Российская академия наук
Институт философии

Владимир Шалак

ОЧЕРКИ ПО ОСНОВАНИЯМ ЛОГИКИ

Москва
2017

УДК 16
ББК 87.4
Ш 18

В авторской редакции

Рецензенты

д-р филос. наук *И. А. Герасимова*
кандидат филос. наук *В.О. Шангин*

Ш 18 **Шалак, В.И.** Очерки по основаниям логики [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; В.И. Шалак. — М. : ИФ РАН, 2017. — 135 с. : 11 ил. ; 20 см. — Библиогр.: с. 22–23, 40, 85-86, 131–132. — Рез.: англ. — 500 экз. — ISBN 978-5-9540-0320-8.

Книга очерков посвящена логико-философскому анализу оснований логики и ее места в системе наук. Важность владения методами логики иллюстрируется в первом очерке на примере анализа известной апории Зенона «Стрела». Во втором очерке обращается внимание на неявные предпосылки, которые принимаются в логике и тем самым могут оказывать влияние на формирование научной картины мира. Третий очерк посвящен анализу программы логицизма. Приведено доказательство теоремы о существовании критерия для разграничения логических и математических теорий. В четвертом очерке приводятся аргументы в пользу пересмотра некоторых общепринятых положений теории знаков и высказываются предположения, как это может отразиться на наших пред-ставлениях о природе и основаниях логики.

ISBN 978-5-9540-0320-8

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени поступления на философский факультет МГУ и до сих пор я не перестаю задавать себе вопрос, что такое логика? Ответ на него интересует не только меня. Каждый год появляются все новые и новые работы на эту тему.

Стандартные учебники создают у читателя впечатление, что логика – это законченная наука, в которой ничего ни убавить, ни прибавить. Нужно только изучить ее понятия и законы. Когда учебник прочитан и решены задачи, в сознании отпечатывается жесткая структурная схема логических понятий, которая большинству людей кажется незыблемым монолитом.

В 1991 г., выступая на IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки, Г.Х. фон Вригт высказал предположение, что в третьем тысячелетии логика уже не будет одним из ведущих направлений философии. По его мнению, с логикой произошло то же, что и со многими другими науками, – она вышла из лона философии и начала самостоятельную жизнь как определенная совокупность методов, используемых в информатике, когнитологии, кибернетике, общей лингвистике и др. Бум вокруг логики, который мы наблюдали в XX в., постепенно сходит на нет. Если она действительно окончательно отпочковалась от философии, то это означает, что на все вопросы, касающиеся ее оснований, у нас есть удовлетворительные ответы, которые могут лишь уточняться, но ничего принципиально нового добавить к ним нельзя. Но так ли это?

При всем уважении к основоположникам логики, следует учитывать, что каждый из них жил и творил в конкретную историческую эпоху. Объем их знаний был ограничен достижениями предшественников, а взгляды на окружающий мир и пути его познания существенным образом зависели от господствующих философских учений. Если бы мы до сих пор, следуя ценностным установкам древнегреческих философов, относились к искусству счета, как к чему-то низкому, интересному лишь торговцам, то не возникло бы теории вычислимости, мы бы не стали свидетелями компьютерной революции, радикальным образом изменившей всю нашу жизнь. Логика возникла, когда познание было ограничено непосредственно наблюдаемыми явлениями окружающего мира. Для их объяснения строились различные теоретические конструкции. Они могли быть сильно удалены от мира чувственных явлений, но нацелены они были в конечном счете именно на него. С тех пор в сферу научных интересов вошли явления микромира и мегамира, недоступные непосредственному наблюдению и представленные сложными полевыми, квантовыми, струнными и другими теоретическими конструктами. Нет никаких оснований полагать, что для их описания будут пригодны те же логические стандарты, а для оперирования – те же логические средства, которые впервые были сформулированы более двух тысячелетий назад.

Можно предположить, что на рубеже XIX–XX вв. логика сбилась с естественного пути своего развития. Кризис в математике переключил внимание на решение задач оснований математики, отодвинув все другие на второй план. В трудах Фреге-Рассела-Гильберта был задан математический тренд развития логики, который доминирует и по сей день. Благодаря широкому использованию математических методов, логика получила мощный импульс развития, был получен ряд важных результатов, имеющих общекультурное значение, но переориентация на решение в первую очередь внутриматематических задач привела к ее примитивизации. В настоящее время логика, как инструмент для представления математического знания, базирующегося на теории множеств, действительно имеет достаточно завершенный вид. В ее рамках получили глубокое развитие такие разделы, как теория множеств, теория моделей и теория доказательств. Но онтология теоретико-множественной математики далеко не совершенна. Математика лишь начинает проникать в сферу гуманитарных наук и ее заслуги в данной области достаточно скромные.

За пределами приложений логики к задачам математики осталось много нерешенных проблем. Они вышли на поверхность, когда во второй половине XX в. начала широко распространяться вычислительная техника и вдруг обнаружилось, что логика в ее современном виде форме плохо пригодна для компьютерного моделирования многих интеллектуальных операций. Сильный импульс развития получили неклассические логики, которые пытались приспособить для решения новых задач. В их числе можно назвать многозначные, деонтические, временные, эпистемические, вероятностные, релевантные, динамические, диаграммные, немонотонные, нечеткие логики, логики принятия решений и логики действий. Новые системы неклассических логик появляются с завидной регулярностью, и их число уже давно превысило число работающих логиков. Если раньше ответ на вопрос о том, что такое логика, не представлял особого труда, то сейчас он вызывает горячие споры. Понимая логику как определенную совокупность методов, допустимо говорить о плюрализме логик. Если же ее понимать как нормативную науку, то необходимо искать начала, которые бы служили обоснованием этого.

Целью написания очерков и был поиск ответов на некоторые из поставленных вопросов.

Мне повезло изучать логику на кафедре философского факультета МГУ под руководством таких ученых, как Владимир Александрович Смирнов, Елена Дмитриевна Смирнова, Евгений Казимирович Войшвилло, Вячеслав Александрович Бочаров, Анатолий Александрович Старченко. Их уже нет, и их сильно не хватает, чтобы можно было обсудить вопросы, в которых бывает трудно разобраться самому. Моим первым преподавателем логики был Юрий Васильевич Ивлев, который доброжелательно и умело поддерживал мой интерес к выбранной специализации. Валерий Сергеевич Меськов учил не ограничиваться дедуктивными методами, а смотреть на логику шире и уделять внимание применению индуктивных и вероятностных методов. Отдельные слова благодарности хотелось бы высказать в адрес Елены Борисовны Кузиной и Валерия Владимировича Воробьева. Сегодня преподавательский состав кафедры почти полностью изменился, но научное сотрудничество продолжается. За обмен идеями и конструктивную критику хотелось бы поблагодарить Владимира Ильича Маркина, Владимира Михайловича Попова и Дмитрия Владимировича Зайцева.

Сектор логики Института философии РАН стал и до настоящего времени остается моим вторым научным домом. И здесь мне тоже повезло работать и дружить с такими специалистами в области логики, как Александр Степанович Карпенко и Евгений Александрович Сидоренко. Увы, их тоже уже нет. Но зато есть и активно работают Ирина Алексеевна Герасимова, Наталья Евгеньевна Томова, Леонид Юрьевич Девяткин и Николай Николаевич Преловский. Общение с ними дорогого стоит.

Однажды, когда у меня ничего не получалось, мой сын Мишка подошел и сказал: «Но ты же философ, ты должен знать, как это решить». Отдельное ему спасибо за столь уважительное отношение к философии.

Апрель 2017, Москва.

ОЧЕРК 1.

О ПОЛЬЗЕ ЛОГИКИ ДЛЯ ЧАСТНЫХ НАУК

> Из-за незнания логики погибло больше кораблей, чем из-за незнания навигации.
>
> *Уильям Томсон, лорд Кельвин*

Без всякого преувеличения можно сказать, что место логики в системе всех прочих наук уникально. Она не просто одна из них, а особый инструмент познания в руках ученых, какую бы конкретно предметную область они ни исследовали. Она является необходимым условием существования опосредованного знания, без которого невозможна ни одна наука. Не будь ее, все наше знание имело бы вид набора разрозненных фактов. Сколько бы яблок ни падало на головы, это не привело бы к формулировке закона тяготения. Логика позволяет не останавливаться на отдельных фактах, а переходить к их обобщениям, упорядочивать и структурировать явления окружающего мира, связывать их между собой в понятии закона науки, объяснять и предсказывать явления, отличные от тех, что даны нам в непосредственном опыте.

На бытовом уровне людям достаточно владения лишь элементами логики, которые имплицитно уже содержатся в структурах естественного языка. Тем, кто идет дальше, значительную помощь оказывает знакомство с практической логикой, полученное в школе на уроках геометрии. Со времен Евклида его «Начала» играли роль не только учебника геометрии, но и учебника логики на примерах. В переработанном виде они продолжают играть эту роль и в современной школе.

По мере усложнения и повышения уровня абстрактности научных теорий начала складываться ситуация, когда от ученых требуется осознанное, а не интуитивное применение методов и законов логики в своей работе. Те разделы логики, которым обучают студентов в рамках дискретной математики, не позволяют получить полноценное представление о ней, чтобы использовать в работе. Еще хуже обстоят дела у студентов других специальностей, которым логику вообще не преподают. В будущем это отрицательно сказывается на качестве и результатах их работы. Можно много говорить о пользе логики, но чтобы все сказанное не осталось лишь словами на бумаге, приведем конкретный пример, к чему приводит незнание логики или нежелание ею пользоваться.

В истории науки есть несколько тем, которые привлекают к себе всеобщее внимание. Кто не слышал о Великой теореме Ферма, которую наконец-то доказали? Кто не ломал голову над апориями Зенона про быстроногого Ахиллеса, который вот уже две с половиной тысячи лет бежит, но не может догнать медлительную черепаху, или про стремительно летящую стрелу, неподвижную в каждый момент своего полета? Одни считают, что в апориях зафиксирована неадекватность наших представлений о пространстве, времени и движении, что и приводит к столь странным заключениям. По мнению других, апории легко решаются, если для их описания использовать другой понятийный аппарат [12, с. 174–197]. Третьи не видят в апориях ничего плохого и считают, что так устроена природа.

Приведем ряд цитат на тему апорий, принадлежащих людям разных профессий – филологам, философам, математикам, физикам и журналистам.

В нашем понимании аргументация Зенона является абсолютно безупречной [7, с. 30].

Эти аргументы вскрыли противоречия в понятиях современной Пармениду и Зенону науки – в понятиях о пространстве, о едином и многом, о целом и частях, о движении и покое, о непрерывном и прерывном [2, с. 34].

Аристотель (и вслед за ним другие ученые древности) полагал, что в каждой апории Зенон допускал некий логический ляпсус, вследствие которого его рассуждения становились некорректными. В действительности дело обстоит далеко не так просто. Апории "Дихотомия", "Ахиллес" и "Стрела" логически безупречны и не могли быть решены средствами античной математики [10, с. 27].

Все аргументы построены по единому принципу, открытому Парменидом. За первичную предпосылку принимается несомненно непротиворечивое положение о бытии, настолько очевидное, что оно не требует доказательства, – ведь не требуется доказывать, что все всегда или покоится, или движется... Два с половиной тысячелетия существования аргументов, в течение которых не было обнаружено в силлогизмах ни одной логической ошибки, подтверждают их безукоризненное выведение. Аристотель, правда, оценивал все аргументы как паралогизмы, но не был в состоянии, как справедливо заметил Т. Хит, опровергнуть их [8, с. 10].

Апория «Стрела» помогает интерпретировать результаты квантово-механических экспериментов.

Летящая стрела в каждый момент времени где-то находится/покоится, но стрела не может одновременно лететь и покоиться, а значит движение невозможно. Если очень точно измерить положение летящей частицы, то её волновая функция в очень узкий волновой пакет, для которого неопределённость координаты мала, а неопределённость импульса очень велика, после этого летела частица или покоилась, будет уже *не важно. Если повторять измерение очень часто, так, чтобы волновой пакет не успел расплыться и сдвинуться, то измерение компенсирует эволюцию волновой функции, и частица каждый раз будет обнаруживаться в одном и том же месте (т. е. перестанет двигаться)* [6].

В своей экстремальной форме, при непрерывных измерениях, из квантовой теории следует утверждение, что начальное (нестабильное) состояние «замерзает» и никакой квантовой динамики во времени вообще не происходит. Это удивительное предсказание современной квантовой теории носит естественное название квантового парадокса Зенона [15].

В дело популяризации апорий Зенона и их связи с проблемами квантовой механики вносят свой вклад и журналисты.

Древнегреческий мыслитель и математик Зенон Элейский известен своими логическими парадоксами. Один из них – Стрела Зенона – звучит следующим образом: «Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть не существует момента времени, в котором стрела совершает движение». Эта апория легла в основу описания явлений в квантовой физике. Впервые парадокс летящей стрелы был переведён на язык физики в 1977 г, когда теоретики сформулировали принцип недостижимости точного измерения квантовой системы при условии постоянных наблюдений за ней. Данная научная догма очень хорошо соотносится с главным принципом квантовой механики – неопределённостью Гейзенберга. Это фундаментальное неравенство описывает невозможность одинаково точно определить координату и импульс частицы. Экспериментально квантовый эффект Зенона впервые наблюдали в 1989 году в охлаждённых лазером ионах, захваченных в ловушку магнитного и электрического полей [4].

Близки по духу публикации в таких серьезных зарубежных изданиях, как “The Stanford Encyclopedia of Philosophy” [16], “Journal of Mathematical Physics” [17], “Physical Review” [18].

1.1. Что такое апории?

Апория ($\alpha\pi o\rho\iota\alpha$ в переводе означает *затруднение*) – это некоторое рассуждение, которое состоит из одного или нескольких утверждений, принимаемых в качестве *истинных посылок*, и цепочки логически корректных *умозаключений*, приводящих к конечному *заключению*, противоречащему здравому смыслу и нашему непосредственному опыту. Он говорит, что имеет место ситуация A, а в результате рассуждений мы приходим к выводу, что *не-A*.

В логике рассуждение определяется как *непустая конечная последовательность предложений, каждое из которых есть либо посылка, либо получено из предшествующих предложений по одному из правил вывода.* Последнее предложение этой последовательности называется *заключением рассуждения.*

Предложение, которое мы можем оценить, как истинное или ложное, называется *высказыванием.* Логические правила вывода обладают важным свойством из истинных высказываний получать лишь истинные высказывания. Отсюда следует, что если все посылки рассуждения истинны, то и заключение рассуждения должно быть истинным. Если же хотя бы одна из посылок ложна, то мы ничего не можем сказать об истинностном значении заключения. Оно может быть как истинным, так и ложным.

В случае с апориями мы на уровне интуиции соглашаемся с истинностью посылок, соглашаемся с тем, что рассуждение правильно, но никак не можем согласиться с заключением. Действительно, как можно согласиться с заключением апории «Стрела», что движение не существует, если мы буквально окружены движущимися предметами? Естественно, что мы хотим разрешения конфликта между тем, в чем мы убеждены, и тем, в чем пытается убедить нас Зенон.

Читая написанное об апориях глазами логика, более всего удручает, что кроме утверждений об их логической корректности, никто из упомянутых и многих других авторов не утруждает себя тем, чтобы продемонстрировать эту корректность путем аккуратной логической реконструкции. Для этого требуется всего лишь выделить используемые термины, с их помощью сформулировать принимаемые в качестве истинных посылки апорий, а затем путем ряда умозаключений прийти к заключению, которое и вызывает столь жаркие споры. Никто не опускается до этого, предпочитая запутывать все еще больше. Например, в работе Комаровой [8] окончательный результат анализа апории «Стрела» выглядит следующим образом:

> *Процесс же рассуждения таков: каждое тело занимает свое положение, находясь против равного расстояния. Покоящееся занимает одно и то же положение, определяемое его собственной протяженностью. Движущееся же меняет свое положение и занимает поэтому не одно и то же, а многие положения, одно вслед за другим. Определить эти положения, как и сам факт движения, можно благодаря указанию времени, в которое происходит движение. Происходит же оно всегда в настоящем времени. Зенон находит совершенно точное обозначение такого времени, когда вводит в условие «теперь». «Теперь» – это такое время, которое исключает прошлое и будущее; оно есть истинное настоящее, в котором только и может существовать тело. Таким образом, движущееся, пребывая в «теперь», находится в настоящем времени и занимает соответствующее ему настоящее положение. Соответствие здесь прямое и непосредственное* [8, с. 191].

Вряд ли процитированный фрагмент способствует лучшему пониманию апории.

1.2. Что значит «решить апорию»?

Еще раз вспомним, что всякое рассуждение состоит из последовательности предложений, в которой можно выделить исходные предложения-посылки и предложения, полученные в результате умозаключений из предыдущих членов последовательности. Если мы не согласны с конечным заключением, то ошибки могут быть лишь двух видов.

Во-первых, может оказаться, что интуиция нас подвела и посылки рассуждения на самом деле не являются истинными.

Во-вторых, может оказаться, что ошибки связаны не с посылками, а были допущены в ходе построения рассуждения, когда одно или несколько предложений никак не следуют из предыдущих.

Если проверка покажет, что и посылки истинны, и все умозаключения правильны, то нам не останется ничего другого, как признать *обман со стороны наших органов чувств и опыта*. Никакого другого способа решить апорию просто не существует.

Напомним, что трудов самого Зенона до нас не дошло. Всего по разным оценкам им было сформулировано от 40 до 49 апорий, а сохранилось лишь девять или десять в пересказах других авторов. Источниками являются: диалог Платона «Парменид» [9], «Физика» Аристотеля [1] и комментарии к ней Фемистия, Филопона и Симпликия [14], а также известный труд Диогена Лаэртского [5]. Работы других авторов являются вторичными по отношению к упомянутым.

Аристотель передает апорию «Стрела» следующими словами:

Если всякое [тело]... покоится там, где оно движется, всякий раз, когда занимает равное [себе пространство], а движущееся [тело] всегда [занимает равное себе пространство] в [каждое] «теперь», то летящая стрела неподвижна [1, Z 9. 239 b 30].

Поскольку приведенная формулировка апории далека от прозрачности, а мы не хотим заниматься сомнительными толкованиями, обратимся к тому, что написал в связи с процитированным фрагментом Аристотеля известный комментатор Симпликий.

Летящая стрела покоится в полете, коль скоро все по необходимости либо движется, либо покоится, а движущееся всегда занимает равное себе пространство. Между тем, что занимает равное себе пространство, не движется. Следовательно, она покоится [11].

1.3. Решение

Проанализируем данное рассуждение, начав с выделения используемых терминов.

Утверждается, что *все по необходимости либо движется, либо покоится.* То есть любое из тел принадлежит либо к числу движущихся, либо – покоящихся.

Пусть $\boldsymbol{A}$ будет символом общего имени *«покоящееся тело»*, а $\boldsymbol{B}$ – символом общего имени *«движущееся тело»*. Поскольку каждое тело *«по необходимости»* является либо движущимся, либо покоящимся, то *не-покоящееся* тело – это то же самое, что и *движущееся*, а *не-движущееся* тело – то же самое, что и *покоящееся*. То есть *не-*$\boldsymbol{A}$ – это то же самое, что и $\boldsymbol{B}$, а *не-*$\boldsymbol{B}$ – то же самое, что и $\boldsymbol{A}$.

В апории используется еще одно общее имя – *«предмет, занимающий равное себе пространство»*. Обозначим его символом $\boldsymbol{C}$. Смысл этого общего имени не совсем ясен, и многие попытки решить апорию «Стрела» вращаются именно вокруг его уточнения.

Итак, реконструируем апорию средствами традиционной логики.

1. *Все тела, занимающие равное себе пространство, покоятся.*
2. *Все движущиеся тела занимают равное себе пространство.*
3. *Все движущиеся тела покоятся.*

На языке символов это можно записать следующим образом:

1. *Все* ***C*** *есть* ***A***
2. *Все* ***B*** *есть* ***C***
3. *Все* ***B*** *есть* ***A***

Рассуждение логически безупречно. В нем легко распознать модус *Barbara*.

Коль скоро рассуждение безупречно, мы должны обратиться к анализу посылок.

1. *Все тела, занимающие равное себе пространство, покоятся.*

2. *Все движущиеся тела занимают равное себе пространство.*

На языке символов:

1. *Все* ***C*** *есть* ***A***
2. *Все* ***B*** *есть* ***C***

Вспомним, что Аристотель создал не только систему силлогистических умозаключений, но и сформулировал ряд правил непосредственных умозаключений, связанных с преобразованием внутренней структуры категорических атрибутивных высказываний. В традиционной логике, в числе прочих, изучаются непосредственные умозаключения следующих видов: *об-*

ращение, превращение, противопоставление субъекту и противопоставление предикату [3, с. 21].

Возьмем первую посылку: *«Все тела, занимающие равное себе пространство, покоятся»* и посмотрим, какие преобразования ее внутренней структуры допустимы. По правилам превращения и обращения мы можем заключить к общеотрицательному высказыванию: *«Все не-покоящиеся тела не занимают равное себе пространство»*

$$\textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ есть } \boldsymbol{A} \Rightarrow \textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ не есть не-}\boldsymbol{A} \Rightarrow \textit{Все не-}\boldsymbol{A} \textit{ не есть } \boldsymbol{C}$$

Поскольку *«не-покоящееся»* – это то же самое, что и *«движущееся»*, то получаем *«Все движущиеся тела не занимают равное себе пространство»*, т. е. *«Все **B** не есть **C**»*.

Вдобавок к этому мы можем совершить и обратный переход, поскольку в традиционной логике данные преобразования приводят к эквивалентным высказываниям.

$$\textit{Все } \boldsymbol{B} \textit{ не есть } \boldsymbol{C} \Rightarrow \textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ не есть } \boldsymbol{B} \Rightarrow \textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ есть не-}\boldsymbol{B} \Rightarrow \textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ есть } \boldsymbol{A}$$

Таким образом, два высказывания *«Все тела, занимающие равное себе пространство, покоятся»* и *«Все движущиеся тела не занимают равное себе пространство»* являются логически эквивалентными, т. е. взаимозаменимыми.

$$\textit{Все } \boldsymbol{C} \textit{ есть } \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \textit{Все не-}\boldsymbol{A} \textit{ не есть } \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \textit{Все } \boldsymbol{B} \textit{ не есть } \boldsymbol{C}$$

А теперь вернемся к двум посылкам апории «Стрела», заменив первую из них на логически эквивалентную ей.

1. *Все движущиеся тела не занимают равное себе пространство.*

2. *Все движущиеся тела занимают равное себе пространство.*

Ошибка, допущенная при принятии посылок, очевидна. Нарушен один из основных законов логики – закон противоречия. Чтобы обнаружить это, нам даже не понадобилось проводить силлогистические рассуждения. Достаточным оказалось произвести элементарное преобразование одной из посылок. Вряд ли кто-либо согласился принять эти посылки в качестве одновременно истинных. При этом отказ от их принятия совершенно не зависит от того, какой смысл вкладывается в понятие *«тело, занимающее равное себе пространство»*.

1.4. Заключение

Остается загадкой, почему до сих пор никто не обратил внимания на такое простое решение апории «Стрела»? Возможно, определенную роль сыграл психологический фактор. В апории делается акцент на понятие «тела, занимающего равное себе пространство», и все ломали голову именно над ним, не придавая значения анализу логической формы посылок. Удивительно, что и логики, интересовавшиеся апориями, тоже попадали в эту ловушку и вместо того, чтобы на практике применять свои уникальные знания, предпочитали строить догадки о свойствах пространства, времени и движения.

Необходимо сказать несколько слов и об «эффекте Зенона», который обсуждают физики. Нет оснований считать, что результаты их экспериментов были ошибочными. Дело в другом. Квантовая механика до сих пор не имеет общепринятой интерпретации, хотя успела доказать свою необычайную эффективность. Попытки истолковать результаты экспериментов в терминах апории «Стрела» не приближают к пониманию квантовой механики, а удаляют. Из противоречия путем рассуждений можно вывести все что угодно. Это лишний раз подтверждает известное высказывание Ричарда Фейнмана – *«...я смело могу сказать, что квантовой механики никто не пони-*

мает» [13, с. 117]. С тех пор прошло более пятидесяти лет, а понимания как не было, так и нет.

Проведенный анализ демонстрирует большой познавательный потенциал логики как науки. Для решения апории нам потребовалось знание лишь элементарных разделов традиционной логики. Современная логика располагает гораздо большим арсеналом методов, которые ждут своего применения в частных науках.

Список литературы

[1] *Аристотель.* Физика. М.: КомКнига, 2007. 232 с.

[2] *Асмус В.Ф.* Античная философия. М.: Высш. шк., 2005. 408 с.

