Логические исследования
2018. Т. 24. № 2. С. 123–128
УДК 510.644

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 2, pp. 123–128
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-123-128

Н.Н. Преловский

Бесконечнозначная логика Лукасевича и ряды Фарея

Николай Николаевич Преловский
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.
E-mail: mingkemingfeichangming@gmail.com

Аннотация: В статье будет рассказано о связи между критерием Мак-Нотона для бесконечнозначной логики Лукасевича, простыми числами и рядами Фарея. Дано определение простого числа в терминах бесконечнозначной логики Лукасевича. В соответствии с критерием Мак-Нотона, множество функций бесконечнозначной логики Лукасевича совпадает с множеством непрерывных кусочно-линейных функций особого вида. В докладе показано, что простота числа n зависит от существования таких функций бесконечнозначной логики Лукасевича, что ограничение каждой из них на соответствующую конечнозначную логику Лукасевича совпадает со значением функций $N_{1/n}(x)$. При этом каждая такая функция имеет кусочно-линейные эквиваленты, линейные коэффициенты которых могут быть найдены с помощью подходящих рядов Фарея. А именно, возникает возможность охарактеризовать все линейные функции, проходящие через точку с координатами $(\frac{i}{n}, \frac{1}{n})$. Действительно, все такие функции описываются уравнениями вида $f(x) = b + kx$ с целыми коэффициентами b и k, что $\frac{1}{n} = b + k\frac{i}{n}$, что позволяет отыскать данные коэффициенты в подходящих рядах Фарея.

Ключевые слова: многозначная логика, логика Лукасевича, простые числа, ряды Фарея

Для цитирования: *Преловский Н.Н.* Бесконечнозначная логика Лукасевича и ряды Фарея // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 123–128. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-123-128

1. Введение

В ряде работ В.К. Финна и А.С. Карпенко (см. [Финн, 1976], [Карпенко, 2010]) установлена связь между конечнозначными логиками Лукасевича и простыми числами. Так, В.К. Финном была доказана теорема о том, что класс функций, соответствующий $n+1$-значной логике Лукасевича $Ł_{n+1}$, является предполным, если и только если n есть простое число. А.С. Карпенко была построена матричная логика K_{n+1}, содержащая тавтологии в том и только в том случае, когда n является простым числом. При этом класс функций K_{n+1} совпадает с классом функций $Ł_{n+1}$ только при условии простоты n.

С учетом того факта, что бесконечнозначная логика Лукасевича $Ł_\infty$ является естественным обобщением конечнозначных логик Лукасевича $Ł_{n+1}$ при $n < \aleph_0$, а класс ее тавтологий является пересечением классов тавтологий этих логик, может быть рассмотрен вопрос о характеризации простых чисел посредством $Ł_\infty$. Забегая вперед, отметим, что поиск ответа на данный вопрос приводит к выявлению связи между выразимыми в бесконечнозначной логике Лукасевича функциями и рядами Фарея.

2. Критерии Мак-Нотона для логик Лукасевича

Под конечнозначной логикой Лукасевича $Ł_{n+1}$ будем понимать замкнутое множество функций, выразимых в логической матрице

$$\mathfrak{M}^{Ł}_{n+1} = \langle V_{n+1}, \{1\}, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg \rangle \,,$$

где $V_{n+1} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$, $\{1\}$ есть одноэлементное множество выделенных значений, а операции определяются следующим образом:

- $x \rightarrow y$ есть n, если $x \leq y$, и $1 - x + y$, в противном случае;
- $x \vee y$ есть $max(x, y)$;
- $x \wedge y$ есть $min(x, y)$;
- $\neg x$ есть $1 - x$.

Отметим, что операции $\vee$ и $\wedge$ не являются независимыми и выразимы с помощью $\rightarrow$ и $\neg$.

Класс функций, выразимых в $Ł_{n+1}$, характеризуется конечнозначным критерием Мак-Нотона:

Функция $f(\frac{i_1}{n}, ..., \frac{i_m}{n}) = \frac{i}{n}$ выразима посредством формулы в $Ł_{n+1}$, если и только если наибольший общий делитель $i_1, ..., i_m$ и n является также делителем i.

Бесконечнозначной (счетнозначной) логикой Лукасевича $Ł_\infty$ называется класс функций, выразимых в логической матрице

$$\mathfrak{M}^{Ł}_{\infty} = \langle [0;1], \{1\}, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg \rangle \,,$$

где $[0; 1]$ есть множество всех рациональных чисел $0 \leq i \leq 1$, а операции определяются аналогично конечнозначному случаю.

На бесконечнозначный случай критерий Мак-Нотона обобщается следующим образом:

Функция $f(x_1, ..., x_m)$ выразима посредством формулы в $Ł_\infty$, если и только если:

1. f является непрерывной и $0 \le f(x_1, ..., x_m) \le 1$, где $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, .., m$;

2. существует конечное число отличных друг от друга полиномов $\lambda_1, ..., \lambda_\mu$, каждый из которых имеет форму $\lambda_j = b_j + k_1 x_1 + .. + k_{m_j} x_m$, где все b и k есть такие целые числа, что для каждого набора $x_1, ..., x_m$, $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, ..., m$, существует j, $1 \le j \le \mu$, такое, что $f(x_1, ..., x_m) = \lambda_j(x_1, ..., x_m)$;

3. для произвольных x_i, $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, ..., m$ имеют место неравенства $0 \le f(x_1, ..., x_m) \le 1$.

Из бесконечнозначного критерия Мак-Нотона, в частности, следует, что содержащееся в $Ł_\infty$ множество одноместных функций $f(x)$ совпадает с множеством всех непрерывных и состоящих из конечного числа линейных интервалов вида $y = b + kx$ с целыми b и k кусочно-линейных функций $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$, сохраняющих множество $\{0, 1\}$.

