vDash_\lambda Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx[\exists\alpha(\Gamma \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists\beta(\Gamma \vdash Y : \beta)]$. Смысл этого отношения заключается в том, что в каждом контексте, в котором терму $X$ может быть приписан некоторый тип, терму $Y$ также может быть приписан некоторый тип. Иными словами, если вычислима функция, представленная термом $X$, то вычислима функция, представленная термом $Y$. Отношение $\lambda$-следования обладает многими свойствами, присущими классическому отношению следования между формулами логики, а также рядом новых свойств, характерных для $\lambda$-исчисления с типами.

**Ключевые слова:** $\lambda$-исчисление с типами, отношение следования

**Для цитирования:** *Шалак В.И.* Слабое отношение следования между $\lambda$-термами // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 151–157. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-151-157

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: *Шалак В.И.* Слабое отношение следования между $\lambda$-термами // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 58–61.

# 1. Бестиповое $\lambda$-исчисление

Теория бестипового $\lambda$-исчисления подробно изложена в [Барендрегт, 1985]. Напомним определения его базовых понятий — исходных символов, термов, аксиом и правил вывода.

## 1.1. Исходные символы

1. $Var$ — множество переменных;
2. $\lambda$ — оператор ламбда-абстракции;
3. ), ( — скобки.

## 1.2. Термы

1. Всякая переменная $x \in Var$ есть терм;
2. Если $X$ и $Y$ — термы, то $(XY)$ есть терм;
3. Если $x \in Var$ и $Y$ — терм, то $(\lambda x.Y)$ — терм.

Терм $\lambda x.Y$ понимается как предписание для вычисления некоторой функции. Применение $\lambda x.Y$ к терму $X$ записывается как $(\lambda x.Y)X$, а результатом его будет терм $Y[X/x]$, т. е. подстановка терма $X$ вместо всех свободных вхождений переменной $x$ в терм $Y$ при выполнении ограничения, что после подстановки ни одна свободная переменная терма $X$ не оказывается связанной. Аналогичные ограничения на подстановку термов имеют место и в логике предикатов. Они удовлетворяются автоматически, если все свободные переменные отличны от связанных.

Простое первопорядковое $\lambda$-исчисление задается двумя аксиомами и четырьмя правилами вывода.

## 1.3. Аксиомы

1. $(\lambda x.Y)X \twoheadrightarrow Y[X/x]$ — $\beta$-редукция
2. $X \twoheadrightarrow X$

## 1.4. Правила вывода

1. $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow ZX \twoheadrightarrow ZY$
2. $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow XZ \twoheadrightarrow YZ$
3. $X \twoheadrightarrow Y,\ Y \twoheadrightarrow Z \Rightarrow X \twoheadrightarrow Z$
4. $X \twoheadrightarrow Y \Rightarrow \lambda x.X \twoheadrightarrow \lambda x.Y$

Определение доказательства — обычное.

## 2. Типизация в стиле Карри

При обычном понимании функций мы связываем с ними области определения и области значений. Если $f$ — некоторая функция, то запись $f : A \to$B служит обозначением того, что множество $A$ — область ее определения, множество $B$ — область значений, а $A \to B$ понимается как множество всех функций из $A$ в $B$, т. е. $B^A$. Если $x \in A$, то $f(x) \in B$. Более подробно с типизацией в стиле Карри можно ознакомиться в [Hindley, Seldin, 2008].

В языке $\lambda$-исчисления нет явного указания на типы значений термов, но мы бы хотели иметь возможность в случае необходимости приписать их. Для этого в метаязыке определим множество меток, которые будем называть *типами*.

Пусть $AType$ — некоторое множество *атомарных типов*. Тогда множество всех типов $Type$ определяется по индукции:

1. Если $\alpha \in AType$, то $\alpha \in Type$;
2. Если $\alpha, \beta \in Type$, то $(\alpha \to \beta) \in Type$;
3. Ничто другое не принадлежит $Type$.

Пусть $X : \alpha$ будет обозначать, что терму $X$ приписан тип $\alpha$.

*Контекстом* $\Gamma$ будем называть множество переменных, каждой из которых приписан тип. При этом если $x : \alpha \in \Gamma$ и $x : \beta \in \Gamma$, то $\alpha = \beta$. Множество всех контекстов обозначим посредством $Ctx$.

Индуктивное определение приписывания типов $\lambda$-термам относительно контекста $\Gamma$ имеет следующий вид.