[3] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.

[4] *Горина А.* В алмазе увидели квантовый эффект Зенона. URL: http://www.vesti.ru/doc.html?id=1120237&cid=2161 (дата обращения: 17.12.2016).

[5] *Диоген Лаэртский.* О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: Мысль, 1986. 571 с.

[6] *Иванов М.Г.* Как понимать квантовую механику? URL: https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/upload/648/ivanov-2013-06-13-arphka17g9s.pdf (дата обращения: 17.12.2016).

[7] *Койре А.* Заметки о парадоксах Зенона // Очерки истории философской мысли. М.: Прогресс, 1985. С. 27–50.

[8] *Комарова В.Я.* Учение Зенона Элейского: попытка реконструкции системы аргументов. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988. 264 с.

[9] *Платон.* Собр. соч.: в 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1993. 528 с.

[10] *Рожанский И.Д.* Ранняя греческая философия // Фрагменты ранних греческих философов. Ч. 1. М.: Наука, 1989. С. 5-32.

[11] *Симпликий.* Комментарии к «Физике», 1015б 19 (к 239 b 30). // Фрагменты ранних греческих философов. Ч. 1. М.: Наука, 1989. 576 с.

[12] *Уитроу Дж.* Естественная философия времени. М.: Едиториал УРСС, 2003. 400 с.

[13] *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Наука, 1987. 160 с.

[14] Фрагменты ранних греческих философов. Ч. 1. М.: Наука, 1989. 576 с.

[15] *Халфин Л.А.* Квантовый эффект Зенона // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. Вып. 9. С. 185-188. URL: http://www.ufn.ru/ufn90/ufn90_10/Russian/r9010j.pdf (дата обращения: 17.12.2016).

[16] *Huggett N.* Zeno's Paradoxes // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2010 Edition), E.N. Zalta (ed.) URL: http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/paradox-zeno/ (дата обращения: 17.12.2016).

[17] *Mishra B., Sudarshan, E.C.G.* The Zeno's paradox in quantum theory // Journal of Mathematical Physics. 1977. Vol. 18. No. 4. P. 756–763. URL: http://repository.ias.ac.in/51139/1/211-pub.pdf (дата обращения: 17.12.2016).

[18] *Itano W.M.; Heinsen D.J., Bokkinger J.J., Wineland D.J.* Quantum Zeno effect // Physical Review A. 1990. Vol. 41. No. 5. P. 2295–2300. URL: http://tf.nist.gov/general/pdf/858.pdf (дата обращения: 17.12.2016).

ОЧЕРК 2.

ОБ ОНТОЛОГИЧЕСКОМ СТАТУСЕ ФУНКЦИЙ И ОТНОШЕНИЙ

Появление и развитие новых логических теорий тесно связано с наиболее общими представлениями об устройстве окружающего мира, которые находят отражение в философских учениях. Если обратиться к истории возникновения логики, то в онтологии Аристотеля мир состоял из предметов – носителей тех или иных свойств. Свойства существовали не самостоятельно, а лишь благодаря предметам, которые могли ими обладать или не обладать. Такой взгляд на окружающий мир требовал, чтобы в языке были конструкции, представлявшие возможные отношения между предметами и свойствами. Отдельным предметам были поставлены в соответствие единичные имена, а совокупностям предметов, обладающих одинаковыми свойствами, были сопоставлены общие имена. Тот факт, что предмет a обладает свойством P, получил выражение в суждении вида *«a есть P»*. Более сложные отношения между общими именами выражаются посредством категорических атрибутивных суждений *«Все S есть P»*, *«Некоторые S есть P»*, *«Ни один S не есть P»*, *«Некоторые S не есть P»*. В учении Аристотеля о силлогизме было показано, как из одних суждений об отношениях между общими именами получать новые суждения об отношениях. Этому посвящена теория силлогистического вывода.

Учение Аристотеля оказало существенное влияние на развитие европейской науки. Это влияние можно проследить вплоть до настоящего времени. Теория множеств, лежащая в основаниях современной математики, является теорией отношения принадлежности $a \in P$, в котором легко усмотреть форму суждения *«a есть P»*. Аксиома свёртки теории множеств $a \in \{x|P(x)\} \leftrightarrow P(a)$ – другая форма выражения того, что всякому свойству можно сопоставить в соответствие совокупность предметов, им обладающих. В то же время язык логики Аристотеля налагал определенные ограничения на формы выражения мысли. В первую очередь речь идет об отношениях, в которых могут находиться различные предметы, представленные в языке единичными именами. Например, отношение *«a больше b»* невыразимо в субъектно-предикатной структуре категорических атрибутивных суждений. На это обратили внимание еще в античности, и определенные попытки исследовать логику отношений предпринимались самим Аристотелем [8, с. 68–70], но ничего сравнимого по совершенству с силлогистикой создано не было.

Коренным пересмотром оснований и возникновением современной символической логики мы обязаны трудам Г. Фреге, Б. Рассела, А. Уайтхеда и других ученых. Современная логика перестала быть логикой свойств и стала логикой отношений. Этот переход знаменовал отказ от субстанциальной и принятие реляционной картины мира, что, как считается, благотворно сказалось на общем развитии науки.

Ограничение лишь предикатными предложениями роковым образом сказалось и на областях, лежащих вне сферы логики. Возможно, Рассел был прав, объясняя некоторые ошибки метафизики недостатками логики: если каждое предложение приписывает какому-то субъекту некоторый предикат, то, в сущности, существует лишь один субъект, некий абсолют, и каждое положение вещей сводится к тому, что абсолюту присущ *определенный атрибут. Быть может, аналогичным образом всякую субстантивную метафизику можно объяснить как основанную на этой ошибке* [4, с. 110].

Возникла новая парадигма языка логики, адекватного целям познания. Отныне она предписывала рассматривать окружающий нас мир, как состоящий из предметов, находящихся в тех или иных отношениях.

> *...несомненно, что названная ограниченность вызвала длительную задержку в развитии физики, породив, например, субстанциальное представление о материи. Прежде всего, следует понять, что понятие абсолютного пространства обусловлено этой ошибкой логики. Поскольку форма высказываний о пространстве должна быть предикатной, постольку эти высказывания могут говорить только о местоположении тел. Когда Лейбниц осознал возможность использования предложений об отношениях, он смог прийти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, – вот в чем заключается элементарное положение дел. Он дал теоретико-познавательное обоснование тезиса о том, что можно зафиксировать не местоположение само по себе, а только взаимное положение тел по отношению друг к другу. К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике – благодаря теории относительности* [4, с. 110–111].

Когда-то, на заре возникновения науки, конкурировали несколько взглядов на то, как устроен мир, и видное место среди них занимало учение диалектиков. Они учили, что мир пронизан изменением, в нем нет ничего устойчивого. Но так получилось, что им не удалось создать удобный язык для описания изменений и рассуждений о них. Исторически победило учение Аристотеля, в котором открыто провозглашалось, что наука имеет дело лишь с необходимым, а оно не может быть иным.

> *Предмет знания и знание отличаются от предмета мнения и от мнения, ибо знание направлено на общее и основывается на необходимых [положениях]; необходимое же есть то, что не может быть иначе. Многое же хотя и истинно и существует, но может быть и иным. Ясно поэтому, что о нем нет науки* [1, 88 b 30–35].

В дальнейшем сторонники диалектического учения для продвижения своих идей были вынуждены пользоваться языком логики Аристотеля, который изначально основывался совсем на других предпосылках об устройстве мира. С его помощью было невозможно говорить и рассуждать об изменении, не нарушая при этом законов ставшей уже общепринятой логики, что давало пищу для справедливой критики в адрес диалектиков. Мы не собираемся выступать в роли арбитра и выносить приговор, кто был прав, а кто – нет. Это небольшое напоминание сделано лишь для того, чтобы показать, как используемый язык и логика оперирования его выражениями могут способствовать продвижению одних идей и тормозить другие. Поэтому, наученные опытом, мы должны более внимательно относиться к вопросам ограничений, опосредованно налагаемых языком логики на продвижение новых научных идей.

Для начала зададимся вопросом, насколько безальтернативна онтология предметов и отношений? Речь пойдет не о существовании различных типов моделей для одного и того же языка, а именно о связанной с ним онтологии.

Из стандартного учебного курса логики предикатов известна теорема о введении в язык функциональных символов и предметных констант, в связи с которой Э. Мендельсон замечает:

...в теориях первого порядка существенно необходимыми являются лишь предикатные буквы, без функциональных же букв и предметных констант можно обойтись [6, с. 95].

Справедливость этой теоремы вполне очевидна, поскольку в классической логике функциональные зависимости трактуются как отношения с некоторыми дополнительными свойствами. Достаточно каждому функциональному символу исходной теории сопоставить новый предикатный символ, принять постулат о его функциональности и слегка переформулировать другие постулаты, чтобы получить новую теорию в реляционном языке. Технически все довольно просто, но, с философской точки зрения, замена далеко не равнозначна. Из языка, с помощью которого мы описываем и пытаемся осмыслить окружающий мир, исчезают средства для того, чтобы напрямую говорить о функциональных связях, которые буквально окружают нас и, в определенном смысле, даны в опыте более непосредственно, чем отношения. Если же говорить об отношениях, их онтологический статус сомнителен. У нас нет таких органов чувств, которые убедили бы нас в истинности даже такого простого отношения, как *«a выше b»*. Мы можем лишь увидеть a и b, оценить их высоту, сделать поправку на расстояние до каждого из них и лишь после этого прийти к выводу, истинно это отношение или ложно. Это справедливо для всех без исключения отношений. Суждения о них всегда опосредованы некоторыми измерительными и интеллектуальными процедурами. На это указывает Г. Вейль, когда пишет о понимании отношений Г. Лейбницем:

Оспариваемое здесь мнение имеет своей основой, очевидно, область чувственных данностей, способных дать только свойства, но не отношение. Поэтому-то Лейбниц... считает отношение чем-то идеальным [2, с. 35–36].

Зададимся вопросом, а можно ли вместо избавления от функциональных символов языка поступить наоборот и избавиться от предикатных символов, что лучше согласуется с их вторичностью по отношению к процедурам измерения? Оказывается, во многих интересных случаях это возможно.

Далее мы покажем, что для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов первого порядка с равенством, область интерпретации которой содержит не менее двух индивидов, существует дефинициально эквивалентная ей теория в языке с одними лишь функциональными символами и единственным предикатом равенства, который по своей природе является логическим, поскольку *«по содержанию соответствует чему-то такому, что в известном смысле предшествует определению какого бы то ни было предиката, а именно – возможности различения элементов индивидной области»* [3, с. 209]. Эта теорема является обратной по отношению к упомянутой выше теореме об элиминации функциональных символов и предметных констант. Результатом будет вывод о том, что реляционная картина мира не является необходимой догмой и во многих случаях без какой-либо потери информации может быть заменена функциональной. Исследователь сам может выбрать, какая из них лучше соответствует стоящим перед ним задачам.

2.1. Язык и дефинициальные расширения теорий

Будем предполагать, что мы имеем дело с теориями первого порядка с равенством, обычным набором логических связок $\neg, \&, \vee, \supset, \equiv$ и кванторов $\forall, \exists$. Теорию T отождествим с множеством ее теорем. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

- $L(T)$ – язык теории T.
- $A \in L(T)$ – формула A принадлежит языку теории T.
- $A \in T$ или $T \vdash A$ – формула A есть теорема теории T.
- $Cn(S)$ – множество всех следствий формул S.

Теория T_2 является *расширением* теории T_1, если и только если $T_1 \subseteq T_2$. Отсюда следует, что $L(T_1) \subseteq L(T_2)$.

Теория T_2 является *консервативным расширением* теории T_1, если и только если выполняются два условия:

1. $T_1 \subseteq T_2$
2. $A \in L(T_1)$ и $T_2 \vdash A$, то $T_1 \vdash A$.

Язык теории может быть расширен путем определения новых *предикатных* и *функциональных* символов [5]. Такие расширения будем называть *дефинициальными*. Определения предикатных символов в теории T имеют вид:

$$\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$$

где $\forall \mathbf{x}$ служит сокращением для$\forall x_1 \ldots \forall x_n$, а $P\mathbf{x}$ – сокращение для $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Они должны удовлетворять условиям:

1. P – новый предикатный символ;
2. Формула A принадлежит языку $L(T)$ и потому не содержит вхождений символа P;
3. Если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$;

4. Множество свободных переменных формулы A включено в $\{x_1, .., x_n\}$.

Определения функциональных символов в теории T имеют вид:

$$\forall \mathbf{x} \forall y (f\mathbf{x} = y \equiv A(\mathbf{x}, y)),$$

где $f\mathbf{x}$ – сокращение для $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Они должны удовлетворять условиям:

1. f – новый функциональный символ;
2. формула A принадлежит языку $L(T)$ и потому не содержит вхождений символа f;
3. если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$, $x_i \neq y$;
4. множество свободных переменных формулы A включено в $\{x_1, .., x_n, y\}$.
5. формула $\forall \mathbf{x} \exists ! y A(\mathbf{x}, y)$ – теорема теории T.

При выполнении этих условий мы получим *консервативное* расширение теории T, обладающее свойством *элиминируемости* вновь введенных символов.

Элиминируемость означает следующее. Если теория $T_2 = Cn(T_1 \cup D)$ является дефинициальным расширением теории T_1 с помощью множества определений D, и формула A принадлежит языку $L(T_2)$ (в формулу A могут иметь вхождения предикатные или функциональные символы, введенные с помощью определений D), то существует такая формула $A' \in L(T_1)$, что $T_2 \vdash A \equiv A'$. Кратко это можно записать следующим образом:

Если $T_2 = Cn(T_1 \cup D)$ и $A \in L(T_2)$, то существует такая формула $A' \in L(T_1)$, что $T_2 \vdash A \equiv A'$.

Теория T_1 *дефинициально эквивалентна* теории T_2, если и только если существуют определения D_{T2} терминов теории T_2 в терминах теории T_1 и определения D_{T1} терминов теории T_1 в терминах теории T_2, такие, что $Cn(T_1 \cup D_{T2}) = Cn(T_2 \cup D_{T1})$ [7, с. 56].

2.2. Исходная теория T_1 в реляционном языке

Пусть нам дана теория T_1 в языке логики предикатов первого порядка с равенством, одной из теорем которой является формула $a \neq b$ для некоторых замкнутых термов a и b. Мы хотим построить дефинициально эквивалентную ей теорию T_2, язык которой не будет содержать никаких предикатных символов, кроме равенства. Наличие теоремы $a \neq b$ позволяет построить теорию T_2 конструктивно. Если бы вместо $a \neq b$ была лишь теорема $\exists x \exists y(x \neq y)$, то доказательство возможности построить теорию T_2 было бы экзистенциальным, а не конструктивным, что в философском плане нисколько не умаляет результата.

С каждым предикатным символом теории T_1 мы хотим связать в этой теории некоторое функциональное отношение, которое в дальнейшем позволит ввести по определению соответствующий функциональный символ. Ключевую роль в этом играет следующая лемма.

Лемма 1. Если P – n-местный предикатный символ языка теории T_1, то в ней доказуемы следующие формулы:

A. $\exists y((P\mathbf{x}\&y = a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&y = b))$
B. $((P\mathbf{x}\&y = a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&y = b))\&((P\mathbf{x}\&z = a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&z = b))\supset y = z$

Доказательство

A. $\exists y((P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b))$

$\lceil$ $+1.\ P\mathbf{x}$	- доп.
$\mid$ $2.\ \vdash a = a$	- акс. равенства
$\mid$ $3.\ P\mathbf{x}\&a = a$	- из 1, 2
$\mid$ $4.\ (P\mathbf{x}\&a = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&a = b)$	- из 3
$\lfloor$ $5.\ \exists y((P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b))$	- из 4 по $\exists_{in}$
$\lceil$ $+6.\ \neg P\mathbf{x}$	- доп.
$\mid$ $7.\ \vdash b = b$	- акс. равенства
$\mid$ $8.\ \neg P\mathbf{x}\&b = b$	- из 6, 7
$\mid$ $9.\ (P\mathbf{x}\&b = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&b = b)$	- из 8
$\lfloor$ $10.\ \exists y((P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b))$	- из 9 по $\exists_{in}$
$11.\ T_1 \vdash \exists y((P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b))$	- из 1-5, 6-10

B. $((P\mathbf{x}\&y{=}a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&y{=}b))\&((P\mathbf{x}\&z{=}a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&z{=}b))\supset y = z$

$\lceil$ $+1.\ ((P\mathbf{x}\&y{=}a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&y{=}b))\&((P\mathbf{x}\&z{=}a)\vee(\neg P\mathbf{x}\&z{=}b))$	
$\mid$ $2.\ (P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b)$	- из 1
$\mid$ $3.\ (P\mathbf{x}\&z = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&z = b)$	- из 1
$\mid\lceil$ $+4.\ P\mathbf{x}$	- доп.
$\mid\mid$ $5.\ P\mathbf{x}\&y = a$	- из 2, 4
$\mid\mid$ $6.\ P\mathbf{x}\&z = a$	- из 3, 4
$\mid\mid$ $7.\ y = a$	- из 5
$\mid\mid$ $8.\ z = a$	- из 6
$\mid\lfloor$ $9.\ y = z$	- из 7, 8
$\mid\lceil$ $+10.\ \neg P\mathbf{x}$	- доп.
$\mid\mid$ $11.\ \neg P\mathbf{x}\&y = b$	- из 2, 10
$\mid\mid$ $12.\ \neg P\mathbf{x}\&z = b$	- из 3, 10
$\mid\mid$ $13.\ y = b$	- из 11
$\mid\mid$ $14.\ z = b$	- из 12
$\mid\lfloor$ $15.\ y = z$	- из 13, 14
$\lfloor$ $16.\ y = z$	- из 4-9, 10-15
$17.\ T_1 \vdash ((P\mathbf{x}\&y = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&y = b))\&$	
$\&((P\mathbf{x}\&z = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&z = b)) \supset y = z$	- из 1-16

Лемма доказана.

2.3. Теория T_2 в функциональном языке

Итак, нам дана исходная теория T_1, которая может содержать предикатные символы и одной из теорем которой является формула $a \neq b$ для некоторых замкнутых термов a и b. Определим язык и аксиомы теории T_2.

Пусть язык $L(T_2)$ содержит:

1. предикат равенства $=$;
2. все функциональные символы языка $L(T_1)$
3. для каждого n-местного предиката $P^n \in L(T_1)$ – некоторый n-местный функциональный символ f_P.

Чтобы задать аксиомы теории T_2, определим функцию α, отображающую формулы языка $L(T_1)$ в формулы $L(T_2)$:

1. $\alpha(t_1 = t_2) \quad = \quad (t_1 = t_2)$
2. $\alpha(P(t_1, \ldots, t_n)) \quad = \quad f_P(t_1, \ldots, t_n) = a$
3. $\alpha(\neg A) \quad = \quad \neg\alpha(A)$
4. $\alpha(A \bigtriangledown B) \quad = \quad \alpha(A) \bigtriangledown \alpha(B)$, где $\bigtriangledown \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
5. $\alpha(QxB) \quad = \quad Qx\alpha(B)$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$

Аксиомами теории T_2 будут обычные аксиомы равенства, все формулы вида $\forall \mathbf{x}(f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b)$ и все формулы вида $\alpha(A)$, где A – аксиома теории T_1.

В качестве определений предикатных символов теории T_1 в языке теории T_2 возьмем все формулы вида:

$$(D_{T1}) \qquad \forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv f_P\mathbf{x} = a)$$

В качестве определений функциональных символов теории T_2 в языке теории T_1 возьмем все формулы вида:

$$(DT_2) \qquad \forall \mathbf{x} y(f_P\mathbf{x} = y \equiv (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b)).$$

В силу Леммы 1 данное определение корректно.

2.4. Дефинициальная эквивалентность теорий T_1 и T_2

Для доказательства основной теоремы мы должны показать, что имеют место два включения $Cn(T_2 \cup D_{T1}) \subseteq Cn(T_1 \cup D_{T2})$ и $Cn(T_1 \cup D_{T2}) \subseteq Cn(T_2 \cup D_{T1})$. Это будет следовать из Лемм 2 и 3.

Лемма 2. В теории $Cn(T_1 \cup D_{T2})$ доказуемы следующие формулы:

A. $(P\boldsymbol{x}\&f_P\boldsymbol{x} = a) \vee (\neg Px\&f_P\boldsymbol{x} = b)$
B. $f_P\boldsymbol{x} = a \vee f_P\boldsymbol{x} = b$
C. $P\boldsymbol{x} \equiv f_P\boldsymbol{x} = a$
D. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \supset f_P\boldsymbol{x} = f_P\boldsymbol{y}$

Доказательство

A. $(P\mathbf{x}\&f_P\mathbf{x} = a) \vee (\neg Px\&f_P\mathbf{x} = b)$

1. $\forall \mathbf{x} y(f_P\mathbf{x} = y \equiv (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b))$ - опр. D_{T2}
2. $f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{x} \equiv ((P\mathbf{x}\&f_P\mathbf{x} = a) \vee (\neg Px\&f_P\mathbf{x} = b))$ - из 1
3. $\vdash f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{x}$ - акс. равенства
4. $(P\mathbf{x}\&f_P\mathbf{x} = a) \vee (\neg P\mathbf{x}\&f_P\mathbf{x} = b)$ - из 2, 3

B. $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$

$\lceil$ +1. $P\mathbf{x}$ - доп.
| 2. $P\mathbf{x} \vee f_P\mathbf{x} \neq b$ - из 1
| 3. $\neg(\neg P\mathbf{x}\&f_P\mathbf{x} = b)$ - из 2
| 4. $Px\&f_P\mathbf{x} = a$ - из 3, Лемма 2(A)
| 5. $f_P\mathbf{x} = a$ - из 4
$\lfloor$6. $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$ - из 5
$\lceil$ +7. $\neg Px$ - доп.

$\mid$ 8. $\neg Px \vee f_P\mathbf{x} \neq a$	- из 7
$\mid$ 9. $\neg(Px \& f_P\mathbf{x} = a)$	- из 8
$\mid$ 10. $\neg Px \& f_P\mathbf{x} = b$	- из 9, Лемма 2(A)
$\mid$ 11. $f_P\mathbf{x} = b$	- из 10
$\lfloor$ 12. $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$	- из 11
13. $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$	– из 1-6, 7-12

C. $P\mathbf{x} \equiv f_P\mathbf{x} = a$

$\lceil$ +1. $f_P\mathbf{x} = a$	- доп.
$\mid$ 2. $a \neq b$	- теорема T_1
$\mid$ 3. $f_P\mathbf{x} \neq b$	- из 1, 2
$\mid$ 4. $\neg\neg P\mathbf{x} \vee f_P\mathbf{x} \neq b$	- из 3
$\mid$ 5. $\neg(\neg P\mathbf{x} \& f_P\mathbf{x} = b)$	- из 4
$\mid$ 6. $P\mathbf{x} \& f_P\mathbf{x} = a$	- из 5, Лемма 2(A)
$\lfloor$ 7. $P\mathbf{x}$	- из 6
8. $f_P\mathbf{x} = a \supset P\mathbf{x}$	- 1-7
$\lceil$ +9. $P\mathbf{x}$	- доп.
$\mid$ 10. $\neg\neg P\mathbf{x}$	- из 9
$\mid$ 11. $\neg\neg P\mathbf{x} \vee f_P\mathbf{x} \neq b$	- из 10
$\mid$ 12. $\neg(\neg Px \& f_P\mathbf{x} = b)$	- из 11
$\mid$ 13. $P\mathbf{x} \& f_P\mathbf{x} = a$	- из 12, Лемма 2(A)
$\lfloor$ 14. $f_P\mathbf{x} = a$	- из 13
15. $P\mathbf{x} \supset f_P\mathbf{x} = a$	- из 9-14
16. $P\mathbf{x} \equiv f_P\mathbf{x} = a$	- из 8, 15

D. $\mathbf{x} = \mathbf{y} \supset f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$

$\lceil$ +1.$x = y$	- доп.
$\mid$ 2. $Px \equiv Py$	- из 1
$\mid$ 3. $f_P\mathbf{x} = a \equiv f_P\mathbf{y} = a$	- из 2, Лемма 2(C)
$\mid\lceil$ +4. $f_P\mathbf{x} = a$	- доп.
$\mid\mid$ 5. $f_P\mathbf{y} = a$	- из 3, 4
$\mid\mid$ 6. $f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$	- из 4, 5
$\mid\mid$ +7. $f_P\mathbf{x} = b$	- доп.
$\mid\mid$ 8. $a \neq b$	- теорема T_1
$\mid\mid$ 9. $f_P\mathbf{x} \neq a$	- из 7, 8

|| 10. $f_P\mathbf{y} \neq a$ - из 3, 9
|| 11. $f_P\mathbf{y} = b$ - из 10, Лемма 2(B)
|⌊ 12. $f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$ - из 7, 11
| 13. $(f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b) \supset f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$ - из 4-6, 7-12
| 14. $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$ - Лемма 2(B)
⌊ 15. $f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$ - из 13, 14
16. $x = y \supset f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$ - из 1-15

Лемма доказана.