Рассмотрим теперь функции $N_i(x)$, определенные следующим условием:

$$N_i(x) = \begin{cases} i & \text{при } \frac{1}{n} \le x \le \frac{n-1}{n}; \\ \neg x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из предполноты $Ł_{n+1}$ при простом n и конечнозначного критерия Мак-Нотона следует, что все операторы $N_i(x)$ выразимы в $Ł_{n+1}$, если и только если n есть простое число. Особое положение при этом занимают функции $N_{\frac{1}{n}}(x)$, поскольку их невыразимость или выразимость в $Ł_{n+1}$ является необходимым и достаточным условием для вывода о непростоте или простоте n соответственно.

Действительно, если n есть составное число, то рассмотрим являющееся его делителем число $k \ne 1$. Очевидным образом выполняется, что $0 < \frac{k}{n} < 1$. Тогда согласно определению $N_{\frac{1}{n}}(x)$, $N_{\frac{1}{n}}(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$. Но, по критерию Мак-Нотона, в этом случае наибольший общий делитель k и n должен быть также и делителем 1, что невозможно. Если же n есть простое число, то функция $N_{\frac{1}{n}}(x)$ выразима в $Ł_{n+1}$ в силу ее предполноты. Рассмотрение остальных случаев осуществляется аналогичным образом.

3. Определение простого числа средствами бесконечнозначной логики Лукасевича

Рассмотрим класс F всех одноместных функций $f(x)$, выразимых посредством формул в $Ł_\infty$.

Выделим множество $F' \subset F$ функций $f(x) \in Ł_\infty$ таких, что их ограничение на множество V_{n+1} совпадает с функцией $N_{\frac{1}{n}}(x)$ для каких-нибудь

n. Заметим, что такие функции существуют для всех простых n и могут быть выражены в $Ł_\infty$ теми же формулами, которыми они выражаются в соответствующих конечнозначных логиках $Ł_{n+1}$.

Теперь критерий простоты числа n может быть сформулирован средствами бесконечнозначной логики Лукасевича следующим образом:

Число n является простым, если и только если существует функция $f(x) \in Ł_\infty$ такая, что $f(x) \in F'$ и ее ограничение на множество V_{n+1} есть $N_{\frac{1}{n}}(x)$.

4. Функции бесконечнозначной логики Лукасевича и ряды Фарея

Последовательностью рядов Фарея называется последовательность упорядоченных множеств следующего вида:

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\dots$$

То есть речь идет о последовательности, где каждое множество F_{n+1} получается из F_n копированием элементов F_n и добавлением дробей вида $\frac{p+r}{q+s}$ между элементами $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, если $q + s \leq n + 1$.

Ряд Фарея F_i, $i \geq 1$, обладает следующими двумя свойствами:

1. F_i содержит все несократимые дроби, знаменатели которых не превышают i.

2. Дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ являются соседними элементами в F_i, если и только если $qr - ps = 1$.

Эти свойства позволяют связать ряды Фарея с критерием простоты числа, выраженным средствами бесконечнозначной логики Лукасевича.

А именно, возникает возможность охарактеризовать все линейные функции, проходящие через точку с координатами $(\frac{i}{n}, \frac{1}{n})$. Действительно, все такие функции описываются уравнениями вида $f(x) = b + kx$ с целыми коэффициентами b и k, что $\frac{1}{n} = b + k\frac{i}{n}$. В этом случае, домножая на n, получаем $1 = bn + ki$. Если n есть простое число, то, отождествляя правую часть последнего равенства с левой частью свойства 2 рядов Фарея, находим требующиеся целые коэффициенты b и k.

Литература

Карпенко, 2010 – *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

Финн, 1976 – *Финн В.К.* Логические проблемы информационного поиска. М.: Наука, 1976. 152 с.

Infinite-valued Łukasiewicz logic and Farey sequences

Nikolai N. Prelovskiy
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `mingkemingfeichangming@gmail.com`

Abstract: The paper explores the relations between MacNaughton's criterion for infinite-valued Łukasiewicz logic, prime numbers and Farey sequences. The author gives a definition of prime numbers in terms of infinite-valued Łukasiewicz logic. According to MacNaughton's criterion, the set of functions expressed in infinite-valued Łukasiewicz logic coincides with the set of certain continuous piecewise linear functions. The paper shows that natural number n is prime only if infinite-valued Łukasiewicz logic contains functions that the restriction to a proper finitely valued Łukasiewicz logic coincide with functions $N_{1/n}(x)$. While every such function has piecewise linear counterparts, linear parameters for which may be obtained in certain Farey sequences. Therefore, it is possible to find all regarded linear functions in the point with coordinates $(\frac{i}{n}, \frac{1}{n})$. All such functions have equations $f(x) = b + kx$ with integer parameters b and k, and $\frac{1}{n} = b + k\frac{i}{n}$, so it makes it possible to find the required parameters in certain Farey sequences.

Keywords: many-valued logic, Łukasiewicz logic, prime numbers, Farey sequences

For citation: Prelovskiy N.N. "Beskonechnoznachnaya logika Lukasevicha i ryady Fareya" [Infinite-valued Łukasiewicz logic and Farey sequences], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 123–128. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-123-128 (In Russian)

References

Karpenko, 2010 – Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of many-valued logic]. Moscow: LKI Publ., 2010. 448 pp. (In Russian)

Finn, 1976 – Finn, V.K. *Logicheskie problemy informatsionnogo poiska* [Logical problems of information retrieval]. Moscow: Nauka, 1976. 152 pp. (In Russian)