$T.1$ $\quad \dfrac{x : \alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \alpha}$

$T.2$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash X : \alpha \to \beta,\ \Gamma \vdash Y : \alpha}{\Gamma \vdash (XY)\beta}$

$T.3$ $\quad \dfrac{\Gamma,\ x : \alpha \vdash Y : \beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.Y) : \alpha \to \beta}$

Правило $T.1$ — базис индукции, а правила $T.2$ и $T.3$ — индукционный шаг.

Будем называть терм $X$ *типизируемым*, если существует контекст $\Gamma$ и такой тип $\alpha$, что $\Gamma \vdash X : \alpha$. Предикат *быть типизируемым* термом разрешим, т. е. существует алгоритм, который позволяет по каждому типизируемому терму $X$ построить такой контекст $\Gamma$ и тип $\alpha$, что $\Gamma \vdash X : \alpha$. Более того, существует алгоритм, который позволяет по заданному терму

$X$ построить в определенном смысле минимальный контекст с требуемыми свойствами.

Например, если $X$ и $Y$ — переменные, а $(XY)$ — терм, то одним из контекстов, который позволяет приписать ему тип, будет $\{X : \alpha \to \beta,\ Y : \beta\}$. Тогда сам терм $(XY)$ будет иметь тип $\beta$, т. е. $(XY) : \beta$. В то же время, согласно определению $T.1 - T.3$ приписывания типов $\lambda$-термам, терму $\lambda X.(\lambda Y.(XY))$ может быть приписан некоторый тип $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ в любом контексте, в том числе и пустом.

Вместе с тем можно показать, что ни один терм вида $(XX)$ не является типизируемым, т. е. не существует контекста, в котором ему может быть приписан какой-либо тип.

## 3. Следование в классической логике

Одним из центральных понятий классической логики является понятие следования/выводимости. В ней имеет место следующая цепочка эквивалентностей:

$$A \vdash B \Leftrightarrow A \vDash B \Leftrightarrow \forall M(M \vDash A \Rightarrow M \vDash B) \Leftrightarrow \forall \Gamma(\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash B),$$

где переменная $M$ пробегает по моделям, а $\Gamma$ — по множествам формул. По аналогии можно определить новое отношение между термами $\lambda$-исчисления, более слабое, чем отношение редукции в $\lambda$-исчислении.

## 4. $\lambda$-следование

Наше определение слабого отношения $\lambda$-следования '$\vDash_\lambda$' между термами имеет вид:

$$X \vDash_\lambda Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx[\exists\alpha(\Gamma| \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists\beta(\Gamma \vdash Y : \beta)]$$

Очевидно, что правая часть определения отношения '$\vDash_\lambda$' эквивалентна следующей формулировке в терминах отношения включения между множествами:

$$\{\Gamma : \exists\alpha(\Gamma \vdash X : \alpha)\} \subseteq \{\Gamma : \exists\beta(\Gamma \vdash Y : \beta)\}$$

Смысл отношения $X \vDash_\lambda Y$ заключается в том, что если терм/предписание $X$ типизируем (может быть вычислен в некотором контексте), то он содержит в качестве составных частей такие более простые термы/предписания, из которых может быть составлен и в этом же контексте вычислен терм/предписание $Y$. При этом типы и значения термов $X$ и $Y$ в общем случае могут не совпадать.

Можно показать, что для типизируемых термов отношение '$\vDash_\lambda$' обладает следующими свойствами:

$R.1\ \varnothing \vdash N \Rightarrow M \vDash_\lambda N$
$R.2\ (\lambda x.M)N \vDash_\lambda M[N/x]$
$R.3\ M \vDash_\lambda M$
$R.4\ M \vDash_\lambda N,\ N \vDash_\lambda L \Rightarrow M \vDash_\lambda L$
$R.5\ MN \vDash_\lambda M$
$R.6\ MN \vDash_\lambda N$
$R.7\ M \vDash_\lambda N \Rightarrow M \vDash_\lambda \lambda x.N$
$R.8\ \lambda x.M \vDash_\lambda N \Rightarrow M \vDash_\lambda N$
$R.9\ M \vDash_\lambda N \Rightarrow \lambda x.M \vDash_\lambda \lambda x.N$
$R.10\ M \vDash_\lambda \lambda x.(NL) \Rightarrow M \vDash_\lambda \lambda x.N$
$R.11\ M \vDash_\lambda \lambda x.(NL) \Rightarrow M \vDash_\lambda \lambda x.L$
$R.12\ M \vDash_\lambda \lambda x.N \Rightarrow M \vDash_\lambda N$ — если $x \notin FV(N)$

Свойство $R.1$ говорит о том, что замкнутые типизируемые термы ведут себя по аналогии с общезначимыми формулами логики — они следуют из любого терма.