Для докаательства включения в обратную сторону нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. В теории $Cn(T_2 \cup D_{T1})$ доказуемы формулы:

A. $a \neq b$
B. $\forall \boldsymbol{x} y(f_P\boldsymbol{x} = y \equiv (P\boldsymbol{x}\&y = a \vee \neg P\boldsymbol{x}\&y = b))$

Доказательство

A. Поскольку все формулы вида $\alpha(A)$, где A – аксиома T_1, доказуемы в T_2, то в силу D_{T1} и теоремы о замене эквивалентных в $Cn(T_2 \cup D_{T1})$ будут доказуемы и исходные аксиомы A. Поэтому все теоремы T_1 будут теоремами $Cn(T_2 \cup D_{T1})$, а следовательно, и формула $a \neq b$ тоже будет теоремой.

B. $\forall \mathbf{x} y(f_P\mathbf{x} = y \equiv (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b))$

1. $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv f_P\mathbf{x} = a)$ - D_{T1}
2. $a \neq b$ - Лемма 3(A)
3. $\forall x(f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b)$ - аксиома T_2
⌈ +4. $f_P\mathbf{x} = y$ - доп.
|⌈ +5. $f_P\mathbf{x} = a$ - доп.
|| 6. $P\mathbf{x}$ - из 1, 5
|| 7. $y = a$ - из 4, 5

$||$ 8. $P\mathbf{x}\&y = a$ - из 6, 7
$||\lfloor$ 9. $P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg Px\&y = b$ - из 8
$|\lceil$ +10. $f_P\mathbf{x} = b$ - доп.
$||$ 11. $f_P\mathbf{x} \neq a$ - из 2, 10
$||$ 12. $\neg P\mathbf{x}$ - из 1, 11
$||$ 13. $y = b$ - из 4, 10
$||$ 14. $\neg P\mathbf{x}\&y = b$ - из 12, 13
$||\lfloor$ 15. $P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b$ - из 4
$|$ 16. $(f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b) \supset (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b)$ - из 5-9, 10-15
$\lfloor$ 17. $P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b$ - из 3, 16
18. $f_P\mathbf{x} = y \supset (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b)$ - из 4-17
$\lceil$ +19. $P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b$ - доп.
$|\lceil$ +20. $P\mathbf{x}\&y = a$ - доп.
$||$ 21. $P\mathbf{x}$ - из 20
$||$ 22. $f_P\mathbf{x} = a$ - из 1, 21
$||$ 23. $y = a$ - из 20
$||\lfloor$ 24. $f_P\mathbf{x} = y$ - из 22, 23
$|\lceil$ +25. $\neg P\mathbf{x}\&y = b$ - доп.
$||$ 26. $\neg P\mathbf{x}$ - из 25
$||$ 27. $y = b$ - из 25
$||$ 28. $f_P\mathbf{x} \neq a$ - из 1, 26
$||$ 29. $f_P\mathbf{x} = b$ - из 3, 28
$||\lfloor$ 30. $f_P\mathbf{x} = y$ - из 27, 29
$\lfloor$ 31. $f_P\mathbf{x} = y$ - из 20-24, 25-30
32. $(P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b) \supset f_P\mathbf{x} = y$ - из 19-31
33. $f_P\mathbf{x} = y \equiv (P\mathbf{x}\&y = a \vee \neg P\mathbf{x}\&y = b)$ - из 18, 32

Лемма доказана.

Теорема. Теории T_1 и T_2 дефинициально эквивалентны, т. е. $Cn(T_1 \cup D_{T2}) = Cn(T_2 \cup D_{T1})$.

Доказательство

В силу Леммы $2(C)$ имеет место выводимость $T_1 \cup D_{T2} \vdash \forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv f_P\mathbf{x} = a)$, т. е. D_{T1}. Отсюда по теореме о замене эквивалентных будет иметь место $T_1 \cup D_{T2} \vdash \alpha(A)$

для всех A, где A – аксиома T_1. Аксиомы равенства $x = y \supset f_P\mathbf{x} = f_P\mathbf{y}$ выводимы из $T_1 \cup D_{T2}$ в силу Леммы 2(D). Аксиомы вида $f_P\mathbf{x} = a \vee f_P\mathbf{x} = b$ выводимы в силу Леммы 2(B).

В силу Леммы 3 все аксиомы T_1 и определения D_{T2} выводимы из $T_2 \cup D_{T1}$.

Теорема доказана.

2.5. Заключение

Доказательство теоремы не является сложным, и потому, с математической точки зрения, ее содержание может показаться тривиальным. Однако с философской точки зрения она достаточно интересна, т. к. показывает, что онтологический статус отношений в нашей картине мира относителен. Они могут быть заменены функциональными связями между объектами и процедурами измерения.

Основная теорема была доказана в предположении, что предметная область содержит хотя бы два индивида. Это необходимое условие, чтобы можно было говорить о процедурах измерения, поскольку шкала измерения должна содержать хотя бы два отличных объекта. Это не позволяет распространить доказанную теорему на теории, которые не содержат никаких допущений о мощности предметной области. В качестве примера можно привести теории симметричного и транзитивного отношений. В то же время существуют теории в функциональных языках, модели которых могут иметь любую мощность. Самый простой пример – теория групп.

Говоря о теориях, предполагающих другую онтологию и требующих другого языка, хотелось бы упомянуть теорию топосов. При стандартном построении в ней предполагается существование двух типов индивидов – *объектов* и *стрелок*. Объекты логически ничем не отличаются от обычных индивидов, а стрелки – это особые индивиды, представляющие функциональные связи между объектами. Оказывается, что в этой онтологии объекты являются избыточными и могут быть заменены так называемыми единичными стрелками. В результате получается онтология, которая не нуждается в допущении субстанции, т. к. в отсутствие объектов стрелки перестают представлять функциональные связи между ними и приобретают самостоятельный статус. В этом смысле они напоминают комбинаторы в комбинаторной логике. Новый язык постепенно завоевывает себе место, но переход к нему потребует серьезного изменения стиля мышления.

Список литературы

[1] *Аристотель.* Собр. соч.: в 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978. 687 с.

[2] *Вейль Г.* О философии математики. М.: КомКнига, 2005. 128 с.

[3] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1982. 560 с.

[4] *Карнап Р.* Старая и новая логика // Журнал “Erkenntnis” («Познание»). Избранное. М.: Издат. дом «Территория будущего»; Идея-Пресс, 2007. С. 105–119.

[5] *Карпович В.Н.* Термины в структуре теории (логический анализ). Новосибирск: Наука, 1977. 128 с.

[6] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.

[7] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. 256 с.

[8] *Bochenski I.M.* Ancient formal logic. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1951. 122 p.

ОЧЕРК 3.

ЛИНИИ РАЗГРАНИЧЕНИЯ ЛОГИКИ И МАТЕМАТИКИ

> ...все науки начинаются с определения понятий, в противном случае они не заслуживают названиянаук, а являются пустыми разговорами.
>
> *Т. Гоббс. О человеке*

Что такое математическое знание? Какова природа объектов математики? Каково отношение логики и математики? Эти вопросы еще долгое время будут интересовать философов и математиков. Удивление перед математикой нашло отражение в известном высказывании Галилея о том, что *книга природы написана языком математики*, и в известной статье Е. Вигнера *«Непостижимая эффективность математики в естественных науках»* [1]. Одно из возможных объяснений могло бы заключаться в том, что математика – это продолжение логики, что все математические понятия производны от логических, и потому из универсальной применимости логики следуют универсальность и эффективность математики. В этом случае нет ничего удивительного ни в словах Галилея, ни в словах Вигнера.

3.1. Идея логицизма

К середине XIX в. было показано, что анализ, алгебра и даже геометрия сводимы к арифметике. Отрицательные, целые и рациональные числа определимы с помощью натуральных чисел арифметики. Действительные числа определимы как пределы последовательностей рациональных чисел. Геометрию к теории чисел свел Декарт с помощью системы координат, предложив определять точки как пары или тройки чисел, а линии как множества точек, являющихся решениями соответствующих уравнений. Алгебраические структуры возникли в результате абстрагирования от конкретных свойств чисел и операций с ними. Дело оставалось за малым. Нужно было показать, что сама арифметика сводима к логике. Такую попытку предпринял Г. Фреге. Он предложил, как средствами логики можно определить понятие числа. Но, когда уже был готов к печати второй том *«Основных законов арифметики»*, содержавший подробное изложение результатов Фреге, он получил письмо от Б. Рассела, в котором было указано на противоречивость построенной системы арифметики. Нечто подобное произошло полвека спустя, когда С. Клини и Дж. Россер обнаружили противоречие в первоначальном варианте ламбда-исчисления А. Чёрча, которое также можно рассматривать как более позднюю попытку логического обоснования математики.

Несмотря на то, что подход Фреге оказался неудачным, идея продолжала жить. По иронии судьбы наибольшие усилия для ее воплощения предпринял именно Рассел. В соавторстве с А. Уайтхедом в 1910–1913 гг. он опубликовал трехтомный труд «Principia Mathematica» [24], посвященный строгому построению символической логики и редукции к ней основных разделов математики. Актуальность работы была обусловлена тем, что обнаруженное Расселом противоречие затрагивало не только построения Фреге, но и всю математику, поскольку для его получения использовался широко распространенный в то время в математике способ рассуждения, позволявший по всякому свойству объединять в одну совокупность обладающие им объекты. Попытки найти выход из сложившейся ситуации привели к появлению нескольких направлений в обосновании математики – логицизма, интуиционизма, формализма и теоретико-множественного подхода. Об этом написано много работ, и мы не будем на них подробно останавливаться. Обратим внимание на логицизм.

В конце XIX в математике стал набирать популярность аксиоматический подход к построению теорий. Достаточно было принять ряд нужных постулатов, и в результате получалась готовая теория. Но при этом зачастую не было никаких гарантий, что эта теория не окажется противоречивой. К тому времени уже был обнаружен ряд противоречий в теории множеств, но на них не обратили должного внимания, поскольку они затрагивали лишь продвинутые разделы теории. Парадокс, обнаруженный Расселом, был прост и грозил обрушить все здание математики. Позже, во *«Введении в математическую философию»*, Рассел напишет:

> *Метод постулирования того, что мы хотим, имеет много преимуществ; они, эти преимущества, точно такие же, как преимущества воровства перед честным трудом. Давайте оставим их другим, а сами займемся нашим тяжелым трудом* [7, с. 121].

Вопреки этим пожеланиям оказалось, что для построения математики на основе логики требовалось принять дополнительные далекие от очевидности аксиомы *сводимости, мультипликативности (выбора) и бесконечности.* Они и поставили под удар расселовский подход к реализации программы логицизма. Он был признан неудачным. После того, как в 30-х гг. прошлого века были доказаны ограничительные теоремы Гёделя-Тарского, интерес к логицизму значительно снизился.

Необходимо отметить, что, начиная с работ Фреге и заканчивая работами Гёделя и Тарского, происходил процесс не только поиска новых оснований математики, но и процесс осмысления, что такое логика. Именно этим объяснялись споры вокруг аксиом сводимости, мультипликативности и бесконечности. Относить их к логике или нет? В результате пришли к соглашению, что эти аксиомы постулируют слишком много и потому не могут считаться логическими. После работ Гёделя-Тарского была поставлена окончательная точка в ответе на вопрос, что такое законы логики? Это утверждения, истинные в любой предметной области и при любой интерпретации. Примерами являются законы тождества, противоречия и многие другие. Любая критика в адрес Фреге, Рассела и других основоположников современной логики должна учитывать эти обстоятельства, чтобы быть справедливой. Поэтому все, что будет сказано далее, – это взгляд на проблему логицизма с современной точки зрения, а не как это виделось в начале XX в.

Фреге и Рассел предприняли конкретные попытки свести математику к логике, но им это не удалось. Почему бы не предположить, что другие исследователи могли продолжить их дело, и одна из последующих попыток могла завершиться успехом? В этом случае удалось бы найти такой набор определений базисных понятий математики в терминах чистой логики, из которых логическими средствами дедуцируются все теоремы математики, в том числе теоремы арифметики и геометрии. Но какими бы сложными и изощренными ни были такие построения, это невозможно по очень простой причине. Дело в том, что язык арифметики содержит предикат равенства, и одной из теорем арифметики является утверждение, что ноль не равен единице $0 \neq 1$. Это утверждение может быть истинным, если универсум рассуждения содержит не менее двух объектов.

Но, как мы знаем, согласно теореме о полноте логики предикатов, теоремы логики истинны во всех предметных областях, в том числе и одноэлементных. Данное же утверждение $0 \neq 1$ не может быть истинным в одноэлементной области и потому не может быть теоремой логики, как бы мы ни старались определить 0 и 1. Такое простое рассуждение позволяет заключить, что, с точки зрения современной логики, идея логицизма, редукции математики к логике, внутренне противоречива, а потому была изначально не реализуема. Удивительно, что на это никто не обратил внимания. Для того и понадобилась Расселу аксиома бесконечности, чтобы обойти данное затруднение, но тогда мы имели бы не логику, а нечто другое, на что и было указано критиками.

Теперь все споры позади, и вроде бы пришла пора поставить крест на логицизме. Но делать это еще рано. Да, как мы установили, полная редукция математики к логике невозможна, но это не исключает возможности того, что некоторые математические теории все-таки сводимы к логике. Если это так, то одни теории привносят допущения об устройстве мира, ограничивая класс ситуаций, в которых они применимы, другие же – справедливы в любых областях. Научиться различать их, т. е. выяснить, до каких пределов программа логицизма реализуема в логике предикатов первого порядка, – интересная задача с точки зрения лучшего понимания природы математического знания. Это позволило бы провести четкую границу, отделяющую логику от математики.

3.2. Формальное уточнение идеи логицизма

Будем считать, что язык логики предикатов первого порядка задан стандартным образом как множество термов и формул над сигнатурой (словарем) Σ, которая состоит из функциональных и предикатных символов. Мы будем использовать запись $L(\Sigma)$ для обозначения языка первого порядка над сигнатурой Σ, т. е. для множества всех его правильно построенных выражений. Моделями будем называть пары $M = \langle D, I \rangle$, где D – непустое множество индивидов, а I – функция интерпретации функциональных и предикатных символов сигнатуры Σ в D. Отношение *«формула A истинна в модели M для приписывания значений индивидным переменным g»* и *«формула A истинна в модели M»* определяются обычным образом и обозначаются как $M, g \models A$ и $M \models A$.

Теория первого порядка в языке $L(\Sigma)$ – это множество логических аксиом и нелогических постулатов, замкнутое относительно выводимости. *Логика (исчисление) предикатов первого порядка* – это теория первого порядка с пустым множеством нелогических постулатов.

Аксиомы равенства мы будем рассматривать как нелогические постулаты. Язык первого порядка может быть расширен с помощью определений новых предикатных символов, которые имеют следующий вид:

$$\forall x_1..x_n(P(x_1, .., x_n) \equiv A)$$

Определения должны удовлетворять условиям:

1. $P \notin \Sigma$.
2. $A \in L(\Sigma)$.
3. Если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j$.
4. Множество свободных переменных формулы A включено в $\{x_1, .., x_n\}$.

После введения нового предикатного символа P он добавляется к сигнатуре Σ и происходит соответствующее расширение языка, т. е. происходит переход от сигнатуры Σ к сигнатуре $\Sigma \cup \{P\}$ и от языка $L(\Sigma)$ к языку $L(\Sigma \cup \{P\})$. Мы не станем специально рассматривать правила определения функциональных символов, поскольку в теориях первого порядка они могут быть заменены функциональными отношениями и, как выяснится в дальнейшем, конечный результат не зависит от их наличия в сигнатуре.

Теперь мы готовы дать формальное уточнение основной идеи программы логицизма. Она исходила из того, что *для любой математической теории T в языке L_T с набором постулатов Ax, можно найти такое множество определений DF предикатных символов теории T, что для всякой формулы $B \in L_T$ будет иметь место*:

$$Ax \vdash B \Leftrightarrow DF \vdash B.$$

Полезно обратить внимание, что данное уточнение является частным случаем понятия дефинициальной вложимости теорий, предложенного В.А. Смирновым в [21][8, с. 65]. В рассматриваемом случае речь идет о вложении в теорию с пустым множеством постулатов, т. е. в логику, и потому определения предикатных символов теории T должны быть логическими. Ниже на примерах мы проиллюстрируем, как это может выглядеть.

3.3. Примеры теорий, сводимых к логике

Как было отмечено выше, арифметику нельзя редуцировать к логике, но для многих известных теорий это возможно.

Теория универсального отношения

Пусть $\forall\mathbf{x}$ будет сокращением для $\forall x_1 \dots \forall x_n$, а $Q\mathbf{x}$ – сокращением для $Q(x_1, \dots, x_n)$. Теория универсального n-местного отношения $U\mathbf{x}$ задается с помощью единственного постулата $\vdash \forall\mathbf{x}U\mathbf{x}$. Сигнатура логики предикатов первого порядка для каждого $n \geq 0$ содержит счетное множество n-местных предикатных символов. Возьмем произвольный n-местный предикатный символ P и примем следующее определение:

$$(DU) \qquad \forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x})$$

Поскольку $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x})$ – теорема логики, легко показать, что имеет место выводимость:

$$\forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x}) \vdash \forall\mathbf{x}U\mathbf{x}$$

Поэтому, если $\forall\mathbf{x}U\mathbf{x} \vdash B$, то $\forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x}) \vdash B$.

С другой стороны, допустим, что имеет место выводимость $\forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x}) \vdash B$, где формула B принадлежит языку теории универсального отношения L_U, т. е. не содержит вхождений предикатного символа P. По теореме дедукции получим $\vdash \forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x}) \supset B$. Поскольку в логике доказуема формула $\forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \vee \neg U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x})$, то по теореме о замене эквивалентных получим $\vdash \forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv U\mathbf{x} \vee \neg U\mathbf{x}) \supset B$. А так как $\forall\mathbf{x}U\mathbf{x} \vdash \forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv U\mathbf{x} \vee \neg U\mathbf{x})$, то $\forall\mathbf{x}U\mathbf{x} \vdash B$. Следовательно, если $\forall\mathbf{x}(U\mathbf{x} \equiv P\mathbf{x} \vee \neg P\mathbf{x}) \vdash B$, то $\forall\mathbf{x}U\mathbf{x} \vdash B$.

Пример с теорией универсального отношения может показаться тривиальным, но существуют и более интересные теории.

Теория симметричного отношения

Одним из простых, но не тривиальных примеров является теория симметричного отношения. Отношение Sxy называется симметричным, если из Sxy следует Syx. Покажем, что это отношение можно определить средствами чистой логики, и его характеристическая аксиома $\forall xy(Sxy \supset Syx)$ станет теоремой логики, как и мечтали логицисты.

Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами. Пусть B – произвольный двухместный предикатный символ. Два варианта определений симметричного отношения выглядят следующим образом:

(DS_1) $\qquad \forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$

(DS_2) $\qquad \forall xy(S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy)$

Проверим, что $DS_1 \vdash \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$.

$+1.\ \forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$	
$\lceil +2.\ S_1xy$	- доп.
$\mid 3.\ \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$	- из 1 и 2
$\mid\lceil +4.\ \forall uv(Buv \supset Bvu)$	- доп.
$\mid\mid 5.\ Bxy$	- из 3, 4 по *m.p.*
$\mid\mid 6.\ Bxy \supset Byx$	- из 4 по $\forall_{el}$
$\mid\lfloor 7.\ Byx$	- из 5, 6 по *m.p.*
$\mid 8.\ \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx$	- из 4-7 по $\supset_{in}$
$\lfloor 9.\ S_1yx$	- из 8 и 1
$10.\ S_1xy \supset S_1yx$	- из 2-9 по $\supset_{in}$
$11.\ \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$	- из 10 по $\forall_{in}$

Проверим, что $DS_2 \vdash \forall xy(S_2xy \supset S_2yx)$.

$+1.\ \forall xy(S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy)$	
$\lceil +2.\ S_2xy$	- доп.
$\mid 3.\ \forall uv(Buv \supset Bvu) \& Bxy$	- из 1 и 2
$\mid 4.\ Bxy$	- из 3 по $\&_{el}$

| 5. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ - из 3 по $\&_{el}$
| 6. $Bxy \supset Byx$ - из 5 по $\forall el$
| 7. Byx - из 4, 6 по $m.p.$
| 8. $\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Byx$ - из 5, 7 по $\&_{in}$
⌊ 9. S_2yx - из 8 и 1
10. $S_2xy \supset S_2yx$ - из 2-9 по $\supset in$
11. $\forall xy(S_2xy \supset S_2yx)$ - из 10 по $\forall_{in}$

Можно предположить, что мы столкнулись с очередным псевдопарадоксальным свойством классической логики, которое характерно лишь для нее, но для других логик не имеет места. Покажем, что это не так. Рассмотрим еще одно доказательство для $DS_1 \vdash \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$.

1. $\vdash \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset (Bxy \supset Byx)$ - теорема логики
2. $\vdash (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset$
   $\supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx))$ – из 1
3. $\vdash \forall xy((\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset$
   $\supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx)))$ - из 2 по $\forall_{in}$
4. $DS_1 \vdash \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$ - из 3

Данное доказательство имеет место и в интуиционистской, и в релевантной логике R. Существенным образом оно зависит лишь от:

- обычных свойств квантора всеобщности;
- свойства самодистрибутивности импликации.

Проанализируем теперь определимость симметричного отношения с точки зрения семантики классической логики. Прежде всего, заметим, что многие известные отношения остаются справедливыми, если они интерпретируются как универсальное или пустое отношение. Очевидно, что аксиома симметричного отношения $\forall xy(Sxy \supset Syx)$ истинна в модели $M = \langle D, I\rangle$, где $I(S) = D \times D$ или $I(S) = \varnothing$.

Рассмотрим формулу $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$ правой части определения DS_1, где B – произвольный двухместный предикатный символ языка. Легко проверить, что она эквивалентна формуле:

$$(\neg\forall uv(Buv \supset Bvu)\&(Bxy \vee \neg Bxy)) \vee (\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Bxy)$$

В тех моделях, где предикатный символ B интерпретируется как симметричное отношение, будет истинна формула $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ и тем самым область истинности всей формулы совпадет с областью истинности ее правого дизъюнкта, т. е. с областью истинности формулы Bxy. В тех моделях, где предикатный символ B не интерпретируется как симметричное отношение, будет истинна формула $\neg\forall uv(Buv \supset Bvu)$, и область истинности всей формулы совпадет с областью истинности ее левого дизъюнкта, т. е. с областью истинности формулы $Bxy \vee \neg Bxy$, которая по своим свойствам является симметричным отношением. Таким образом, в любой модели область истинности нашей формулы является симметричным отношением. Иными словами, следующая формула логически общезначима:

$$\forall xy((\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx))$$

Теперь рассмотрим формулу $\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Bxy$ правой части определения DS_2, где B – произвольный двухместный предикатный символ языка. Она эквивалентна формуле:

$$(\neg\forall uv(Buv \supset Bvu)\&(Bxy\&\neg Bxy)) \vee (\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Bxy)$$

Рассуждение аналогично предыдущему, но с одним небольшим отличием. В тех моделях, где предикатный символ B интерпретируется как симметричное отношение, будет истинна формула $\forall uv(Buv \supset Bvu)$ и тем самым область истинности всей формулы совпадет с областью истинности ее правого дизъюнкта, т. е. с областью истинности формулы Bxy. В тех моделях, где предикатный символ B не интерпретируется как симметричное отношение, будет истинна формула $\neg\forall uv(Buv \supset Bvu)$, и область истинности всей формулы совпадет с областью истинности ее левого дизъюнкта, т. е. с областью истинности пустого двухместного отношения $Bxy\&\neg Bxy$, которое по своим свойствам является симметричным. Таким образом, в любой модели область истинности нашей формулы является симметричным отношением, и потому следующая формула логически общезначима:

$$\forall xy((\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu)\&Byx))$$

Поскольку во множестве всех моделей логики предикатов двухместный предикатный символ B принимает все возможные интерпретации, в том числе и все возможные интерпретации симметричного отношения, то и правые части определений DS_1 и DS_2, принимают все возможные интерпретации симметричного отношения и только их.

Для философов пример теории симметричного отношения интересен тем, что симметрия – один из фундаментальных принципов современной физики, законы которой симметричны относительно прошлого и будущего, не зависят от сдвига системы отсчета во времени или пространстве, их не изменяет поворот пространственной системы отсчета. Вспомним популярный когда-то в среде физиков лозунг: *«Ищите симметрию»*. Теперь мы могли бы добавить: *«...и вы ее обязательно найдете, потому что это логическое отношение»*. Лозунг: *«Ищите симметрию»* по сути ничем не отличается от лозунга: *«Ищите А или не-А»*, но призывов к этому почему-то не слышно. Известный принцип относительности Галилея – это симметрия покоя и движения. В специальной теории относительности симметрия проявляется в равноправии наблюдателей. Законы сохранения – это тоже симметрия [2].

Возникает вопрос. Симметрия – это априорная логическая схема, с помощью которой мы упорядочиваем явления окружающего мира, или он сам устроен по законам логики? Не в этом ли кроется объяснение непостижимой эффективности математики в естественных науках?

Отношения порядка

Отношение симметрии – это лишь одно из отношений порядка, но им дело не ограничивается. Познание окружающего мира теснейшим образом связано с его упорядочиванием, которое может относиться как к физическим объектам во времени или пространстве, так и к абстрактным математическим объектам. Вопросы о дискретности или непрерывности пространства и времени – это вопросы о порядке. Фундаментальную проблему детерминизма можно представить в виде поиска ответа на вопрос о линейной упорядоченности моментов времени. Если все детерминировано, то у нас нет выбора, и время в будущее вытянуто в линию. Никаких ветвлений нет. Если же будущее не предопределено, то уже сегодня есть варианты дальнейшего развития событий, время в будущее потенциально ветвится. Оказывается, что различные виды порядков: линейный, частичный, дискретный, плотный и др. – также могут быть определены средствами чистой логики и потому не несут никакой информации. Это просто удобная сетка, сквозь которую мы смотрим на окружающий мир.

Приведем без доказательства небольшой перечень отношений порядка, которые могут быть определены в логике.

	Отношения	**Постулаты**
1	Рефлексивность	$\forall x Pxx$
2	Антирефлексивность	$\forall x \neg Pxx$
3	Симметричность	$\forall xy(Pxy \supset Pyx)$
4	Антисимметричность	$\forall xy(Pxy \& Pyx \supset x = y)$
5	Асимметричность	$\forall xy(Pxy \supset \neg Pyx)$
6	Транзитивность	$\forall xyz(Pxy \& Pyz \supset Pxz)$
7	Связность	$\forall xy(Pxy \vee Pyx)$
8	Линейность	$\forall xy(Pxy \vee Pyx \vee x = y)$
9	Первый эл-т	$\exists x \forall y Pxy$
10	Последний эл-т	$\exists y \forall x Pxy$
11	Нет последнего эл-та	$\forall x \exists y Pxy$
12	Нет первого эл-та	$\forall y \exists x Pxy$
13	Плотность	$\forall xy(Pxy \supset \exists z(Pxz \& Pzy))$
14	Дискретность	$\forall x(\exists y Pxy \supset$ $\supset \exists y(Pxy \& \neg \exists z(Pxz \& Pzy)))$
15	Частичный порядок	1, 4, 6
16	Эквивалентность	1, 3, 6
17	Функциональность	$\forall \mathbf{x} \exists y Pxy \& \forall \mathbf{x} yz(P\mathbf{x}y \& P\mathbf{x}z \supset y = z)$

Теория равенства

Известно, что отношение равенства невозможно определить в логике предикатов первого порядка. Это можно сделать лишь в логике второго порядка, которая допускает квантификацию по предикатам. Тем не менее, для исчисления предикатов с равенством, сигнатура которого содержит конечное множество функциональных и предикатных символов, мы можем определить двухместное отношение, поведение которого будет неотличимо от поведения равенства. Для этого необходимо одновременно с определением предиката равенства принять определения и для остальных нелогических предикатов. Приведем полное доказательство.

Обычно исчисление предикатов первого порядка с равенством задается как расширение исчисления предикатов первого порядка без равенства путем добавления к его сигнатуре нового двухместного предикатного символа « $=$ » и принятия дополнительных аксиом

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall xy(x = y \supset (A(x) \supset A(y)))$

Первая аксиома – это закон тождества, а вторая аксиома – схема аксиом для всех формул $A(x)$, в которые может входить, а может и не входить свободно индивидная переменная x. Формула $A(y)$ – это результат правильной подстановки индивидной переменной y вместо вхождений переменной x в формулу $A(x)$.

Если множество предикатных и функциональных символов конечно, то вторую схему аксиом можно заменить конечным списком формул вида:

- $\forall \mathbf{xy}(x_1 = y_1 \& .. \& x_n = y_n \supset f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}))$
- $\forall \mathbf{xy}(x_1 = y_1 \& .. \& x_n = y_n \supset (P(\mathbf{x}) \supset P(\mathbf{y})))$

для всех функциональных и предикатных символов языка f и P [10, с. 41].

Будем считать, что именно таким образом и задана теория T отношения равенства в сигнатуре Σ_T с конечным множеством дескриптивных символов.

Пусть сигнатура Σ логики первого порядка не содержит ни одного предикатного символа сигнатуры Σ_T, но включает все функциональные символы Σ_T. Каждому предикатному символу $P^n \in \Sigma_T$ сопоставим предикатный символ $R^n \in \Sigma$ той же местности. Символ, поставленный в соответствие отношению равенства « $=$ », обозначим посредством « $\approx$ ».

Пусть Ax обозначает конъюнкцию конечного набора замкнутых аксиом теории равенства T, а $Ax[R/P]$ обозначает формулу Ax, в которой предикатный символ « $=$ » переименован в « $\approx$ », а каждый предикатный символ P^n переименован в R^n. Обращаем внимание, что $Ax[R/P]$ – это формула языка $L(\Sigma)$.

Для символа « $=$ » примем определение:

$$(DE) \qquad \forall xy(x = y \equiv Ax[R/P] \supset x \approx y)$$

а для каждого предикатного символа $P^n \in \Sigma_T$ примем определение:

$$(DP^n) \qquad \forall \mathbf{x}(P^n(\mathbf{x}) \equiv Ax[R/P] \supset R^n(\mathbf{x}))$$

Принятие каждого из этих определений сопровождается расширением сигнатуры Σ новыми определяемыми предикатными символами. После принятия всех определений сигнатура логики расширяется до сигнатуры Σ' и содержит все функциональные и предикатные символы сигнатуры Σ_T. В качестве сокращения для $x_1 = y_1 \& .. \& x_n = y_n$ будем использовать запись $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, для сокращения $a_1 = b_1 \& .. \& a_n = b_n$ – запись $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, , а для сокращения $f(x_1, \dots, x_n)$ - запись $f(\mathbf{x})$.

($\Longrightarrow$) Докажем, что если $B \in L(\Sigma_T)$ и $Ax \vdash B$, то DE, $DP^n \vdash B$. Достаточно показать, что данное утверждение справедливо для всех аксиом равенства.

$+1.\ \forall xy(x = y \equiv Ax[R/P] \supset x \approx y)$	- опр. DE
$2.\ \vdash Ax[R/P] \supset \forall x(x \approx x)$	- $\&_{el}$ из $Ax[R/P]$
$3.\ \vdash Ax[R/P] \supset x \approx x$	- из 2
$4.\ x = x \equiv Ax[R/P] \supset x \approx x$	- из 1 по $\forall_{el}$
$5.\ x = x$	- из 3, 4
$6.\ \forall x(x = x)$	- из 5 по $\forall_{in}$

$+1.\ \forall xy(x = y \equiv Ax[R/P] \supset x \approx y)$	- DE

$\lceil$ $+2.\ \neg\forall\mathbf{xy}(\mathbf{x}=\mathbf{y}\supset f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}))$ - доп.
| 3. $\exists\mathbf{xy}\neg(\mathbf{x}=\mathbf{y}\supset f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}))$ - из 2
| 4. $\exists\mathbf{xy}(\mathbf{x}=\mathbf{y}\&\neg f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}))$ - из 3
| 5. $\mathbf{a}=\mathbf{b}\&\neg f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b})$ - из 4 некот. $\mathbf{a},\mathbf{b}$
| 6. $\neg f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b})$ - из 5, $\&_{el}$
| 7. $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ - из 5, $\&_{el}$
| 8. $\neg(Ax[R/P]\supset f(\mathbf{a})\approx f(\mathbf{b}))$ - из 1, 6
| 9. $Ax[R/P]\&\neg f(\mathbf{a})\approx f(\mathbf{b})$ - из 8
| 10. $Ax[R/P]$ - из 9, $\&_{el}$
| 11. $\neg f(\mathbf{a})\approx f(\mathbf{b})$ - из 9, $\&_{el}$
| 12. $\forall\mathbf{xy}(\mathbf{x}\approx\mathbf{y}\supset f(\mathbf{x})\approx f(\mathbf{y}))$ - из 10, $\&_{el}$
| 13. $\mathbf{a}\approx\mathbf{b}\supset f(\mathbf{a})\approx f(\mathbf{b})$ - из 12
| 14. $a_i=b_i\equiv Ax[R/P]\supset a_i\approx b_i$ - из 1 для всех i
| 15. $Ax[R/P]\supset a_i\approx b_i$ - из 7, 14
| 16. $a_i\approx b_i$ - из 10, 15
| 17. $\mathbf{a}\approx\mathbf{b}$ - из 16 для всех i
| 18. $f(\mathbf{a})\approx f(\mathbf{b})$ - из 13, 17
$\lfloor$ 19. противоречие - 11, 18
20. $\forall\mathbf{xy}(\mathbf{x}=\mathbf{y}\supset f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}))$ - из 2-19

$+1.\ \forall\mathbf{x}(P(\mathbf{x})\equiv Ax[R/P]\supset R(\mathbf{x}))$ - DP
$+2.\ \forall xy(x=y\equiv Ax[R/P]\supset x\approx y)$ - DE
$\lceil$ $+3.\ \neg\forall\mathbf{xy}(\mathbf{x}=\mathbf{y}\supset(P(\mathbf{x})\supset P(\mathbf{y})))$ - доп.
| 4. $\exists\mathbf{xy}\neg(\mathbf{x}=\mathbf{y}\supset(P(\mathbf{x})\supset P(\mathbf{y})))$ - из 3
| 5. $\exists\mathbf{xy}(\mathbf{x}=\mathbf{y}\&P(\mathbf{x})\&\neg P(\mathbf{y}))$ - из 4
| 6. $\mathbf{a}=\mathbf{b}\&P(\mathbf{a})\&\neg P(\mathbf{b})$ - из 5 некот. $\mathbf{a},\mathbf{b}$
| 7. $P(\mathbf{a})$ - из 6
| 8. $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ - из 6
| 9. $Ax[R/P]\supset R(\mathbf{a})$ - из 1, 7
| 10. $\neg P(\mathbf{b})$ - из 6
| 11. $Ax[R/P]\&\neg R(\mathbf{b})$ - из 1, 10
| 12. $\neg R(\mathbf{b})$ - из 11

| 13. $Ax[R/P]$ - из 11
| 14. $R(\mathbf{a})$ - из 9, 13
| 15. $(Ax[R/P] \supset a_1 \approx b_1) \& (Ax[R/P] \supset a_n \approx b_n)$ - из 2, 8
| 16. $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ - из 13, 15
| 17. $\forall \mathbf{xy}(\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \supset (R(\mathbf{x}) \supset R(\mathbf{y})))$ - из 13
| 18. $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \supset (R(\mathbf{a}) \supset R(\mathbf{b}))$ - из 17
| 19. $R(\mathbf{a}) \supset R(\mathbf{b})$ - из 16, 18
| 20. $R(\mathbf{b})$ - из 14, 19
⌊ 21. противоречие - 12, 20
22. $\forall \mathbf{xy}(\mathbf{x} = \mathbf{y} \supset (P(\mathbf{x}) \supset P(\mathbf{y})))$ - из 3-21

($\Longleftarrow$) Докажем, что если $B \in L(\Sigma_T)$ и $DE, DP^n \vdash B$, то $Ax \vdash B$.

Допустим, $DE, DP^n \vdash B$, но неверно, что $Ax \vdash B$. Отсюда по теореме о полноте следует, что имеет место $DE, DP^n \models B$ и существует такая модель $M = \langle D, I \rangle$ теории равенства и приписывание значений индивидным переменным g, что $M, g \models Ax$ и $M, g \models \neg B$.

Расширим модель $M = \langle D, I \rangle$ до модели $M' = \langle D, I' \rangle$, в которой будут истинны все формулы DE, DP^n. Для этого достаточно расширить область определения функции I таким образом, чтобы новая функция I' сопоставляла предикатному символу R_i значение $I'(R_i) = I(P_i)$ и $I'(\approx) = I(=)$, а для всех остальных дескриптивных символов сохраняла те же значения, что и I.

Поскольку $M, g \models Ax$, то в модели $M' =< D, I' >$ по определению I' будет иметь место $M', g \models Ax[R/P]$ и, следовательно, $M', g \models P_i(\mathbf{x}) \equiv Ax[R/P] \supset R_i(\mathbf{x})$ для каждого R_i. Отсюда следует, что все формулы DF истинны в модели M' при приписывании g. Поэтому по исходному допущению будет иметь место и $M', g \models B$. Но формула B не содержит символов R и $\approx$, а все другие дескриптивные символы интерпретируются так же, как в модели M, и, согласно другому нашему допущению, должно быть $M', g \models \neg B$. Мы получили противоречие. Следовательно, допущение о том, что $Ax \vdash B$ не имеет места, неверно.

Таким образом, мы доказали, что для всякой формулы $B \in L(\Sigma_T)$ имеет место

$$Ax \vdash B \Leftrightarrow DE, DP^n \vdash B$$

3.4. Основная теорема

Естественным образом возникает задача обобщить найденные примеры и найти общие критерии, при выполнении которых те или иные отношения могут быть определены в исчислении предикатов первого порядка. При этом в теории одновременно могут присутствовать не одно, а несколько взаимосвязанных отношений.

Начала теории определимости были заложены в работах А. Падоа, А. Тарского и Е. Бета. Она достаточно подробно излагается В.А. Смирновым в [8, с. 35–79]. Если дана некоторая аксиоматическая теория T, ее аксиомы рассматриваются как неявные определения дескриптивных терминов языка теории. Естественно возникает вопрос, в каких случаях некоторые из дескриптивных терминов могут быть явно определены посредством других терминов? Более строго этот вопрос можно переформулировать следующим образом. Пусть дана теория T, одним из предикатных символов языка которой является P. В каких случаях существует формула A языка теории T, не содержащая вхождений символа P и играющая роль его определения, т. е. для которой имеет место выводимость $T \vdash \forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$? Такая постановка вопроса удобна, когда речь идет об определимости одних терминов теории через другие, но плохо подходит, когда мы хотим исследовать определимость не в некоторой теории, а в логике, не содержащей дополнительных постулатов. Поэтому для решения нашей задачи лучше воспользоваться понятием дефиницального вложения теорий [8, с. 65], которое мы уже упоминали выше.

Определение 1. Теория первого порядка T в языке $L(\Sigma)$ с конечным множеством нелогических аксиом Ax дефиницально вложима в логику предикатов, если и только если существует такая сигнатура Σ' и такое множество определений DF символов $\Sigma \setminus \Sigma'$ посредством формул $L(\Sigma')$, что выполняется следующее условие:

$$\text{Если } B \in L(\Sigma), \text{ то } Ax \vdash B \Leftrightarrow DF \vdash B.$$

Для формулировки основной теоремы определим функцию π, которая переводит формулы языка логики предикатов в формулы логики высказываний, пропозициональными переменными которой являются предикатные символы сигнатуры Σ.

Определение 2.

1. $\pi(P(t_1, .., t_n)) = P$;
2. $\pi(\neg A) = \neg\pi(A)$;
3. $\pi(A \triangledown B) = \pi(A) \triangledown \pi(B)$, где $\triangledown \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
4. $\pi(QxA) = \pi(A)$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Лемма 1. Пусть v – некоторое приписывание значений пропозициональным переменным, которое стандартным образом распространяется на все формулы логики высказываний. Если для каждой атомарной подформулы $P_i(\mathbf{t})$ формулы A имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True]$, то имеет место $M \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True$, где $\underline{\forall}$ является метаязыковым обозначением универсального квантора.

Доказательство

Так как из $\underline{\forall} g[M, g \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$ логически следует $M \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True$, то нам достаточно доказать, что если для каждой атомарной подформулы $P_i(\mathbf{t})$ формулы A имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True]$, то имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True]$. Доказательство проводим индукцией по структуре формулы A.

Базис индукции

Если A – атомарная формула $P_i(\mathbf{t})$, то по условию леммы имеет место $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True]$.

Индукционный шаг

I. $A = \neg B$

$+1.\ \underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- инд. доп.
$\lceil +2.\ M, g \models \neg B$	- доп.
$\mid 3.\ M, g \not\models B$	- из 2
$\mid 4.\ M, g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- из 1
$\mid 5.\ v(\pi(B)) = False$	- из 3, 4 и опр. v
$\mid 6.\ v(\neg\pi(B)) = True$	- из 5 по опр. v
$\lfloor 7.\ v(\pi(\neg B)) = True$	- из 6 по опр. π
$8.\ M, g \models \neg B \Rightarrow v(\pi(\neg B)) = True$	- из 2-7

$+1.\ \underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- инд. доп.
$\lceil +2.\ v(\pi(\neg B)) = True$	- доп.
$\mid 3.\ v(\neg\pi(B)) = True$	- из 2 по опр. π
$\mid 4.\ v(\pi(B)) = False$	- из 3 по опр. v
$\mid 5.\ M, g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- из 1
$\mid 6.\ M, g \not\models B$	- из 4, 5
$\lfloor 7.\ M, g \models \neg B$	- из 6
$8.\ v(\pi(\neg B)) = True \Rightarrow M, g \models \neg B$	- из 2-7

II. $A = B\&C$

$+1.\ \underline{\forall} h[M,h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- инд. доп.
$+2.\ \underline{\forall} h[M,h \models C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True]$	- инд. доп.
$\lceil +3.\ M,g \models B\&C$	- доп.
$\mid 4.\ M,g \models B$	- из 3
$\mid 5.\ M,g \models C$	- из 3
$\mid 6.\ M,g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- из 1
$\mid 7.\ M,g \models C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True$	- из 2
$\mid 8.\ v(\pi(B)) = True$	- из 4, 6
$\mid 9.\ v(\pi(C)) = True$	- из 5, 7
$\mid 10.\ v(\pi(B)\&\pi(C)) = True$	- из 8, 9 по опр. v
$\lfloor 11.\ v(\pi(B\&C)) = True$	- из 10 по опр. π
$12.\ M,g \models B\&C \Rightarrow v(\pi(B\&C)) = True$	- из 3-11

$+1.\ \underline{\forall} h[M,h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- инд. доп.
$+2.\ \underline{\forall} h[M,h \models C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True]$	- инд. доп.
$\lceil +3.\ v(\pi(B\&C)) = True$	- доп.
$\mid 4.\ v(\pi(B)\&\pi(C)) = True$	- из 3 по опр. π
$\mid 5.\ v(\pi(B)) = True$	- из 4 по опр. v
$\mid 6.\ v(\pi(C)) = True$	- из 4 по опр. v
$\mid 7.\ M,g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$	- из 1
$\mid 8.\ M,g \models C \Leftrightarrow v(\pi(C)) = True$	- из 2
$\mid 9.\ M,g \models B$	- из 5, 7
$\mid 10.\ M,g \models C$	- из 6, 8
$\lfloor 11.\ M,g \models B\&C$	- из 9, 10
$12.\ v(\pi(B\&C)) = True \Rightarrow M,g \models B\&C$	- из 3-11

III. $A = \forall x B$

$+1.\ \underline{\forall} h[M,h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$	- инд. доп.
$\lceil +2.\ M,g \models \forall x B$	- доп.

$|$ 3. $M, g \models B$ - из 2
$|$ 4. $M, g \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$ - из 1
$|$ 5. $v(\pi(B)) = True$ - из 3, 4
$\lfloor$ 6. $v(\pi(\forall xB)) = True$ - из 5 по опр. π
7. $M, g \models \forall xB \Rightarrow v(\pi(\forall xB)) = True$ - из 2-6

+1. $\underline{\forall} h[M, h \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True]$ - инд. доп.
$\lceil$ +2. $v(\pi(\forall xB)) = True$ - доп.
$|$ 3. $v(\pi(B)) = True$ - из 1 по опр. π
$|\lceil$ +4. $M, g \not\models \forall xB$ - доп.
$||$ 5. $M, g' \not\models B$ - из 4, $g' \approx_x g$
$||$ 6. $M, g' \models B \Leftrightarrow v(\pi(B)) = True$ - из 1
$||$ 7. $M, g' \models B$ - из 3, 6
$||\lfloor$ 8. противоречие - 5, 7
$\lfloor$ 9. $M, g \models \forall xB$ - из 4, 8
10. $v(\pi(\forall xB)) = True \Rightarrow M, g \models \forall xB$ - из 2-8

Остальные логические связки и квантор существования выразимы через $\{\neg, \&, \forall\}$.

Лемма доказана.

Если Fm – множество формул, то посредством $\pi(Fm)$ мы будем обозначать множество формул $\{\pi(A) | A \in Fm\}$.

Лемма 2. Пусть T – теория в языке $L(\Sigma)$ с множеством аксиом Ax. Множество формул $\pi(Ax)$ непротиворечиво, если и только если для всякого непустого множества D существует такая функция интерпретации I, что $M = \langle D, I \rangle$ и $M \models Ax$.

Доказательство

$(\Longleftarrow)$ Доказательство тривиально в силу определения непротиворечивости.

($\Longrightarrow$) Допустим, $\pi(Ax)$ – непротиворечиво. Отсюда следует, что существует такое приписывание v истинностных значений пропозициональным переменным, при котором все формулы $\pi(Ax)$ истинны.

Пусть D – произвольное непустое множество. Определим функцию интерпретации I дескриптивных терминов сигнатуры Σ в множестве D. Выберем в множестве D некоторый элемент $e \in D$.

- Если c – индивидная константа, то $I(c) = e$.
- Если f – n-местный функциональный символ, то $I(f): D \times ...^n \times D \rightarrow \{e\}$.
- Если P_i – n-местный предикатный символ, то
  - $I(P_i) = D \times ...^n \times D$, если $v(\pi(P_i)) = True$
  - $I(P_i) = \emptyset$, если $v(\pi(P_i)) = False$

Пусть $M = \langle D, I \rangle$. Покажем, что $M \models Ax$.

Согласно построенной модели, $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(t) \Leftrightarrow v(\pi(P_i))]$. Из Леммы 1 получаем $M \models A \Leftrightarrow v(\pi(A))$. Поскольку для всех $A \in Ax$ имеет место $v(\pi(A)) = True$, то $M \models Ax$.

Лемма доказана.

Только что доказанная лемма имеет простой смысл, который можно выразить словами: теория первого порядка имеет одноэлементную модель, если и только если она имеет модели любых произвольных мощностей.

Теорема о дефинициальном вложении. Пусть T – конечно аксиоматизируемая теория первого порядка в языке $L(\Sigma)$ с множеством замкнутых нелогических аксиом $Ax = \{A_1, .., A_k\}$.

A. Теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, если и только если множество формул $\{\pi(A_1), .., \pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.
B. Теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, если и только если она не налагает никаких ограничений на мощность ее моделей.

Доказательство

A. ($\Longleftarrow$) Докажем, что если множество формул $\{\pi(A_1), .., \pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво, то теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка.

Пусть $\{P_1, .., P_m\}$ – множество всех предикатных символов сигнатуры Σ, входящих в нелогические аксиомы $\{A_1, .., A_k\}$.

Логическая непротиворечивость множества формул $\{\pi(A_1), .., \pi(A_k)\}$ означает, что существует хотя бы одно приписывание v истинностных значений пропозициональным переменным $\{\pi(P_1), .., \pi(P_m)\}$, при котором все формулы $\{\pi(A_1), .., \pi(A_k)\}$ истинны. Зафиксируем такое приписывание v.

Возьмем сигнатуру Σ', удовлетворяющую условиям:

- $\Sigma \setminus \Sigma' = \{P_1, .., P_m\}$.
- Для каждого r-местного предикатного символа $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$ существует отличный от других r-местный предикатный символ $R_i \in \Sigma'$.

Пусть A – конъюнкция всех нелогических аксиом $A_1, .., A_k$, а $A[R/P]$ – результат переименования в формуле A всех вхождений предикатных символов $P_1, .., P_m$ в $R_1, .., R_m$.