О том, что отношение $\beta$-редукции включено в отношение $\lambda$-следования, говорит свойство $R.2$.

$R.3$ и $R.4$ — рефлексивность и транзитивность следования.

Свойства $R.5$ и $R.6$ позволяют переходить от термов вида $(XY)$ к подтермам $X$ и $Y$, совершать разборку сложного терма $(XY)$.

Свойства $R.7 - R.12$ описывают взаимодействие следования и оператора лямбда-абстракции $\lambda$.

Существует аналогия между поведением нетипизируемых термов и поведением противоречивых формул логики. Как противоречивые формулы не имеют ни одной модели, в которых они истинны, так и для нетипизируемых термов не существует ни одного контекста, в котором им может быть приписан какой-нибудь тип. Перечень свойств отношения следования пополнится, по крайней мере, еще тремя $R.13 - R.15$.

$R.13\ \neg\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \vdash : \alpha) \Rightarrow X \vDash_\lambda M$
$R.14\ M \vDash_\lambda N \Rightarrow ML \vDash_\lambda N$
$R.15\ M \vDash_\lambda N \Rightarrow LM \vDash_\lambda N$

Отношение $\lambda$-следования разрешимо, т. е. рекурсивно. Это позволяет поставить вопрос о его аксиоматизации в виде исчисления.

## Литература

Барендрегт, 1985 – *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985. 606 с.

Hindley, Seldin, 2008 – *Hindley R.J., Seldin P.* Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction. Cambridge University Press, 2008. 345 p.

Vladimir I. Shalack

# Weak consequence relation between $\lambda$-terms

**Vladimir I. Shalack**
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

**Abstract:** The language of the $\lambda$-calculus has many applications for solving different problems in logic, information technology, linguistics and artificial intelligence. The $\lambda$-calculus is based on the basic relation between terms, which is called $\beta$-conversion. In the presented report, we formulate a weaker relation between the $\lambda$-terms, which makes it possible to establish more subtle connections between logic and $\lambda$-calculus. The basic idea is that when we assign a type $\alpha$ to a term $X$ relative to the context $\Gamma$, which is written in the form $\Gamma \vdash X : \alpha$, the concept of context plays a role analogous to the concept of a model in logic. If in logic the expression $M \vDash A$ means that the formula $A$ is true in the model $M$, then in the $\lambda$-calculus with types the expression $\Gamma \vdash X : \alpha$ means that in the context $\Gamma$ the term $X$ is assigned the type $\alpha$, and this term has a value that can be computed. In logic, the relation of logical consequence between the formulas $A$ and $B$ is defined as $A \vDash B \Leftrightarrow \forall M(M \vDash A \Rightarrow M \vDash B)$. If we transfer this scheme to the $\lambda$-calculus, then the $\lambda$-consequence relation between terms can be defined as $X \vDash_\lambda Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx[\exists\alpha(\Gamma \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists\beta(\Gamma \vdash Y : \beta)]$. The meaning of this relation is that in every context in which we can assign some type to the $X$, we can also assign some type to the term $Y$. In other words, if the function represented by the term $X$ is computable, then the function represented by the term $Y$ is also computable. The $\lambda$-consequence between terms relation has many properties analogous to the classical logical consequence relation between formulas, as well as a number of new properties, characteristic for the $\lambda$-calculus with types.

**Keywords:** $\lambda$-calculus with types, consequence relation

**For citation:** Shalack V.I. “Slaboe otnoshenie sledovaniya mezhdu $\lambda$-termami” [Weak consequence relation between $\lambda$-terms], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 151–157. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-151-157 (In Russian)

**Acknowledgements.** The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Shalack V.V. “Slaboe otnoshenie sledovaniya mezhdu $\lambda$-termami” [Weak consequence relation between $\lambda$-terms], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 58–61. (In Russian)

## References

Barendregt, 1985 – Barendregt, Kh. *Lambda-ischislenie. Ego sintaksis i semantika* [Lambda-Calculus. Its syntax and semantics]. Moscow: Mir, 1985. 606 pp. (In Russian)

Hindley, Seldin, 2008 – Hindley, R.J., Seldin, P. *Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction.* Cambridge University Press, 2008. 345 pp.