Каждому предикатному символу $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$ сопоставим определение по следующему правилу:

1. Если $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = v(P_i) = True$, то
$$\forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x})).$$

2. Если $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = v(P_i) = False$, то
$$\forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \& R_i(\mathbf{x})).$$

Пусть $DF = \{D_1, .., D_m\}$ – множество всех принятых нами определений.

A.1. Покажем, что если $B \in L(\Sigma)$ и $Ax \vdash B$, то $DF \vdash B$. В силу свойств отношения выводимости нам достаточно показать, что имеет место $DF \vdash A$, где A – конъюнкция всех аксиом. Воспользуемся теоремой о полноте логики предикатов первого порядка и покажем, что $DF \models A$.

Пусть $M = \langle D, I \rangle$ – произвольная модель, в которой истинны все формулы DF, а g – произвольное приписывание значений индивидным переменным.

Поскольку формула $A[R/P]$ замкнута, то имеет место либо $M \models A[R/P]$, либо $M \models \neg A[R/P]$.

Случай 1. $M \models A[R/P]$.

$+1.\ M \models A[R/P]$	
$\lceil +2.\ v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$	- $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$
$\mid$ 3. $M \models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x}))$	- из 2, опр. P_i
$\mid\lceil +4.\ M, g \models P_i(\mathbf{t})$	- доп.
$\mid\mid$ 5. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$	- из 3, 4
$\mid\lfloor$ 6. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$	- из 1, 5

$|$ 7. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 4-6
$|\lceil$ +8. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - доп.
$||$ 9. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$ - из 8
$|\lfloor$ 10. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 3, 9
$|$ 11. $M, g \models R_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 8-10
$\lfloor$ 12. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 7, 11
$\lceil$ +13. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False$ - $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$
$|$ 14. M $\models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x}))$ - из 13, опр. P_i
$|\lceil$ +15. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - доп.
$||$ 16. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$ - из 14, 15
$|\lfloor$ 17. $M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 16
$|$ 18. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 15-17
$|\lceil$ +19. $M, g| \models R_i(\mathbf{t})$ - доп.
$||$ 20. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$ - из 1, 19
$|\lfloor$ 21. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 14, 20
$|$ 22. $M, g \models R_i(\mathbf{t}) \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 19-21
$\lfloor$ 23. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 18, 22
24. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})$ - из 2-12, 13-23
25. $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow M, g \models R_i(\mathbf{t})]$ - из 24
26. $M \models A$ - из 1, 25

Случай 2. $M \models \neg A[R/P]$.

+1. $M \models \neg A[R/P]$
$\lceil$ +2. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$ - $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$
$|$ 3. $M \models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P] \supset R_i(\mathbf{x}))$ - из 2, опр. P_i
$|$ 4. $M, g \models A[R/P]\&R_i(\mathbf{t}) \vee \neg A[R/P]$ - из 1
$|$ 5. $M, g \models A[R/P] \supset A[R/P]\&R_i(\mathbf{t})$ - из 4
$|$ 6. $M, g \models A[R/P] \supset R_i(\mathbf{t})$ - из 5
$\lfloor$ 7. $M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 3, 6
8. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True \Rightarrow M, g \models P_i(\mathbf{t})$ - из 2-7
$\lceil$ +9. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False$ - $P_i \in \{P_1, .., P_m\}$
$|$ 10. $M \models \forall \mathbf{x}(P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x}))$ - 9, опр. P_i

| 11. $M, g \models \neg A[R/P] \vee \neg R_i(\mathbf{t})$ - из 1
| 12. $M, g \models \neg(A[R/P] \& R_i(\mathbf{t}))$ - из 11
⌊ 13. $M, g \not\models P_i(\mathbf{t})$ - из 10, 12
14. $v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = False \Rightarrow M, g \not\models P_i(\mathbf{t})$ - из 9-13
15. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Rightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$ - из 14
16. $M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True$ - из 8, 15
17. $\underline{\forall} g[M, g \models P_i(\mathbf{t}) \Leftrightarrow v(\pi(P_i(\mathbf{t}))) = True]$ - из 16
18. $M \models A \Leftrightarrow v(\pi(A)) = True$ - из 17, Лемма 1
19. A есть сокращение для $A_1\&..\&A_n$ - по условию
20. $v(\pi(A_1)) = True, .., v(\pi(A_k)) = True$ - по выбору v
21. $v(\pi(A)) = True$ - из 19, 20
22. $M \models A$ - из 18, 21

В каждом из двух возможных случаев $M \models A[R/P]$ и $M \models \neg A[R/P]$ мы пришли к заключению $M \models A$. Следовательно, $M \models A$. Так как M – произвольная модель, то $\underline{\forall} M(M \models DF \Rightarrow M \models A)$ и, следовательно, $DF \models A$. Отсюда на основании теоремы о полноте логики предикатов получаем $DF \vdash A$.

A.2. Покажем, что если $B \in L(\Sigma)$ и $DF \vdash B$, то $Ax \vdash B$. По теореме о полноте логики предикатов первого порядка это эквивалентно утверждению, что если $DF \models B$, то $Ax \models B$.

Допустим, $DF \models B$, но неверно, что $Ax \models B$. Тогда существует такая модель $M = \langle D, I \rangle$ теории T, что $M \models A$ и $M \not\models B$.

Расширим модель $M = \langle D, I \rangle$ до модели $M' = \langle D, I' \rangle$, в которой будут истинны все формулы DF. Для этого достаточно расширить область определения функции I таким образом, чтобы новая функция I' сопоставляла предикатному символу R_i значение $I'(R_i) = I(P_i)$, а для всех остальных дескриптивных символов сохраняла те же значения, что и I.

Поскольку $M \models A$, то в модели $M' = \langle D, I' \rangle$ по определению I' будет иметь место $M' \models A[R/P]$ и, следовательно, $M' \models P_i(\mathbf{x}) \equiv A[R/P]\&R_i(\mathbf{x})$ для каждого R_i. Отсюда следует, что все формулы DF будут истинны в модели M'. Поэтому по исходному допущению $DF \models B$ будет иметь место и $M' \models B$. Но формула B не содержит символов $R_1, .., R_m$, а все другие дескриптивные символы интерпретируются так же, как в модели M, и, согласно другому нашему допущению, должно быть $M' \not\models B$. Мы получили противоречие. Поэтому допущение о том, что следование $Ax \models B$ не имеет места, неверно.

A. $(\Longrightarrow)$ Покажем, что если теория T дефиницiально вложима в логику предикатов первого порядка, то множество формул $\pi(A_1), .., \pi(A_k)$ логически непротиворечиво.

Допустим, что для некоторого множества определений DF, если $C \in L(\Sigma)$, то $Ax \vdash C \Leftrightarrow DF \vdash C$.

Возьмем произвольную одноэлементную модель $M = \langle \{a\}, I \rangle$ сигнатуры Σ' логики предикатов, добавим к ней предикатные символы $\Sigma \setminus \Sigma'$ и следующим образом расширим область определения функции интерпретации I.

Для каждого предикатного символа $P_i \in \Sigma \setminus \Sigma'$, если он был введен посредством определения $P_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv B$, расширим область определения функции интерпретации I следующим образом:

$$I'(P_i) = \{< g(x_1), ..., g(x_n) > | M, g \models B\}$$

Заметим, что поскольку область индивидов состоит всего из одного элемента, то и функция g приписывания значений индивидным переменным тоже всего одна, и, следовательно, предикатный символ P_i будет интерпретироваться либо пустым множеством $\varnothing$, либо одноэлементным множеством $\{< a, ..., a >\}$.

Проделав эту операцию со всеми новыми предикатными символами, мы получим модель $M' = \langle \{a\}, I' \rangle$ сигнатуры $\Sigma \cup \Sigma'$, в которой будут истинны все определения множества DF.

Поскольку для всех $C \in L(\Sigma)$ мы допустили, что $Ax \vdash C \Leftrightarrow DF \vdash C$, то и всякая аксиома $A \in \{A_1, .., A_k\}$ выводима из DF. По теореме о полноте логики предикатов получаем $DF \models A_i$. Это означает, что существует хотя бы одна одноэлементная модель теории T, и, следовательно, множество $\{\pi(A_1), .., \pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.

B. Вторая часть теоремы следует из первой части и Леммы 2.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы можно извлечь двойную пользу. С одной стороны, она содержит строгий и эффективный критерий для определения, является ли конкретная теория дефинициально вложимой в логику предикатов первого порядка. Для этого достаточно построить пропозициональный π-образ постулатов теории и проверить его на непротиворечивость любым из известных методов. С другой стороны, она дает содержательный критерий, который заключается в отсутствии ограничений на мощность моделей теории. Для применения этого критерия достаточно минимального знания логики. Поскольку отсутствие ограничений на мощность моделей, согласно Лемме 2, равносильно существованию одноэлементных моделей, то достаточно проверить, есть ли у теории такие модели, которые в математике часто называют вырожденными и потому считают малоинтересными. Оказывается, что существование таких моделей как раз и является критерием дефинициальной вложимости теорий в логику предикатов. Еще одним очевидным, но частичным критерием дефинициальной вложимости теорий в логику является отсутствие связки отрицания в их постулатах, когда используются лишь связки &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ и кванторы $\forall$, $\exists$. В этом случае все формулы пропозиционального образа постулатов теории будут заведомо истинны, если переменным приписать значение $True$.

Может показаться странным, что дефинициальная вложимость теорий в логику не зависит от наличия в их языке функциональных символов. Объяснения этому очень простое. Дело в том, что функциональное отношение характеризуется формулой $\forall \mathbf{x} \exists y P\mathbf{x}y \,\&\, \forall \mathbf{x} yz(P\mathbf{x}y \& P\mathbf{x}z \supset y = z)$. Легко заметить, что эта формула удовлетворяет критерию доказанной выше теоремы. Поэтому сами по себе функциональные символы никак не влияют на дефинициальную вложимость теорий. Все зависит лишь от постулатов, в которые они могут иметь вхождения.

3.5. Теория групп

Понятие группы является центральным в общей алгебре. Группы возникают в различных разделах математики и находят широкое применение для описания объектов физики, химии и других естественных наук.

Элементарная теория групп, как теория первого порядка, задается следующими постулатами [6, с. 89]:

1. $x = x$
2. $x = y \supset y = x$
3. $x = y \supset (y = z \supset x = z)$
4. $y = z \supset (x + y = x + z \,\&\, y + x = z + x)$
5. $x + (y + z) = (x + y) + z$
6. $0 + x = x$
7. $\exists y(y + x = 0)$

Абелевы группы получаем добавлением аксиомы:

8. $x + y = y + x$

Очевидно, что теория групп имеет модель в области, состоящей лишь из одного элемента. Легко проверить, что π-образом постулатов теории является непротиворечивое множество формул логики высказываний. Пусть $\pi(t_1 = t_2) = p$. Тогда результатом применения функции π к постулатам $1 - 8$ будет:

$1'$. p
$2'$. $p \supset p$
$3'$. $p \supset (p \supset p)$
$4'$. $p \supset p\&p$
$5'$. p
$6'$. p
$7'$. p
$8'$. p

При приписывании $v(p) = True$ все формулы данного списка принимают значение $True$.

Коль скоро теория групп дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, результат не должен измениться и в том случае, если мы представим ее в виде реляционной теории. Пусть G – трехместное функциональное отношение для представления групповой операции умножения. То есть $G(x, y, z)$ означает то же самое, что и $x + y = z$ в предыдущей аксиоматике.

Реляционная аксиоматика теории групп выглядит следующим образом:

$G.1$ $x = x$
$G.2$ $x = y \supset y = x$
$G.3$ $x = y \supset (y = z \supset x = z)$
$G.4$ $x_1 = y_1 \& x_2 = y_2 \& x_3 = y_3 \supset (G(x_1, x_2, x_3) \supset G(y_1, y_2, y_3))$
$G.5$ $\exists z G(x, y, z)$

$G.6$ $G(x,y,z_1)\&G(x,y,z_2) \supset z_1 = z_2$
$G.7$ $\forall xy\exists uhw(G(x,y,u)\&G(u,z,h)\&G(y,z,w)\&G(x,w,h))$
$G.8$ $\exists x(\forall yG(x,y,y)\&\forall y\exists zG(z,y,x))$
$G.9$ $G(x,y,z) \supset G(y,x,z)$

Постулаты $G.1 - G.4$ – это постулаты отношения равенства. Постулаты $G.5 - G.6$ утверждают, что отношение G является функциональным. Постулат $G.7$ – ассоциативность групповой операции, а постулат $G.8$ – существование единичного и обратного элементов. Постулат $G.9$ – коммутативность групповой операции для абелевых групп.

Пусть $\pi(t_1 = t_2) = p$, а $\pi(G(t_1,t_2,t_3)) = g$. Тогда результатом применения функции π к постулатам $G.1 - G.7$ будет:

$G.1'$ p
$G.2'$ $p \supset p$
$G.3'$ $p \supset (p \supset p)$
$G.4'$ $p\&p\&p \supset (g \supset g)$
$G.5'$ g
$G.6'$ $g\&g \supset p$
$G.7'$ $g\&g\&g\&g$
$G.8'$ $g\&g$
$G.9'$ $g \supset g$

При приписывании $v(p) = True$ и $v(g) = True$ все формулы данного списка принимают значение $True$.

Отсюда следует, что все аксиомы этой теории посредством подходящих определений могут быть представлены как теоремы логики [17]. В то же время более богатая алгебраическая теория поля не может быть представлена средствами чистой логики, т. к. ее модели должны содержать по крайней мере два элемента.

3.6. Комбинаторная логика

Основные идеи комбинаторной логики были сформулированы М. Шейнфинкелем [16][9], а дальнейшее развитие получили благодаря работам Х. Карри и его учеников [13][14]. Комбинаторная логика отлична от классической, но может быть представлена как теория в ее языке. В работе [18] было показано, что постулаты комбинаторной логики могут быть определены средствами классической логики предикатов первого порядка, в результате чего станут ее теоремами.

Первопорядковая теория комбинаторной логики задается в сигнатуре $\Sigma_C = \{\mathbf{K}, \mathbf{S}, \bullet, \geq\}$, где

1. $\mathbf{K}$, $\mathbf{S}$ – индивидные константы.
2. $\bullet$ – 2-аргументный инфиксный функциональный символ.
3. $\geq$ – 2-местный предикатный символ.

В исходной формулировке комбинаторная логика имеет три аксиомы и три правила [11, с. 100].

$A.1$ $x \geq x$
$A.2$ $(\mathbf{K} \bullet x) \bullet y \geq x$
$A.3$ $((\mathbf{S} \bullet x) \bullet y) \bullet z \geq (x \bullet z) \bullet (y \bullet z)$

$$R.1 \ \frac{x \geq y}{(x \bullet z) \geq (y \bullet z)}$$

$$R.2 \ \frac{x \geq y}{(z \bullet x) \geq (z \bullet y))}$$

$$R.3 \ \frac{x \geq y, \ y \geq z}{x \geq z}$$

Поскольку в доказанной нами теореме о дефинициальном вложении предполагается, что теория задается множеством постулатов, имеющих вид формул, но не правил, мы переформулируем комбинаторную логику в виде первопорядковой теории. Ее постулатами будут следующие формулы:

$AC.1\ x \geq x$
$AC.2\ (\mathbf{K} \bullet x) \bullet y \geq x$
$AC.3\ ((\mathbf{S} \bullet x) \bullet y) \bullet z \geq (x \bullet z) \bullet (y \bullet z)$
$AC.4\ x \geq y \supset (x \bullet z) \geq (y \bullet z)$
$AC.5\ x \geq y \supset (z \bullet x) \geq (z \bullet y)$
$AC.6\ x \geq y \& y \geq z \supset x \geq z$

Пусть $\pi(t_1 \geq t_2) = p$. Тогда результатом применения функции π к постулатам $AC.1 - AC.6$ будет:

$AC.1'\ p$
$AC.2'\ p$
$AC.3'\ p$
$AC.4'\ p \supset p$
$AC.5'\ p \supset p$
$AC.6'\ p \& p \supset p$

При приписывании $v(p) = True$ все формулы данного списка принимают значение $True$.

Данный пример интересен тем, что в комбинаторной логике представимы все эффективно вычислимые функции. Следовательно, эти же функции представимы и в чистой логике предикатов. Именно на этот факт и хотелось бы обратить внимание.

В чем заключаются некоторые любопытные философские следствия этого результата? Прежде всего в том, что искусство счета имеет логическую природу, будучи производным от нашей способности рассуждать. Философы Древней Греции считали недостойным заниматься счетом, полагая это уделом торговцев. Оказывается, они не были правы. Гораздо более удивительным следствием является то, что математическая теория эффективных вычислений, созданная Аланом Тьюрингом, тоже имеет чисто логическую природу. А поскольку с помощью эффективно вычислимых функций мы можем представить любую конструктивную деятельность, то и она неразрывно связана и производна от нашей способности рассуждать. Она уже имплицитно содержится в том наборе аксиом логики предикатов, который изучают студенты-первокурсники.

3.7. Теория категорий и теория топосов

В последние десятилетия получили широкую известность и набирают популярность теория категорий и теория топосов. Они находят применение в современной математике, информатике, теоретической физике и других науках. Если при теоретико-множественном подходе объекты конструируются путем задания их внутренней структуры, то при категорном – объекты задаются посредством алгебраических преобразований. Топос – это категория с дополнительными аксиомами, которые наделяют ее большими выразительными возможностями [5] [15]. С помощью языка теории топосов оказывается возможным развить арифметику и теорию множеств. Сегодня топосы рассматривают в качестве главных претендентов на роль новых оснований математики.

В качестве сигнатуры теории категорий возьмем $\Sigma = \{K, C, D\}$, где K – трехместный предикатный символ, а C и D – одноместные функциональные символы.

Элементарная теория категорий формулируется в языке исчисления предикатов с равенством и задается нелогическими аксиомами [15, p. 243]:

$AC.1\ D(C(x)) = C(x) \& C(D(x)) = D(x)$
$AC.2\ K(x_1, x_2, y_1) \& K(x_1, x_2, y_2) \supset y_1 = y_2$
$AC.3\ \exists y K(x_1, x_2, y) \equiv C(x_1) = D(x_2)$
$AC.4\ K(x_1, x_2, y) \supset (D(y) = D(x_1) \& C(y) = C(x_2))$
$AC.5\ (K(D(x), x, x) \& K(x, C(x), x)$
$AC.6\ K(x_1, x_2, x_3) \& K(x_2, x_4, x_5) \& K(x_1, x_5, x_6) \&$
$\& K(x_3, x_4, x_7) \supset x_6 = x_7$
$AC.7\ x = x$
$AC.8\ x = y \supset y = x$
$AC.9\ x = y \supset (y = z \supset x = z)$
$AC.10\ x = y \supset C(x) = C(y)$
$AC.11\ x = y \supset D(x) = D(y)$
$AC.12\ x_1 = y_1 \& x_2 = y_2 \& x_3 = y_3 \supset (K(x_1, x_2, x_3) \supset K(y_1, y_2, y_3))$

Аксиомы $AC.1$–$AC.6$ – являются собственными аксиомами теории категорий, а $AC.7$–$AC.12$ – обычные аксиомы равенства. Мы не станем подробно комментировать аксиомы, так как подробное изложение теории категорий не является нашей целью. Нам достаточно привести аксиоматику теории, чтобы убедиться в том, что она удовлетворяет критерию дефинициальной вложимости в логику. Действительно, пусть $\pi(t_1 = t_2) = p$, а $\pi(K(t_1, t_2, t_3)) = k$. Тогда при приписывании $v(p) = True$ и $v(k) = True$ все пропозициональные образы аксиом принимают значение $True$. Существование такого приписывания следует и из того, что связка отрицания не имеет вхождений ни в одну из аксиом.

Добавив к аксиомам теории категорий еще несколько аксиом, можно получить элементарную теорию топосов. Эти аксиомы приводятся в книге Хетчера [15, p. 260–279]. Они тоже не содержат вхождений связки отрицания и потому удовлетворяют критерию теоремы о дефинициальном вложении. Более неформально в этом же можно убедиться, просмотрев аксиомы теории топосов в книге Голдблатта [5]. Дефинициальная вложимость теории топосов в логику следует также из того, что категория **1**, состоящая из единственной единичной стрелки является вырожденным топосом [12, с. 60].

Таким образом, теория категорий и теория элементарных топосов не выводят нас за рамки логики предикатов первого порядка. Лишь когда средствами языка теории топосов хотят определить понятия арифметики и теории множеств, принимается дополнительный постулат, не входящий в стандартный набор этой теории. Этот постулат гласит, что так называемые начальный и конечный объекты топоса неизоморфны. Лишь в этот момент топосы выходят за рамки выразительных возможностей классической логики, поскольку теперь их модели должны содержать более одного элемента.

Топосы в качестве нового математического аппарата не являются прорывом в нашем понимании окружающего мира, а служат всего лишь еще одной сеткой, системой координат, которую мы на него налагаем. В то же время, с философской точки зрения, топосы представляют большой интерес, поскольку представляют собой успешную попытку построения альтернативной онтологии математики и других наук. В первоначальном построении теория категорий и топосов оперирует с двумя типами предметов – объектами и стрелками. Стрелки – это предметы, играющие роль особых отношений между объектами и обладающие функциональными признаками. Но оказывается, что объекты избыточны и могут быть заменены так называемыми единичными стрелками, которые присутствуют в каждой категории. В результате получается бессубстанциальная математическая онтология. Объекты больше не нужны, остаются лишь абстрактные отношения, обладающие некоторыми свойствами функций. Это означает, что для описания всего богатства математики и математизированных теорий естествознания нет необходимости принимать допущение о существовании субстанции. С равным успехом все можно строго описать лишь в терминах стрелок и их композиций. В онтологии Аристотеля свойства существуют посредством предметов, ими обладающих. В теории множеств множества существуют благодаря принадлежащим им элементам. В теории категорий и топосов оказалось возможным исключить гипотезу о субстанциальной составляющей. Это действительно очень интересно и не может оставить философов равнодушными. В то же время, согласно нашей теореме, такой бессубстанциальный язык не обладает никакими дополнительными выразительными возможностями по сравнению с теми, которые уже содержатся в логике предикатов первого порядка. Поэтому теория топосов ничего не добавляет к нашему пониманию, как же на самом деле устроен окружающий мир. Для его описания с равным успехом могут быть использованы разные логико-математические онтологии.

3.8. Геометрия

Приведенные выше примеры не исчерпывают перечня всех интересных теорий, которые можно определить средствами чистой логики. Как обстоят дела с такой известной теорией, как геометрия?

В качестве конкретной аксиоматики можно взять набор аксиом Тарского [22] [23] или Гильберта [3, с. 26]. Недостаток аксиом Гильберта в том, что среди них отсутствует аксиома непрерывности. Поэтому мы возьмем аксиомы Тарского [22, с. 19–20]. Кроме равенства, в сигнатуру теории входят трехместное отношение B и четырехместное отношение D.

При геометрической интерпретации формула $B(x, y, z)$ означает, что точка y лежит между точками x и z, а формула $D(x, y, z, u)$ означает, что расстояние между точками x и y равно расстоянию между точками z и u.

$A.1$ $B(x,y,x) \supset x = y$

$A.2$ $B(x,y,u) \& B(y,z,u) \supset (B(x,y,z)$

$A.3$ $B(x,y,z) \& B(x,y,u) \& x \neq y \supset B(x,z,u) \vee B(x,u,z)$

$A.4$ $D(x,y,y,x)$

$A.5$ $D(x,y,z,z) \supset x = y$

$A.6$ $D(x,y,z,u) \& D(x,y,v,w) \supset D(z,u,v,w)$

$A.7$ $\exists v(B(x,t,u) \& B(y,u,z) \supset B(x,v,y) \& B(z,t,v))$

$A.8$ $\exists vw(B(x,u,t) \& B(y,u,z) \& x \neq u \supset$
$\supset B(x,z,v) \& B(x,y,w) \& B(v,t,w))$

$A.9$ $D(x,y,x',y') \& D(y,z,y',z') \& D(x,u,x',u') \&$
$\& D(y,u,y',u') \& B(x,y,z) \& B(x',y',z') \& x \neq y \supset$
$\supset D(z,u,z',u')$

$A.10$ $\exists z(B(x,y,z) \& D(y,z,u,v))$

$A.11$ $\exists xyz(\neg B(x,y,z) \& \neg B(y,z,x) \& \neg B(z,x,y))$

$A.12.$ $D(x,u,x,v) \& D(y,u,y,v) \& D(z,u,z,v) \& u \neq v \supset$
$\supset B(x,y,z) \vee B(y,z,x) \vee B(z,x,y)$

$A.13$ $\exists z \forall xy(\varphi(x) \& \psi(y) \supset B(z,x,y)) \supset \exists u \forall xy(\varphi(x) \& \psi(y) \supset$
$\supset B(x,u,y))$

$A.14$ $x = x$

$A.15$ $x = y \supset y = x$

$A.16$ $x = y \supset (y = z \supset x = z)$

$A.17$ $x_1 = y_1 \& x_2 = y_2 \& x_3 = y_3 \& x_4 = y_4 \supset$
$\supset (D(x_1,x_2,x_3,x_4) \supset D(y_1,y_2,y_3,y_4))$

$A.18$ $x_1 = y_1 \& x_2 = y_2 \& x_3 = y_3 \supset$
$\supset (B(x_1,x_2,x_3) \supset B(y_1,y_2,y_3))$

Аксиома $A.8$ – это аксиома параллельных Евклида, а $A.13$ – схема аксиом непрерывности. Аксиома $A.11$ говорит, что существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть $\pi(x = y) = p$, $\pi(B) = b$, $\pi(D) = d$. Тогда π-образами аксиом будут формулы:

$A.1'$ $b \supset p$
$A.2'$ $b\&b \supset b$
$A.3'$ $b\&b\&\neg p \supset b \vee b$
$A.4'$ d
$A.5'$ $d \supset p$
$A.6'$ $d\&d \supset d$
$A.7'$ $b\&b \supset b\&b$
$A.8'$ $b\&b\&\neg p \supset b\&b\&b$
$A.9'$ $d\&d\&d\&d\&b\&b\&\neg p \supset d$
$A.10'$ $b\&d$
$A.11'$ $\neg b\&\neg b\&\neg b$
$A.12'$ $d\&d\&d\&\ ?\ p \supset b \vee b \vee b$
$A.13'$ $(\pi(\varphi(x))\&\pi(\psi(y)) \supset b) \supset (\pi(\varphi(x))\&\pi(\psi(y)) \supset b)$
$A.14'$ p
$A.15'$ $p \supset p$
$A.16'$ $p \supset (p \supset p)$
$A.17'$ $p\&p\&p\&p \supset (d \supset d)$
$A.18'$ $p\&p\&p \supset (b \supset b)$

При приписывании истинностных значений $v(p) = True$, $v(b) = True$, $v(d) = True$ все формулы, кроме $A.11'$, принимают значение $True$.

Отдельного рассмотрения требует схема аксиом непрерывности $A.13$. Дело в том, что это не одна аксиома, а схема аксиом для различных формул φ и ψ. Очевидно, что теорема о вложении к ним неприменима. В то же время, как следует из теоремы о компактности, в каждом конкретном доказательстве теорем геометрии используется не более, чем конечное множество формул вида $A.13$, π-образ каждой из которых является частным случаем закона тождества и потому истинен при любом приписывании значений переменным. Поэтому, если доказательство не использует аксиомы $A.11$, то оно может быть представлено как доказательство теоремы логики.

Для построения геометрии достаточно определить средствами логики необходимые предикаты посредством всех аксиом за исключением аксиомы о трех точках $A.11$, а затем принять ее как единственный нелогический постулат. Таким образом, вся геометрия сводится к одному постулату.

3.9. Арифметика

Нельзя обойти вниманием и арифметику, поскольку именно о нее споткнулась программа логицизма.

Возьмем систему аксиом арифметики из учебника Мендельсона [6].

$Ar.1\ x = y \supset (x = z \supset y = z)$
$Ar.2\ x = y \supset y = x$
$Ar.3\ 0 \neq Sx$
$Ar.4\ Sx = Sy \supset x = y$
$Ar.6\ x + 0 = x$
$Ar.7\ x + Sy = S(x + y)$
$Ar.8\ x + 0 = 0$
$Ar.9\ x \times Sy = (x \times y) + x$
$Ar.10\ A(0) \supset (\forall x(A(x) \supset A(Sx)) \supset \forall x A(x))$

Ситуация сходна с аксиомами геометрии. Все аксиомы, за исключением аксиомы $Ar.3$ удовлетворяют критерию теоремы о дефинициальном вложении, они выполнимы в одноэлементной области. Как и в случае со схемой аксиом непрерывности в геометрии, схема аксиом индукции не позволяет ее использовать непосредственно в определении единственного предиката равенства, но обойти это затруднение можно так же, как и в геометрии, путем ссылки на теорему о компактности. В каждом конкретном доказательстве используется лишь конечное множество аксиом индукции, π-образ каждой из которых представляет собой частный случай закона утверждения консеквента. Это означает, что теория арифметики и сводимый к ней анализ могут строиться лишь посредством логических определений и единственного упомянутого выше нелогического постулата $0 \neq Sx$. Если вспомнить, что геометрия сводится к арифметике, то этот единственный постулат приобретает особое значение.

3.10. Классическая механика

С логической точки зрения постулаты физических теорий ничем не отличаются от аксиом теорий математики. Поэтому ничто не мешает применить критерии теоремы о вложении к аксиомам классической механики, которая надстраивается над арифметикой и анализом. Три закона Ньютона и закон тяготения не налагают никаких ограничений на размер предметной области. Они остаются тривиальным образом справедливыми даже в том случае, если она содержит всего одну материальную точку. Отсюда следует вывод, что для построения классической механики достаточно определить все ее понятия средствами чистой логики, которая не несет никакой информации об окружающем нас мире, затем принять единственный нелогический постулат арифметики $0 \neq S(x)$ и в результате получить механику Ньютона. Зная, какое место занимает классическая механика в истории науки, этот вывод представляется довольно неожиданным.

3.11. Заключение

Логицизм в полном объеме невозможен, но частично имеет место. Грань, разделяющая в наших знаниях логическое и нелогическое, требует дальнейшего осмысления. Интересным представляется критерий такого разделения. Нетривиальные теории мы получаем лишь тогда, когда принимаем количественные допущения об окружающем мире. Именно в этом случае мы выходим за границы чистой логики и именно здесь возможно приобретение новых знаний.

Теорема о дефиниціальном вложении позволяет по-новому взглянуть на структуру математики. Естественно разделить ее теории на две большие группы. К первой группе отнести теории, которые не зависят от количественных характеристик предметной области и потому могут быть названы *качественными*, а ко второй – теории, которые зависят от таких характеристик и потому им больше подходит название *количественных.* Вся качественная математика может быть представлена как часть логики, а математика, отличная от логики, – это учение о количестве. Отсюда следует, что нетривиальными теориями, как математическими, так и естественнонаучными, являются лишь те, которые постулируют существование отличных друг от друга объектов. С этой точки зрения было бы интересным произвести ревизию существующих научных теорий и их следствий. Может оказаться, что некоторые из них являются теоремами чистой логики.

Термин *логический априоризм* получает строгий смысл. Математика глубоко проникла во все естественные науки и развивает экспансию в область гуманитарных. Требования к строгости доказательств, если сравнить их с аналогичными стандартами XIX в., значительно ужесточились. Во многом это произошло благодаря развитию современной символической логики. Ни одно доказательство, которое не удовлетворяет критериями логической строгости, не может быть принято математиками. Доходит до того, что в стремлении выявить все неявно принимаемые допущения доказательства воспроизводят с помощью специальных компьютерных программ. Как было показано, единственными ограничениями на определение математических понятий средствами чистой логики являются количественные допущения о размере предметной области. Все остальное – логика, которая *de facto* стала стандартом построения математических рассуждений. Многие математические структуры мы не обнаруживаем в окружающем мире, а проецируем на него то, что уже содержится в используемых нами способах рассуждений. Именно в этом смысле и понимается логический априоризм.

Еще одно следствие полученных результатов затрагивает широко распространенный взгляд на аксиоматический подход к построению теорий. Считается, что язык таких теорий обязательно должен содержать набор неопределяемых терминов, которые получают смысл в рамках теорий. Например, понятия массы и силы в классической механике. Оказывается, что теории можно строить таким образом, что в них не будет неопределяемых терминов. Теории могут создаваться чисто умозрительно, из одной лишь нашей способности к рассуждениям.

Список литературы

[1] *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182–198.

[2] *Вигнер Е.* Симметрия и другие физические проблемы // *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 9–117.

[3] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1982. 556 с.

[4] *Гоббс Т.* О человеке // *Гоббс Т.* Соч.: в 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1989. 258 с.

[5] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983. 488 с.

[6] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.

[7] *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск: Сибир. университет. изд-во, 2007. 264 с.

[8] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. 256 с.

[9] *Шейнфинкель М.И.* О кирпичах математической логики // Логические исследования. Вып. 15. М.: Наука, 2009. С. 232–246.
[10] *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.
[11] *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. М.: Мир, 1987. 128 с.
[12] *Bell J.L.* Toposes and Local Set Theories: An Introduction. Dover Publications, 2008. 274 p.
[13] *Curry H.B., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam, 1958. 417 p.
[14] *Curry H.B., Hindley J.R., Seldin J.P.* Combinatory Logic. Vol. 2. Amsterdam, 1972. 520 p.
[15] *Hatcher W.S.* The Logical Foundations of Mathematics. Oxford, 1982. 320 p.
[16] *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik // Mathematische Annalen. 1924. 92. S. 305–316.
[17] *Shalack V.I.* On the definitional embeddability of some elementary algebraic theories into the first-order predicate calculus // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 2. С. 15–20.
[18] *Shalack V.I.* On the definitional embeddability of the combinatory logic theory into the first order predicate calculus // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 2. 2015. С. 9–14.
[19] *Shalack V.I.* On Some Applied First-Order Theories which Can be Represented by De?nitions // Bulletin of the Section of Logic. 2015. 44(1–2). P. 19–24.
[20] *Shalack V.I.* On First-order Theories Which Can Be Represented by De?nitions // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 125–135.
[21] *Smirnov, V.A.* Logical Relations between Theories // Synthese. 1986. 66(1). P. 71–87.
[22] *Tarski A.* What is Elementary Geometry? // The Axiomatic Method / Henkin L., Suppes P., Tarski A. (eds.). Amsterdam, 1959. P. 16–29.
[23] *Tarski A., Givant S.* Tarski's System of Geometry // The Bulletin of Symbolic Logic. 1999. Vol. 5. No. 2. P. 175–214.
[24] *Whitehead A., Russell B.* Principia Mathematica. 3 vols. N. Y.: Cambridge University Press, 1910–1913.

ОЧЕРК 4.

ЛОГИКА И ТЕОРИЯ ЗНАКОВ

> Философия квантовой механики настолько не имеет отношения к ее реальному использованию, что начинаешь подозревать, что все глубокие вопросы о смысле измерения на самом деле пусты, порождены несовершенством нашего языка, который создавался в мире, практически управляющемся законами классической физики.
>
> *С. Вайнберг. Мечты об окончательной теории*

Вопрос о природе и происхождении логики интересует многих. Это объясняется местом, которое занимает она в системе существующих наук. Почему другие науки должны следовать законам логики? Откуда берется общность ее законов? Не противоречит ли этому плюрализм современных логик? На эти и многие другие вопросы нет готового ответа.

Если говорить о происхождении логики, то начать можно с констатации достаточно очевидного факта, что все в окружающем нас мире взаимосвязано. Связи между явлениями могут быть сколь угодно далеко опосредованными и слабыми, но они есть. Если бы существовали хотя бы два не связанных друг с другом явления, отсюда сразу следовало бы существование двух параллельных никак не связанных миров, в каждом из которых ничто не свидетельствовало бы о существовании другого. Поэтому даже если такие отгороженные от нас миры и существуют, то нам о них ничего не известно.

Взаимосвязь явлений – необходимое условие существования наук, каждая из которых в качестве предмета изучает свой тип связей и фиксирует результаты в понятии закона науки. Физика исследует связи в неживой природе, начиная с уровня элементарных частиц и заканчивая масштабами вселенной. Понятия поля и квантово-механических взаимодействий связывают все со всем. Биологические науки исследуют живую природу, в которой по-другому, но тоже все взаимосвязано. Социальные науки исследуют связи, возникающие на уровне общностей живых существ, в полной мере раскрывающие себя в человеческом обществе.

Ничто не возникает из ничего, и каждое из явлений несет в себе какую-то частичку информации о других более ранних или сопутствующих ему явлениях. Вполне естественно, что живые существа в процессе эволюции научились на уровне элементарных рефлексов использовать эту информацию. Рычание диких зверей сообщало другим животным о близкой опасности. Запахи передавали информацию как об опасности, так и о возможных источниках пищи. Зрительное восприятие позволяло более тонко распознавать окружающие явления и должным образом реагировать на них.

Коль скоро одни явления несут в себе информацию о других явлениях, попробуем абстрагироваться от природы конкретных связей между ними и зафиксируем сам факт такого отношения в понятии *знака*. Ситуации, когда одни объекты или явления служат представителями других объектов или явлений, называются *знаковыми* и изучаются в *теории знаков*, или *семиотике*.

С возникновением человека знаки и знаковые ситуации стали играть более существенную роль в его жизни и развитии его интеллекта.

> *Человеческая цивилизация невозможна без знаков и знаковых систем, человеческий разум неотделим от функционирования знаков – а возможно, и вообще интеллект следует отождествить именно с функционированием знаков* [7, с. 36].

Человеку уже мало было того, что отпечаток лапы на земле сообщал о животном, которое его оставило. Он хотел научиться по содержимому желудка убитого кабана предсказывать исход следующей охоты. Смазывая губы деревянных идолов жертвенной кровью, он обращался к богам в попытке повлиять на будущее.

Первичная естественно возникшая система знаков стала дополняться искусственными знаками, ранними примерами которых являются многочисленные наскальные рисунки первобытных людей. Они помогали в передаче опыта и обучении. Знаки усложнялись, появились правила их комбинации. Стало возможным нарисовать лошадь с крыльями, которую нельзя встретить в природе, но из структуры рисунка было понятно, знаком чего он мог быть. В дальнейшем это привело к возникновению пиктографического письма.

Появился новый вид знаков – слова. Звуковой образ слова уже не был непосредственно связан с означаемым, а выступал в роли знака благодаря соглашению быть заместителем других знаков. Так в язык стали проникать простейшие элементы рекурсии, возможность сведения одних знаков к другим. Дело оставалось за малым – за осознанием того, какой мощный инструмент в виде знаков и правил оперирования ими обрели люди. Следующим шагом и должно было стать возникновение логики.

Для физика падение тел на землю является свидетельством существования притяжения, и он стремится исследовать эту связь. Для биолога появление зеленого ростка из земли является знаком того, что ранее в этом месте на землю упало зерно. Биолог заинтересован в тщательном изучении связи между зерном и превращением его в растение. Для химика цветные полосы на спектрограмме являются набором знаков, говорящих о химическом составе вещества, послужившего источником света. Экономист, изучающий биржевые графики, видит за ними нынешнее состояние экономики и будущие тенденции ее развития. Фундаментальность законов логики заключается в том, что она отвлекается от конкретной природы тех или иных знаковых ситуаций и нацелена на изучение наиболее общих правил оперирования знаками, которые выходят за рамки интересов конкретных наук. Именно по этой причине законы ни одной из других наук не могут нарушать законов логики. Нарушив их, они нарушат и свои законы.

Центральным понятием, которое изучает логика как наука, является рассуждение, логический вывод. Традиционно в рассуждении мы имеем дело с высказываниями, представленными предложениями языка. Предложения являются особым видом знаков. Их основное назначение – представлять не отдельные предметы, а те или иные ситуации. По отношению к предложениям могут быть применены оценки да/нет (Истина/Ложь), т. е. имеют место описываемые ими ситуации или нет. Предложение вместе с истинностной оценкой называется высказыванием. В случае оценки «Истина» предложение представляет реально существующую ситуацию, а в случае оценки «Ложь» – не представляет. Принципиально это мало отличается, с одной стороны, от рисунка лошади, который представляет реально существующих животных, а с другой – от рисунка крылатой лошади, который никаких животных не представляет, но, тем не менее, имеет смысл.

Обоснованием правильных рассуждений является сохранение оценок «Истина» от высказываний-посылок к высказываниям-заключениям. Ограничение предмета исследования анализом высказываний исторически себя оправдало, поскольку плодотворно сказалось на развитии логики и получении многих фундаментальных результатов. В то же время понятие правильного рассуждения допускает обобщение на любые другие виды знаков, если в качестве обоснования принять такие переходы от знаков, выступающих в роли посылок, к знакам-заключениям, при которых возможное значение заключения или его смысл детерминированы возможными значениями или смыслами посылок.

Уже на самых ранних этапах была замечена и узость рамок принятого подхода. Известный пример связан с рассуждениями, в которых фигурируют высказывания о времени, знаменитое: *«Завтра произойдет морское сражение»*. Приписывание ему любой из двух истинностных оценок за день до события равносильно признанию детерминизма. Попытки решить эту проблему привели к возникновению многозначных логик. Сегодня многозначные логики допускают не только множественность истинностных значений высказываний, но и их нечеткость и даже отсутствие каких-либо значений. Уже в наше время появилось много других неклассических логик и семантик для них. В релевантных логиках при изучении следования пытаются учитывать возможный смысл высказываний, а не только их истинностные значения. В интуиционистской логике логические связки языка, т. е. правила, приписывающие смысл и значение комбинациям высказываний, приобрели конструктивную интерпретацию. Средствами квантовой логики решают проблему того, что наше привычное понимание логической связки «и», позволяющее без каких-либо ограничений соединить два предложения в одно, в применении к квантово-механическим явлениям приводит к ложным утверждениям, противоречащим физическим законам. Для обоснования рассуждений о массовых событиях логика вынуждена учитывать вероятностный характер истинностных оценок. Перечисление можно продолжить. В конце концов, это привело к тому, что в обиход вошел термин *плюрализм логик*. Относиться к нему можно по-разному. С одной стороны, люди, для которых логика – это наука о правильном мышлении, узнав, что общепринятых логических критериев не существует, пребывают в растерянности. С другой стороны, плюрализм логик имеет право на существование, поскольку эти логики действительно помогают в решении задач, ради которых они были созданы. Нельзя считать плюрализм благом, но и для разочарования в логике нет оснований. С точки зрения развития науки мы являемся свидетелями естественного процесса накопления проблем, решение которых выходит за границы существующей парадигмы, но предшествует ее смене.

Если сравнивать различные логики, то легко заметить, что они отличаются хотя бы одним из следующих трех признаков. *Первый* признак – это *модельная структура*, в которой интерпретируются выражения языка и которая тем самым в концентрированном виде является носителем наших *онтологических* допущений. *Второй* признак – *язык*, средствами которого мы описываем, как устроен окружающий мир. Он должен быть определенным образом согласован с модельной структурой – содержать все необходимое, чтобы выражать ее существенные свойства. *Третий* признак – способ *интерпретации* выражений языка в модельной структуре. Он заключает в себе наши *эпистемические* допущения о том, каким образом знаковые структуры языка соотносятся со свойствами окружающего мира.

В результате такого сравнения можно прийти к выводу, что многочисленные логики на самом деле являются никакими не логиками, а высокоуровневыми теориями принятых онтологических и эпистемических допущений. Они занимают промежуточное положение между теориями конкретных наук и логикой, которая не может зависеть от конкретных наборов допущений.

4.1. Возвращение к истокам

Наступит ли такое время, когда мы перестанем удивляться короткому периоду в истории человеческой цивилизации, названному *греческим чудом*? В современной науке трудно найти идеи, которые в той или иной форме уже не были высказаны древнегреческими мыслителями. Они как будто торопились успеть сделать это до того, как вслед за расцветом эллинистического мира наступит его упадок. Поражает многообразие концепций, которые были сформулированы и высказаны древнегреческими философами. Зачастую они открыто противоречат друг другу, но ни одна не канула в лету, и уже в новых формах продолжают развиваться сегодня или ждут часа, когда на них опять обратят внимание. Противоположные точки зрения высказывались не по прихоти, а потому, что каждая из них схватывала что-то важное, что в то время нельзя было никак иначе сформулировать и выразить. Так возникли известные учения Гераклита и Парменида, Демокрита и Платона.

Современная наука сталкивается с задачами, решение которых связано с отказом от общепринятых фундаментальных представлений об устройстве окружающего мира. Слова Вайнберга о несовершенстве языка можно рассматривать как призыв к пересмотру имеющихся и поиску новых знаковых средств для адекватного представления знаний. Повседневный язык, пользоваться которым мы научаемся с первых лет жизни, навязывает нам одно вполне определенное представление о мире, в значительной мере почерпнутое из непосредственного опыта. Пытаясь осмыслить новые научные теории, сделать их понятными, мы, будучи привязаны к естественному языку, редуцируем новые понятия к тому, что известно из опыта, полученного в мире окружающих нас вещей. Такая понятийная редукция явлений микромира и мегамира далеко не всегда способствует лучшему пониманию происходящего. В микромире исчезает само понятие предметов, в дополнение к понятию частицы возникает необходимость ввести понятие волновой функции и амплитуды вероятностей. В мегамире на смену глобальным геометрическим представлениям о пространстве и времени приходит понятие локальных пространственно-временных свойств, зависящих от распределения масс во вселенной, и силы притяжения получают объяснение в терминах искривлений пространства.

Живя в мире вещей и воспринимая его с помощью органов чувств, мы становимся жертвами иллюзии, будто познаем мир таким, каков он есть *на самом деле*. Однако единая стройная картина мира, описываемого классической физикой, которая по сути является физикой макромира, рушится при переходе к другим масштабам, недоступным непосредственному восприятию. При всех достоинствах и недостатках естественного языка невозможно отказаться от его использования. Речь может идти лишь об уточнении знаковой природы языка в применении к задачам познания.

Вот уже около двух с половиной тысячелетий длится дискуссия вокруг вопроса о происхождении и природе имен. Об этом много спорили софисты. Один из первых хорошо задокументированных примеров подобного обсуждения мы находим в диалоге Платона «Кратил» [9]. Суть вопроса заключалась в следующем. Случайны или не случайны имена в языке? Связаны ли они со свойствами того, что обозначают, или же принимаются по взаимному соглашению так или иначе называть разные предметы? Платон уделил внимание обеим точкам зрения, не отбросив ни одну из них как не заслуживающую внимания. Современному читателю предмет спора может показаться надуманным. Казалось бы, какая может быть разница, как мы назовем тот или иной предмет или явление? Ведь известно, что в разных языках одни и те же вещи называются по-разному.

4.2. Знаки

Современная логика, с определенными оговорками, базируется на теории знаков Г. Фреге [12]. Трудно найти философа, который ничего не слышал о *треугольнике Фреге*. Кратко суть этой теории можно передать словами самого же автора.

> *Связь, существующая, как правило, между знаком и его значением, такова, что знаку соответствует определенный смысл, а этому последнему – определенное значение, тогда как одному значению (одному предмету) соответствует не единственный знак* [12, с. 231].

Иными словами, между знаком и означаемым, согласно Фреге, существует функциональная связь, реализуемая посредством смысла, который придается знаку интерпретатором. Схематически это можно изобразить в виде цепочки

$$\textit{Знак} \longrightarrow \textit{Смысл} \longrightarrow \textit{Значение}$$

или в виде треугольника

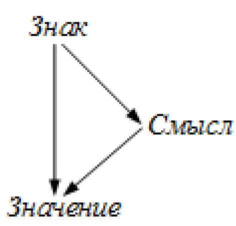

Рис. 4-1

В формальной логической семантике эта схема уточняется следующим образом. Для фиксированных символов языка и фиксированного универсума рассуждения (предметной области) вводится функция интерпретации. Смыслы, сопоставленные знакам, явно не эксплицируются, но их роль берет на себя функция интерпретации, которая каждому дескриптивному символу сопоставляет его значение. Индивидным константам сопоставляются индивиды из универсума рассуждения, предикатным символам – подмножества универсума, функциональным символам – функциональные отношения на универсуме. При таком понимании первичными являются дескриптивные символы языка. Лишь от функции интерпретации зависит, что будет сопоставлено тому или иному символу. Это и есть в чистом виде точка зрения условности имен, которые выполняют свою роль лишь благодаря соглашениям об их употреблении.

Фреге говорит об этом следующим образом:

> *Никому нельзя запретить принять любой предмет или производящий что-либо процесс в качестве знака чего угодно* [12, с. 230].

Такой подход далеко не бесспорен. Одну из проблем, которую он порождает, Платон выразил устами Сократа.

> *Если то из сущих вещей, что мы теперь называем человеком, я стану именовать лошадью, а то, что теперь лошадью, – человеком, значит, для всех человеку будет имя "человек" и только для меня – "лошадь" и, наоборот, для меня "лошадь" будет "человек", а для всех "лошадь"?* [9, 385а].

Приведенная цитата допускает различные истолкования. А.Ф. Лосев в комментариях к диалогу трактует ее в том смысле, что *«полная условность привела бы к полной путанице и нельзя было бы различить, где "человек", а где "лошадь"»* [9, с. 827]. Мы не собираемся излагать свою точку зрения на то, что же на самом деле имел в виду Сократ, поскольку это относится к области догадок, подтвердить или опровергнуть которые без помощи самого Сократа уже невозможно. Мы бы хотели обратить внимание на то, что уже древнегреческие философы допускали иное, отличное от ныне общепринятого, отношение между знаками и означаемым. Наш интерес к этому связан с тем, что понимание и использование имен/знаков как обозначающих предполагает знание об обозначаемом, что плохо согласуется с сегодняшними представлениями о строении физической реальности.

Для кого-то красное яблоко – это просто красное яблоко. Но уже древние греки высказали предположение, что объяснением цветовосприятия может быть поток мелких частиц, которые попадают в наши глаза и вызывают определенные зрительные ощущения. От свойств частиц зависит, какими конкретно будут эти ощущения. Ближе к нашему времени эта гипотеза получила уточнение в виде потока электромагнитных волн, от частоты которых зависит, какую реакцию они вызовут в колбочках и палочках, расположенных на глазном дне, и какие нейро-физиологические импульсы будут переданы в наш мозг, где и возникнет некоторым не до конца понятным образом наше представление о цвете предмета. Самого красного цвета нет, а есть сложное взаимодействие многих явлений. Но это еще полбеды. Если продолжить углубляться дальше, то окажется, что световые электромагнитные волны не совсем волны, а во многих случаях ведут себя как частицы, названные фотонами. Чтобы примирить одно с другим, был введен специальный термин корпускулярно-волновой дуализм. Но и это было только началом дальнейшего уточнения и попыток понимания природы объектов, с которыми мы имеем дело на микроуровне. В первом очерке было показано, что «парадоксальность» результатов квантово-механических экспериментов, за неимением лучшего, иногда подталкивает к принятию противоречивых объяснений.

Можно ли говорить, что имена/знаки являются обозначающими, если существует много физических теорий, каждая из которых по-своему успешно описывает и объясняет один и тот же круг явлений, которые, однако, не совместимы друг с другом? Получается, что на уровне явлений они согласуются, но на глубинном уровне происхождение этих явлений видится поразному [6; 11]. Да, можно возразить, что по мере дальнейших исследований некоторые из теорий окажутся несостоятельными, а другие получат подтверждение. Но это будет лишь локальным временным событием, т. к. поток новых и новых теорий никогда не иссякнет.

Возможно, проблема действительно кроется в несовершенстве нашего языка, категориальная структура которого создает иллюзию, что мы имеем дело с предметами, хотя более правильным было бы сказать, что мы имеем дело с различными проявлениями объектов, которые сами по себе находятся за пределами нашего познания. Одной из целей данного очерка как раз и является поиск аргументов в пользу изменения общепринятых представлений о функционировании знаков. Это неизбежно повлечет за собой изменения в нашем понимании логики и ее законов. А она, пусть и в другой форме, продолжит существование, поскольку является необходимым условием возможности человеческого познания.

Для начала мы хотели бы обратить внимание на знакомое многим понятие вещи в себе по Канту.

> *...мы можем познавать предмет не как вещь, существующую саму по себе, а лишь постольку, поскольку он объект чувственного созерцания, т. е., как явление. Отсюда необходимо следует ограничение всякого лишь возможного спекулятивного познания посредством разума одними только предметами опыта* [5, с. 22].

> *...мы хотели сказать, что всякое наше созерцание есть только представление о явлении, что вещи, которые мы созерца-*

ем, сами по себе не таковы, как они нам являются, и если бы мы устранили наш субъект или же только субъективные свойства наших чувств вообще, то все свойства объектов и все отношения их в пространстве и времени и даже само пространство и время исчезли бы: как явления они могут существовать только в нас, а не сами по себе. Каковы предметы сами по себе и обособленно от этой восприимчивости нашей чувственности, нам совершенно неизвестно [5, с. 61].

Если на рисунке представить отношение между *вещью в себе* и тем, как она нам является, то стрелки должны быть направлены от *вещи в себе* к ее проявлениям.

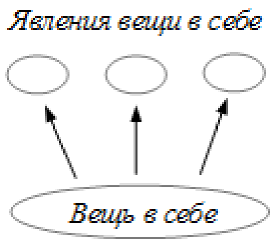

Рис. 4-2

Таким образом, у Канта знак, как чувственный представитель вещи в себе, вторичен по отношению к ней и отличен от нее, но не произволен, поскольку обусловлен априорными формами чувственности. Знак свидетельствует о существовании вещи в себе, но ничего не сообщает о ее природе.

Обратимся к принципам теории именования, как их изучают в общем курсе логики [3, с. 64–73]. Принцип *однозначности* говорит, что каждый знак имеет конкретное предметное значение и требует, чтобы в ходе рассуждения это значение знака не изменялось. Согласно принципу *предметности*, для того, чтобы что-то утверждать о предметах или классах предметов, мы должны использовать их имена. Утверждения относятся не к знакам, а к тому, что они обозначают. Принцип *взаимозаменимости* разрешает заменять одни знаки другими при условии, что их предметные значения одинаковы. Этот принцип приводит к проблемам, известным как парадоксы замены имен. Так, например, описательные имена *«Вечерняя звезда»*, *«Утренняя звезда»* и *«Ближайшая к Земле планета Солнечной системы»* обозначают одно и то же небесное тело – планету Венера. В то же время, если в истинном высказывании *«На закате я наблюдал Вечернюю звезду»* произвести замену имени *«Вечерняя звезда»* на *«Утренняя звезда»*, то мы получим высказывание *«На закате я наблюдал Утреннюю звезду»*, в отношении истинности которого возникают сомнения. Можно привести и другие подобные примеры. Был предложен ряд способов решения данной проблемы, в том числе путем учета не только предметного значения имени, но и его смысла, различения экстенсиональных и интенсиональных контекстов. Мы хотели бы обратить внимание на то, что яркие пятнышки, которые мы периодически наблюдаем на восходе или закате солнца и называем *«Утренней»* и *«Вечерней звездой»*, вторичны по отношению к самой Венере, нисколько не характеризуют ее природу и не идентифицируют как один и тот же объект. С равным успехом мы могли бы по ошибке назвать *«Вечерней звездой»* не Венеру, а яркое пятнышко другого небесного тела, оказавшегося на закате недалеко от линии горизонта. Между пятнышком на небе и тем, знаком чего оно является, отсутствует функциональная связь, которая постулируется теорией знаков Фреге и которая служит обоснованием принципа взаимозаменимости имен. Стрелка, связывающая это пятнышко и его источник, направлена от источника к пятнышку, а не наоборот.

В качестве примеров знаков Фреге в основном рассматривает слова и предложения естественного языка. Произвольность в выборе звуковой или письменной оболочки слов проецируются на любые знаки и формирует иллюзорное убеждение в их произвольности. Но теория Фреге была не единственной. Большой интерес представляет учение Ч. Пирса, которое более глубоко по содержанию, но по историческим причинам не оказало должного влияния на логику. Пирс не ограничился только словами, а более детально проанализировал различные виды знаков и предложил ряд классификаций.

В основе его теории лежит понятие *семиозиса* – ситуации, когда *некий объект или явление (знак) служит для кого-то (для интерпретатора) представителем другого объекта или явления (означаемое)*. Знаки существуют не сами по себе, а мы наделяем их такой ролью. То, каким образом мы усматриваем связь знака с представляемым (означаемым, замещаемым) им объектом или явлением, называют *смыслом знака*. В зависимости от характера отношения знака к означаемому Пирс делит их на три вида: *индексы*, *иконы* и *символы*. Именно эта классификация представляет для нас наибольший интерес.

Прежде чем идти дальше, обратим внимание на необходимость различения терминов *«знак»* и *«знаконоситель»*.

Знаконоситель – это материальная оболочка знака. В треугольнике Фреге – это то, что останется в верхней вершине, если две другие удалить. Знаконоситель становится *знаком*, когда мы рассматриваем его в качестве представителя других объектов или явлений. Для этого мы должны связать с ним определенный смысл.

Например, для обычного человека небольшое облако на горизонте знаком не является, хотя материально существует. Для моряка в некоторых ситуациях такое облако является знаком надвигающегося шторма. Для ребенка закорючка *"i"* на бумаге знаком не является, но для многих она является знаком конкретной буквы латинского алфавита, а для математиков может быть знаком корня из минус единицы. Облако само по себе и закорючка *"i"* – это всего лишь знаконосители.

Различение знаков и знаконосителей кажется тривиальным. На него не один раз указывали сами создатели теории знаков, когда писали, что знак существует только в трехчастной ситуации семиозиса, т. е. в единстве со смыслом и значением. К сожалению, на уровне употребления термин *«знак»* обычно используется в обоих смыслах. Такая путаница может приводить к ошибкам, когда о знаке утверждается то, что справедливо только о знаконосителе, и наоборот.

4.3. Индексы

Знаконосители-индексы связаны с означаемым динамически-ми/причинными связями. Они относятся к единичным объектам и, по словам Пирса, *«направляют наше внимание на свои объекты посредством слепого принуждения»* [8, 2.306]. Эта связь между знаконосителем и означаемым им объектом существует объективно и совершенно независимо от того, осознается ли она каким-либо интерпретатором. Яркое пятнышко *Утренней звезды* на небе как раз и является таким примером. Означаемое знака-индекса всегда существует. По мнению Пирса, ни одно фактическое положение дел не может быть установлено без обращения к знакам-индексам.

> *Индекс физически связан со своим объектом; они образуют органичную пару, но интерпретирующий разум не имеет ничего общего с этой связью, кроме того, что он замечает ее после возникновения* [8, 2.299].

Другие примеры знаков-индексов – дым от огня, запах кофе, тень солнечных часов, цветные и темные полосы на спектрограмме, раскаты грома после удара молнии, звуки кукушки, вмятина следа ноги на песке, показания барометра и др.

Из приведенных примеров видно, что знаконосители порождаются означаемым посредством различных физических связей. Огонь порожает дым, тепло, звуки, специфические запахи и пр. Электрический разряд в облаках порождает вспышку молнии и гром. Понижение или повышение атмосферного давления приводит к изменению высоты ртутного столба или положений стрелок барометра. Смысл знака-индекса заключается в нашем устоявшемся понимании закономерных связей между означаемым и порождаемым им знаконосителем (явлением). В самых простых случаях это может быть замеченная временная последовательность явлений природы. Позже мы формулируем физические законы, которые объясняют достаточно жесткую связь между первым и вторым.

Многие науки занимаются исключительно объяснением связи между природными явлениями и порождаемыми ими знаконосителями. Один из очевидных примеров – уже упоминавшаяся спектрография. Цветные линии разложения света, испускаемого при нагревании веществ, не имеют никаких общих качеств с этими веществами. Они вторичны по отношению к означаемому и проявляются лишь в конкретных экспериментальных условиях. Возникла и получила развитие целая наука, объясняющая эту важнейшую связь, которая позволяет нам определять химический состав даже удаленных космических объектов.

Знаконоситель-индекс появляется не по какому-то соглашению, а производен, вторичен, функционально зависим от означаемого, порожден им, но не тождествен. Это требует от нас вопреки распространенному представлению изменить направление стрелок в треугольнике Фреге.

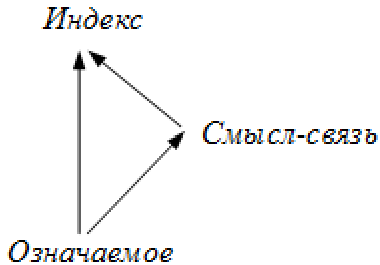

Рис. 4-3

Очень часто случается так, что мы воспринимаем нечто как знак-индекс, но это нечто не представляет подразумеваемого означаемого. Такая ситуация не может иметь места, если мы сами приписываем смысл, который функционально связывает знаконоситель с означаемым. Например, мы можем видеть нечто, напоминающее дым от огня, но на самом деле это всего лишь имитация дыма. Аналогично можно ошибиться в случае ощущения запаха, тепла и т. д. Барометр может сломаться и неправильно предсказывать погоду, запах свежезаваренного кофе может распространяться благодаря ароматизаторам и т. д. Чтобы обойти это затруднение, Пирс вводит понятие подлинннного индекса.

> *Подлинный Индекс и его Объект должны являться существующими индивидами (неважно, вещами или фактами), и такой же должна быть его непосредственная Интерпретанта* [8, 2.283].

Пирс вынужден ввести это понятие, чтобы спасти свое понимание знаков как обозначающих. Мы слышим звук взрыва, а думаем, что это гром после разряда молнии. В этом случае знак-индекс не является подлинным, хотя он существует здесь и сейчас, *направляет наше внимание посредством слепого принуждения, физически связан со своим объектом, образуя органичную пару*. Единственное препятствие, чтобы быть подлинным индексом заключается в его неправильной интерпретации.

Разделение на подлинные и неподлинные индексы не является необходимым, если понимать индекс не как указывающий на нечто, а как порожденный им. Мы знаем, что он чем-то порожден, но не знаем, чем. Мы слышим стук в дверь (знаконоситель) и думаем, что это кто-то постучал, но не знаем, кто именно. Идем открывать и обнаруживаем, что это ветка дерева бьется в нашу дверь. Разные явления могут порождать один и тот же знаконоситель-индекс. Именно поэтому мы и изменили направление стрелки на противоположное.

Если спросить, что такое огонь, то в ответ мы услышим его описание в терминах различных зрительных, обонятельных, тактильных и звуковых ощущений. Все они являются знаконосителями-индексами, объединенными в сложный знаконоситель, для которого обычно используют термин *«восприятие»*.

Чтобы убедить себя в том, что конкретное зрительное ощущение дыма (знаконоситель) является знаком огня, мы стараемся обнаружить другие явления или объекты, которые могут быть знаконосителями-индексами огня – запах, высокая температура и пр. Это говорит о том, что между знаконосителями-индексами существуют горизонтальные связи, позволяющие точнее охарактеризовать означаемое как комплекс ощущений.

Нас интересует более формальное описание связи знаконосителей с означаемым. В первом упрощенном приближении для индексов ее можно изобразить следующим образом:

$$\{o\}\text{---}f\longrightarrow<\{i\},P>$$

Смысл записи следующий: означаемое o порождает нечто, что может быть представлено в виде реляционной структуры $<\{i\},P>$, состоящей из одноэлементного множества $\{i\}$ и одноместного предиката P.

$$\{\textit{Огонь}\} \text{——} f \longrightarrow < \{i\}, \textit{Дым} >$$

Восприятие объединяет несколько знаконосителей-индексов и может быть представлено следующим образом:

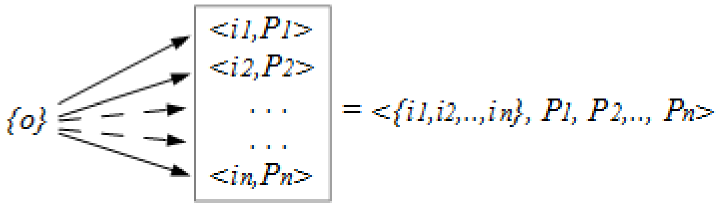

Рис. 4-4

Например,

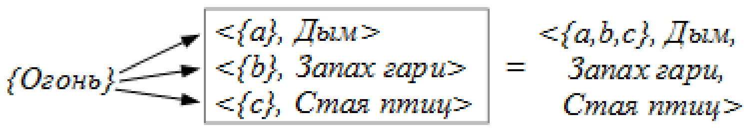

Рис. 4-5

Восприятие можно рассматривать как результат применения одного из правил синтаксиса, позволяющего объединить несколько *данных нам здесь и сейчас знаконосителей-индексов* в один сложный.

В нашем понимании огонь связан лишь с дымом и запахом гари, а стая испуганных птиц является случайной характеристикой. В то же время, даже увидев дым и почувствовав запах гари, мы не можем с полной уверенностью сказать, что они порождены огнем. Может оказаться, что в соседнем парке идут съемки фильма. Дым сотворили пиротехники без всякого огня, а запах гари доносится из открытого окна соседнего дома. Птиц просто потревожили. В этом случае, в терминологии

Пирса, обнаруженные знаки-индексы не будут подлинными, но только в том смысле, что они не указывают на огонь, хотя и были порождены другими существующими здесь и сейчас источниками.

4.4. Иконические знаки

Иконические знаки, в отличие от индексов, акаузальны по своей природе, их знаконосители связаны с означаемым отношением сходства, которое понимается в достаточно широком смысле. Это может быть общее качество с представляемым объектом, структурное сходство и т. д.

> *У Иконы нет динамической связи с представляемым ею объектом; просто так уж случается, что ее качества схожи с качествами самого объекта и возбуждают аналогичные чувствования в уме, для которого она является сходством* [8, 2.299].

Фотографии, рисунки, скульптурные изображения, диаграммы, чертежи, географические карты, электрические схемы, алгебраические формулы, поэтические метафоры являются примерами иконических знаков.

Появление на песке вмятины следа ноги причинно связано с тем, кто его оставил, и в этом смысле является знаконосителем-индексом. Но форма следа, по которой мы распознаем, кто же на самом деле мог его оставить, является иконическим знаконосителем.

Между любыми предметами и явлениями можно обнаружить то или иное сходство. Этого еще недостаточно, чтобы они были иконами. Предмет становится иконическим знаком лишь тогда, когда он употребляется в качестве такового.

Особая ценность иконических знаков заключается в том, что они, по мнению Пирса, *служат единственным средством прямой передачи информации* (идеи, смысла).

Пирс отмечает, что математика в значительной степени построена с использованием иконических знаков и правил их преобразования.

> *...главное отличительное свойство иконы состоит в том, что посредством ее прямого наблюдения могут быть обнаружены и другие истины, касающиеся ее объекта, – истины, совершенно отличные от тех, которые были использованы при ее построении... А поскольку эта способность к обнаружению неожиданной истины и есть то, в чем состоит полезность алгебраической формулы, то иконический характер [в ней] будет преобладающим* [8, с. 203].

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

или

$$A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C)$$

Знаконосители-индексы могут обманывать нас, представляя реальные объекты и явления, но не те, которые мы связываем с ними. В отличие от них объект, представляемый иконическим знаконосителем, может вообще не существовать в действительности, и это не является его недостатком. Здесь выясняется очень важный момент – третий элемент семиозиса, означаемое, в общем случае не является обязательным. Могут существовать предметы или явления, которые мы наделяем ролью знаков, но которые не являются представителями чего-то действительно существующего. Пример такого знака – изображение Пегаса. Мы понимаем, что изображено и знаком чего могло бы являться это изображение, но Пегас – это всего лишь мифологическое животное, которое в реальности не существует. Стоит обратить внимание, что в случае с Пегасом его изображение является сложным знаконосителем, состоящим из иконических знаконосителей коня и крыльев, каждому из которых могут быть сопоставлены реально существующие означаемые, а вот их комбинации ни что реальное не соответствует, хотя древним грекам это не мешало верить в существование Пегаса.

Часто, чтобы оправдать использование таких знаконосителей в качестве обозначающих и встроить в общепринятую схему семиозиса, говорят, что представляемые ими объекты *существуют* в некотором воображаемом мире. Из-за обилия подобных не имеющих означаемого знаконосителей даже возникла необходимость создания иерархии различных видов виртуального существования. Происходит умножение ненужных сущностей, избавиться от которого можно отказом от обязательности третьего элемента семиозиса или его переосмыслением при сохранении самого знаконосителя и приписываемого ему смысла.

Рассмотрим более внимательно, в чем заключается сходство иконического знаконосителя с означаемым. Мы можем говорить о сходстве между двумя людьми и об отношении сходства между конкретным человеком и его фотографией. Это разные виды сходства. В первом случае речь идет о *горизонтальном* отношении между однотипными объектами, а во втором – о *вертикальном* отношении между объектами разных типов. В первом случае речь идет о наличии многочисленных общих свойств, а во втором случае – об отвлечении некоторых свойств от первого объекта и фиксации их во втором объекте. В первом случае отношение сходства симметрично, а во втором случае мы имеем дело с несимметричным отношением.

Возьмем иконический знаконоситель человека в виде его схематического изображения – кружочка головы и пяти палочек для тела, рук и ног. Это изображение своими очертаниями действительно похоже на очертания фигуры человека и потому мы можем использовать его в качестве иконического знака.

В процессе коммуникации может оказаться необходимым уточнить, что этот знаконоситель является представителем именно человека, а не бесхвостой ящерицы. Другими примерами иконических знаконосителей человека могут быть анатомические атласы костной структуры, кровеносной системы, кожных покровов и др. По таким иконическим знакам студенты-медики изучают строение тела человека. При этом каждый из них несет лишь часть информации об означаемом.

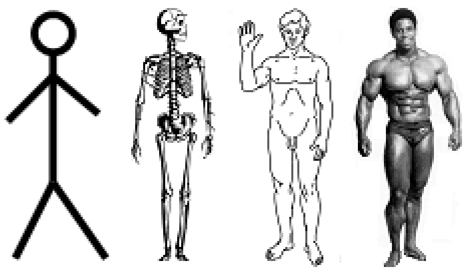

Рис. 4-6

Могут быть случаи, когда иконическим знаком одного человека выступает другой человек. Например, я вижу кого-то, чьи черты и манера поведения вызывают у меня воспоминания о другом знакомом мне человеке. Но и в этом случае воспоминания вызваны не всеми совокупными свойствами, а лишь какими-то чертами в его поведении, манере говорить, прическе или фигуре.

Можно привести много других примеров иконических знаконосителей, но в каждом из них, как и в случае с знаконосителями-индексами, знаконоситель вторичен по отношению к означаемому и несет о нем лишь частичную информацию. Поэтому мы опять приходим к схеме, на которой стрелка направлена от означаемого к знаконосителю.

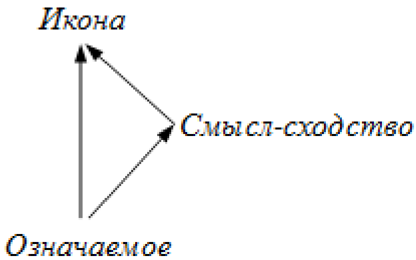

Рис. 4-7

Возможное формальное уточнение этой схемы выглядит следующим образом.

$$\{O, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim g \sim>< D, R^n >$$

Означаемое мы представляем уже не единичным объектом, а множеством объектов O и некоторым набором отношений $Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}$ на этом множестве. Иконический знаконоситель мы также представляем в виде некоторого множества объектов D и некоторого отношения R^n на нем.

Необходимо более подробно остановиться на свойствах функции g, связывающей означаемое с иконическим знаконосителем.

Прежде всего, функция g является частичной. Она может быть неопределена на некоторых объектах $o \in O$ и некоторых отношениях $Q \in \{Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\}$. Это записывают в виде $g : O \cup \{Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim\sim> D \cup \{R^n\}$. Данное свойство может быть проиллюстрировано на примере различных видов географических карт (физических, политических, экономических, демографических, климатических и др.), которые лишь неполно и приблизительно представляют одни элементы и характеристики означаемого и при этом совершенно *забывают* другие.

Следующим свойством функции g является возможное уменьшение размерности отношений. Это означает, что в общем случае, если $g(Q^m) = R^n$, то $n \leq m$. Пример уменьшения размерности отношений – проекция трехмерных фигур на плоскость.

И наконец, свойство, которое роднит g с гомоморфными отображениями. Если функция g определена на объектах $o_1, .., o_n$, кортеж $< o_1, .., o_m >$ принадлежит отношению Q^m, и $g(Q^m) = R^n$, то $< g(o_1), .., g(o_n) > \in R^n$.

Подобные функции на многочисленных примерах рассматриваются в книге Ю. Гастева *«Гомоморфизмы и модели»* [4].

Как и в случае индексов, из простых иконических знаконосителей посредством определенных правил синтаксиса можно конструировать более сложные. Это можно представить следующим образом.

Если даны два иконических знака с одним означаемым:

$$\{O, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim g \sim >< D, R^n >$$

$$\{O, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim f \sim >< E, P^r >$$

Из них мы можем построить новый знак:

$$\{O, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim < g, f > \sim >< D \cup E, R^n, P^r >$$

Например, один иконический знаконоситель – это изображение глаз человека, а второй – овал лица. Мы можем совместить их в одно изображение.

Как уже было сказано выше, иконические знаки могут не иметь означаемого. Хрестоматийным примером является изображение *Пегаса*. Его можно рассматривать как чисто синтаксическую операцию соединения двух простых иконических знаконосителей – крыльев и коня – в один сложный знак. При этом каждый из простых знаков имеет реально существующее означаемое

$$\{O, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}\} \sim g \sim>< D, R^n >$$

$$\{H, S_1^{j1}, .., S_l^{jl}\} \sim f \sim>< E, P^r >$$

а их соединение в один – не имеет, хотя математически мы можем представить так, будто означаемое существует:

$$\{O \cup H, Q_1^{i1}, .., Q_m^{im}, S_1^{j1}, .., S_l^{jl}\} \sim< g, f >\sim>< D \cup E, R^n, P^r >$$

По самому иконическому знаконосителю мы не можем определить, является ли он представителем чего-то реально существующего.

Важной характеристикой иконических знаков является свойство быть обобщением всех прообразов функций, связывающих означаемое со знаконосителем. Изображение человека в виде пяти палочек и кружочка головы является обобщением всех людей и тем самым позволяет ему быть их представителем.

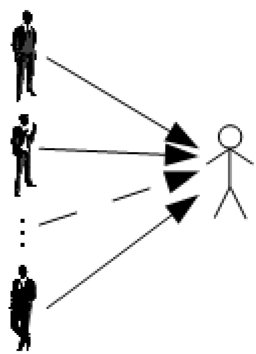

Рис. 4-8

Уравнения алгебраических систем, как иконические знаки, являются обобщением определенных свойств большого класса предметных областей. В логике мы привыкли говорить, что уравнения имеют интерпретации в различных областях, но можно сказать и по-другому, что уравнения абстрагированы от этих областей посредством обобщенных гомоморфизмов.

4.5. Символы

Знаки-символы – это знаки в чистом виде. Они являются знаками лишь потому, что употреблены в таком качестве. Они существуют благодаря условному, произвольно принимаемому соглашению быть представителями других объектов и вводятся в употребление посредством других уже имеющихся в нашем распоряжении знаков. Специальный раздел логики, теория определений, изучает способы и правила введения в язык новых знаков-символов, но не является достаточно общей, чтобы охватывать всех ситуации их появления.

Процедуру введения нового знака-символа можно представить следующим образом. Для некоторого знака G мы вводим в употребление новый знаконоситель-символ S, и после этого он становится знаком-символом и равноправным заместителем G. В случае естественного языка в роли знака-символа может выступать слово. Например, есть иконический знаконоситель в виде пяти палочек и кружочка, используемый в качестве иконического знака человека, для замещения которого мы вводим в употребление слово «человек». После этого данные знаконосители могут использоваться как равноправные. Основой для этого становится принятое нами соглашение.

Рис. 4-9

Стрелки, направленные от иконического изображения человека к слову *«Человек»* и в обратную сторону, указывают на равноправие двух знаков, хотя во временном порядке иконический знак предшествует символу. В то же время в данном примере означаемым знака-символа является не иконическое изображение человека, а те объекты, которые представлены посредством иконического изображения. Поэтому и результирующая стрелка, связывающая означаемое со знаконосителем-символом, должна быть направлена от означаемого к знаконосителю.

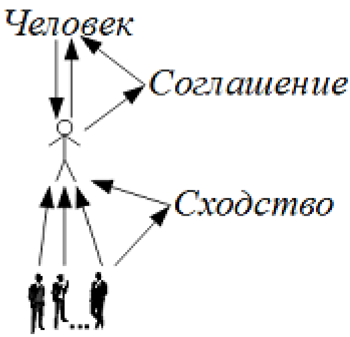

Рис. 4-10

В логике, когда новый знак-символ S вводится для замещения другого знака-символа G, используется запись:

$$S =_{def} G$$

После принятия такого определения, если знаконоситель S входит в некоторый контекст $K[S]$, то он может быть замещен знаконосителем G, и наоборот. То есть принимаются два правила [1]:

$$\frac{K[S],\ S =_{def} G}{K[G]} \qquad\qquad \frac{K[G],\ S =_{def} G}{K[S]}$$

Эти правила широко используются в рассуждениях. В качестве иллюстрации примем следующее определение личного имени *«Аристотель»*.

Аристотель $=_{def}$ *древнегреческий философ, ученик Платона и учитель Александра Македонского.*

После этого, если нам встретится предложение *«Аристотель создал силлогистику»*, мы можем заменить определяемое на определяющее и сделать совершенно осмысленное и естественное заключение *«Древнегреческий философ, ученик Платона и учитель Александра Македонского, создал силлогистику»*.

Относительно свободный выбор последовательности букв или звуков, как знаконосителя для слова, терминологически подменяется и обобщается до свободного выбора любых знаков и трактуется в том смысле, что мы сами решаем, что будет обозначать тот или иной знак. Так и появляется треугольник Фреге. Но знаконоситель – это еще не знак, а всего лишь его материальная оболочка. Если проследить происхождение конкретного знака-символа, последовательно сводя его посредством замен к другим более ранним знакам, то мы будем приходить или к сложным знакам (знаконосителям), которые являются функциональными комбинациями более простых, или к иконическим знаконосителям и знаконосителям-индексам, связь которых с представляемыми ими объектами или явлениями направлена от означаемого к знаконосителю. Общую схему можно изобразить следующим образом:

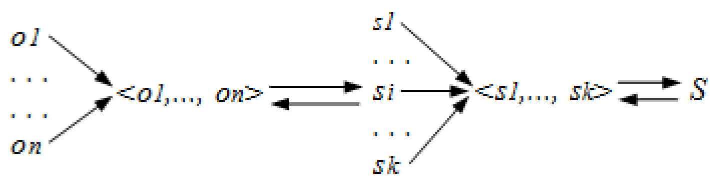

Рис. 4-11

Поэтому, в конечном счете, любой знак функционально зависит от означаемого. Речь может идти лишь о произвольности знаконосителей знаков-символов как равноправных заместителях других знаконосителей.

4.6. Синтаксис

При построении синтаксиса знаковых систем мы имеем дело не со знаками, а лишь со знаконосителями. Знаками они становятся, когда мы связываем с ними интерпретацию. Выше мы уже упоминали синтаксические правила комбинации знаконосителей и теперь остановимся на них немножко более подробно. Подавляющее число знаков, с которыми мы имеем дело, сложные, т. е. являются комбинациями более простых. Комбинирование должно подчиняться определенным правилам, чтобы мы могли понимать смыслы вновь полученных сложных знаков без обязательного разъяснения каждого из них. Предложение, которое я пишу в данный момент, состоит из слов, смысл которых уже известен читателю. Вряд ли он когда-либо ранее встречал именно это предложение, но правила синтаксиса русского языка и знание смысла отдельных слов позволяют без лишних трудностей понять его. Сложными знаками являются комплексы ощущений, которые мы называем восприятиями, геометрические чертежи, составленные из более простых элементов, алгебраические формулы и т. д. Все они производны от знаков, из которых образованы.

При формальном анализе синтаксические правила комбинации знаконосителей можно представлять скобками $< ... >^{n,i}$, где $n \geq 1$ указывает на то, сколько более простых знаконосителей участвуют в комбинации, а i просто служит различению скобок с одинаковыми значениями n, но разным закрепленным за ними синтаксическим смыслом. В такой записи скобки представляют функциональную синтаксическую зависимость между более простыми и более сложными знаконосителями.

$$s_1, \ldots, s_n \xrightarrow{< .. >^{n,i}} < s_1, \ldots, s_n >^{n,i}$$

В естественном языке, как знаковой системе, скобки в явном виде используются не слишком часто, но их аналогами являются различные правила согласования слов, выделения предложений, причастных и деепричастных оборотов и пр.

Для представления сложных знаконосителей, поскольку скобки $< .. >^{n,i}$, как уже было сказано, представляют определенные синтаксические функции, можно использовать другую форму записи – записывать $< s_1, \ldots, s_n >^{n,i}$ в виде $(f^n, s_1, \ldots, s_n)$, где круглые скобки понимаются исключительно синкатегорематически в качестве средства объединения на письме нескольких знаконосителей в один, а новый знаконоситель-символ f^n служит для представления конкретного способа объединения простых знаконосителей, который ранее мы представляли посредством пары скобок $<..>^{n,i}$.

Не всякая последовательность слов, начинающаяся со слова с заглавной буквы и заканчивающаяся точкой, является предложением русского языка. Точно так же не всякая последовательность буквенных символов и символов арифметических действий может рассматриваться как формула арифметики. Обычно символьным выражениям сопоставляются различные синтаксические категории, или типы, которые не могут комбинироваться произвольным образом. Синтаксические категории, в свою очередь, связаны с семантическими категориями, т. е. с типами возможных значений выражений. Но принятие конкретных семантических категорий равносильно принятию определенных онтологических предпосылок, что выходит за рамки логики. Если мы их примем, то в результате придем не к логике, а к некоторой теории онтологических допущений. Все современные логические системы как раз и являются такими теориями. Ничего плохого в этом нет, но теории строятся над логикой, а не вместо нее. Логика должна быть свободна от каких-либо допущений. Поэтому нет оснований налагать какие-либо специальные ограничения на комбинации знаковых выражений. Это тем более оправданно, что развитие знаковых систем зачастую сопровождается нарушением уже существующих правил синтаксиса и семантики. Например, когда-то, с точки зрения арифметики, выражение $\sqrt{-1}$ считалось бессмысленным, но поскольку к нему очень часто приходили в процессе вычислений, в употребление был введен специальный символ "i", который значительно упростил решением многих задач, и в результате появилась даже новая семантическая категория комплексных чисел.

4.7. Формальная теория знаков

О теории знаков написано много работ, среди которых есть и попытки формализовать ее [16; 17]. Мы тоже хотим предпринять такую попытку, представив на абстрактном уровне основные характеристики знаковых систем. Прежде чем перейти к формализации, приведем перечень формальных аксиом теории знаков в нашем понимании.

I. Существуют объекты *A, B, C*..., которые мы называем знаками.

II. Знаки могут комбинироваться, образуя сложные знаки – *(A,B), (A,B,C), (A,(B,C))*,...;

III. По характеру функционирования знаки делятся на три вида: базисные знаки, знаки-формы и знаки-символы;

IV. Базисные знаки $c_1, c_2, \ldots$ служат представителями единичных объектов или явлений и могут пониматься как знаки-индексы;

V. Знаки-формы $x, (x, y), (x, (y, z)), \ldots$ служат представителями совокупностей объектов или явлений, имеющих данную форму, и могут пониматься как иконические знаки:

1. x – $A, B, C, \ldots$;
2. (x, y) – $(A, B), (A, C), (B, A), \ldots$;
3. $(x, (y, z))$ – $(A, (B, C)), (A, (C, A)), (B, (A, C)), \ldots$;
4. . . .

VI. Знаки-символы вводятся в употребление посредством определений вида $(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A$, как сокращение для других знаков. В данном случае совокупность знаков-форм $x_1, \ldots, x_n$ называется *контекстом знака-символа* D.

VII. Знаки-символы вместе с конкретным контекстом могут замещаться знаками, сокращениями которых они являются: $(D, B_1, \ldots, B_n) \Rightarrow A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Для строгого изучения свойств системы аксиом I-VII необходима ее формализация.

Используемые обозначения

1. $x_1, x_2, \ldots \in Var$ – переменные;
2. $c_1, c_2, \ldots \in Const$ – константы;
3. $(\ldots)^n$ – n-местные знакообразующие операторы, $n \geq 2$;
4. $=_{def}$ – оператор определения.

Знаки Sign

1. $x \in Var \Rightarrow x \in Sign$;
2. $c \in Const \Rightarrow c \in Sign$;
3. $A_1, \ldots, A_n \in Sign \Rightarrow (A_1, \ldots, A_n) \in Sign$;
4. Ничто другое знаком не является.

Пусть $FV(A)$ служит обозначением для множества переменных, имеющих вхождение в знак A.

Если $B_1, \ldots, B_n \in Sign$, $A \in Sign$, $n \geq 0$ и $FV(A) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, то посредством $A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$ обозначим результат одновременной подстановки $B_1, \ldots, B_n$ вместо $x_1, \ldots, x_n$:

1. $x_i[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] = B_i$;
2. $c_i[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] = c_i$;
3. $(A, C)[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n] =$
$$(A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n], C[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n])$$

Каждому знаку A можно поставить в соответствие множество знаков (знаковых форм) $SF(A)$, частным подстановочным случаем которых он является:

$$\begin{aligned} SF(A) = \{A' | A' \in Sign,\ FV(A') \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ \exists B_1 \ldots B_n \in Sign(A = A'[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n])\} \end{aligned}$$

Проиллюстрируем $SF(A)$ на двух примерах.

1. $SF(c) = \{c, x_i\}$
2. $SF((c_1, c_2)) = \{(c_1, c_2), (x_i, c_2), (c_1, x_j), (x_i, x_j), x_i\}$

. . .

Определения

Поскольку множество используемых знаков не фиксировано, а может расширяться за счет новых знаков-символов, обозначим посредством Def множество определений, посредством которых они вводятся. Пусть $FV(A)$ служит обозначением для множества переменных, имеющих вхождение в знак A. Каждое определение будет иметь вид $(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A$, где $A \in Sign$, $FV(A) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, $D \in Const$.

Правила дедукции

Пусть $\mathit{\Gamma} \subseteq Var \cup Const$ – конечное множество знаковых переменных и констант. Пару $< Def, \mathit{\Gamma} >$ будем называть контекстом.

$R.1$ $Def, \mathit{\Gamma} \cup \{A\} \vdash A$

$$R.2\ \frac{Def, \mathit{\Gamma} \vdash A_1; \ldots; Def, \mathit{\Gamma} \vdash A_n}{Def, \mathit{\Gamma} \vdash (A_1, \ldots, A_n)}$$

$$R.3\ \frac{Def, \mathit{\Gamma} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \vdash A}{Def \cup \{(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A\}, \mathit{\Gamma} \cup \{D\} \vdash D}$$

где $D \notin \mathit{\Gamma}$, $FV(A) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 0$

$$R.4\ \frac{Def, \mathit{\Gamma} \vdash A}{Def, \mathit{\Gamma} \cup FV(B) \vdash B}, \text{ где } B \in SF(A)$$

Правило $R.1$ говорит, что при дедукции знаков мы можем без каких-либо ограничений пользоваться всеми изначально заданными знаковыми переменными и константами.

Согласно правилу $R.2$, если выводимы знаки $A_1, \ldots, A_n$, то мы можем объединить их в один сложный знак вида $(A_1, \ldots, A_n)$.

Правило $R.3$ – это правило расширения знаковой системы за счет введения новых знаков-символов. Если выводим знак A, переменные которого $FV(A)$ содержится в множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то мы можем взять новую константу D, добавить ее к множеству $\mathit{\Gamma}$ и принять определение $(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A$. Результатом этого будет выводимость символа D, поскольку с этого момента он полностью определен.

Правило $R.4$ – это правило образования новых иконических знаков. Если есть знак A, мы можем абстрагироваться от некоторых его подструктур, заменив их переменными. В результате получаем знак B – обедненный образ знака A. Можно показать, что это правило является производным, но мы его включили в перечень основных в силу концептуальной важности.

Правило редукции (раскрытия определений)

Помимо правил построения знаков $R.1 - R.4$, имеется еще одно правило, которое позволяет совершать их преобразования. Обоснованием этого правила являются ранее принятые определения знаков-символов. Если выводим знак $(D, B_1, \ldots, B_n)$, и ранее нами было принято определение $(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A$, то мы можем раскрыть его и заключить к выводимости знака $A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

$$R.5 \ \frac{Def \cup \{(D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A\}, \mathit{\Gamma} \vdash (D, B_1, \ldots, B_n)}{Def \cup (D, x_1, \ldots, x_n) =_{def} A, \mathit{\Gamma} \vdash A[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]}$$

Правила $R.1 - R.5$ кажутся слишком примитивными, чтобы можно было ограничиться только ими, но оказывается, их достаточно для представления всех эффективно-вычислимых функций [13]. В качестве частичной иллюстрации покажем, как в формальной теории знаков можно вывести основные комбинаторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$, которые в комбинаторной логике задаются аксиомами $\mathbf{K}xy \geq x$ и $\mathbf{S}xyz \geq ((xz)(yz))$.

1. $\varnothing, \{x, y\} \vdash x$	- R.1
2. $\{(\mathbf{K}, x, y) =_{def} x\}, \{\mathbf{K}\} \vdash \mathbf{K}$	- R.3 из 1

1. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash x$	- R.1
2. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash y$	- R.1
3. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash z$	- R.1
4. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash (x, z)$	- R.2 из 1,3
5. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash (y, z)$	- R.2 из 2,3

6. $\varnothing, \{x, y, z\} \vdash ((x, z), (y, z))$ - R.2 из 4,5
7. $\{(\mathbf{S}, x, y, z) =_{def} ((x, z), (y, z))\}, \{\mathbf{S}\} \vdash \mathbf{S}$ - R.3 из 6

В дальнейшем знаки-символы **K** и **S** можно использовать для стандартного представления вычислимых функций, но в формальной теории знаков это можно сделать более просто, не посредством сложных комбинаций **K** и **S**, а путем непосредственного определения нужных знаков.

Протологика

Представленное исчисление напоминает бестиповое λ-исчисление Чёрча [14; 15], но имеет ряд принципиальных отличий. В λ-исчислении центральным является понятие функций, которые строятся с помощью операции λ-абстракции, что требует различения свободных и связанных переменных. В формальной теории знаков понятие функции не является центральным и вместо λ-абстракции может быть использована операция введения новых знаков-символов на основе принятия их определений. В λ-исчислении сложные термы строятся с помощью операции аппликации, приложения функции к аргументу. Результат приложения λ-функции к аргументу уточняется в терминах операции β-конверсии. В формальной теории знаков вместо β-конверсии используется операция раскрытия определений, которая не зависит от понятия функции, но в то же время позволяет моделировать процессы вычисления.

В современной логике изучаются различные виды рассуждений: дедуктивные, индуктивные, вероятностные, по аналогии и др. Довольно часто речь заходит об особых генетических рассуждениях. Чаще всего их иллюстрируют примерами построений при решении геометрических задач. В то же время нам не известны теоретические попытки формализации генетических рассуждений. Если обратиться к формальной теории знаков, то ее правила делятся на две группы. Правила $R.1 - R.4$ являются (генетическими) правилами построения новых знаков, а $R.5$ – аналитическое правило редукции. Таким образом, формальная теория знаков дает частичный ответ на вопрос, что такое генетические методы рассуждений и как они сочетаются с аналитическими?

Добавление типов

Если рассматривать формальную теорию знаков как протологику, то как могут выглядеть теории на ее основе?

Построение теории начинается с фиксации базисных типов изучаемых объектов и правил их комбинирования, дающих производные типы. Например, в качестве базисного типа геометрии мы можем взять точки. Производными типами будут типы прямых линий, окружностей, многоугольников, треугольников и др. В другом случае базисными типами могут быть зрительные, звуковые, вкусовые, и обонятельные ощущения, комбинации которых приводят к различным типам восприятий. Сопоставление знаконосителю его типа можно сравнить с приписыванием ему смысла без явного указания на представляемый им объект, превращением из знаконосителя в знак.

Используемые обозначения для типов

1. B_T – множество базовых типов;
2. $(\dots)^n$ – n-местные типообразующие операторы, $n \geq 1$;
3. $\rightarrow$ – типообразующий оператор.

В качестве синтаксических переменных, пробегающих по всем возможным типам, будем использовать начальные буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$

Типы *Type*

1. $\alpha \in B_T \Rightarrow \alpha \in Type$
2. $\alpha_1, .., \alpha_n \in Type \Rightarrow (\alpha_1, .., \alpha_n) \in Type$
3. $\alpha_1, .., \alpha_n, \beta \in Type \Rightarrow (\alpha_1, .., \alpha_n \to \beta) \in Type$, где $n \geq 0$.

Не все комбинации типов допустимы или осмысленны. Правила, позволяющие различать допустимые и недопустимые комбинации типов, будут иметь вид $< \alpha_1, .., \alpha_n >: \beta$.

Например, в геометрии две точки являются допустимой комбинацией типов, которая представлена правилом *<точка, точка>:(точка, точка).* В то же время две точки могут служить представителем проходящей через них прямой линии, для чего принимается правило *<точка, точка>:прямая.* Одновременно они могут представлять и окружность с радиусом, равным расстоянию между этими точками и центром в первой из них, что отражено в правиле *<точка, точка>:окружность.*

Если говорить об ощущениях, то правило *<зрительное, вкусовое>:(зрительное, вкусовое)* позволяет комбинировать зрительные и вкусовые ощущения в единые восприятия. Но не все комбинации типов допустимы. Например, операцию арифметического сложения нельзя применить к двум типам данных *мальчик + яблоко = ?*, а операцию умножения нельзя применить к *мальчик × мальчик=?*, хотя можно применить к *метр × метр = метр*^{2}. Набор правил для допустимых комбинаций типов обозначим посредством TR ($Type\ Rules$).

Правила дедукции с типами

Теперь правила дедукции служат не только для того, чтобы построить некоторый знаконоситель, но и определить его возможный тип как знака. Пусть $\Gamma \subseteq Var \cup Const$ – конечное множество знаковых переменных и констант, каждой из которых сопоставлен ее тип в виде $x : \alpha$ или $c : \alpha$. Контекстом теперь будем называть тройку $< TR, Def, \Gamma >$, где TR – набор правил комбинации типов. При формулировке правил будем использовать сокращения:

- $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$;
- $\mathbf{x} : \beta = x_1 : \beta_1, \ldots, x_n : \beta_n$;
- $\mathbf{B} = B_1, \ldots, B_n$, где $B_i \in Sign$;
- $\mathbf{B}/\mathbf{x} = B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n$.

$RT.1$ $TR, Def, \Gamma \cup \{A : \alpha\} \vdash A : \alpha$

$$RT.2\ \frac{TR, Def, \Gamma \vdash A1 : \alpha_1; \ldots; TR, Def, \Gamma \vdash An : \alpha_n}{TR, Def, \Gamma \vdash (A_1, \ldots, A_n) : \beta}$$

где $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >: \beta \in TR$.

$$RT.3\ \frac{TR, Def, \Gamma \cup \{x_1 : \beta_1, .., x_n : \beta_n\} \vdash A : \alpha}{TR', Def \cup \{(D, \mathbf{x}) =_{def} A\}, \Gamma' \vdash D : (\beta_1, .., \beta_n \to \alpha)}$$

где

- $D \notin \Gamma$;
- $FV(A) \subseteq \{x_1, .., x_n\}$;
- $TR' = TR \cup \{< (\beta_1, .., \beta_n \to \alpha), \beta_1, .., \beta_n >: \alpha\}$;
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{D : (\beta_1, .., \beta_n \to \alpha)\}$.

Смысл правила $RT.1$ очевиден. Правило $RT.2$ может применяться лишь в том случае, если соответствующая комбинация типов разрешена, т. е. в множестве TR содержится правило типов $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >: \beta$. Правило добавления новых знаков символов $RT.3$ требует, чтобы определяемый символ D был новым. После принятия определения он добавляется к множеству $\mathit{\Gamma}$ с указанием типа $D : (\beta_1, .., \beta_n \to \alpha)$, а для того, чтобы в дальнейшем им можно было пользоваться, к множеству правил TR добавляется правило $< (\beta_1, .., \beta_n \to \alpha), \beta_1, .., \beta_n >: \alpha$.

Правило редукции (раскрытия определений)

$$RT.4\ \frac{TR, Def \cup \{(D, \mathbf{x}\} =_{def} A\}, \mathit{\Gamma} \vdash (D, \mathbf{B}) : \alpha}{TR, Def \cup \{(D, \mathbf{x}\} =_{def} A\}, \mathit{\Gamma} \vdash A[\mathbf{B}/\mathbf{x}] : \alpha}$$

Смысл данного правила очевиден. В теории знаков с типами также имеет место производное правило образования новых иконических знаков, аналогичное правилу $R.3$ из бестиповой теории. Мы его не приводим в силу громоздкости формулировки. Интересующиеся могут сравнить формальную теория знаков с типами с типизированным λ-исчислением, которое в [14][15] обозначено посредством $\lambda^{\to}$.

Прототеории

Естественнонаучные теории, изучающие связи между явлениями, могут задаваться путем постулирования дополнительных правил редукции знаков вида:

$$\frac{TR, Def, \mathit{\Gamma} \vdash A_1 : \alpha_1; \ldots ; TR, Def, \mathit{\Gamma} \vdash A_n : \alpha_n}{TR, Def, \mathit{\Gamma} \vdash B : \beta}$$

4.8. Заключение

1. Предпосылки для возникновения науки логики обнаруживаются на самом низком уровне знаковых систем. Ими являются взаимосвязи явлений окружающего мира, когда одни объекты и явления естественным образом являются носителями частичной информации о других объектах и явлениях. Логика возникает, когда мы отвлекаемся от конкретного содержания этой информации и делаем объектом исследования сам факт ее переноса.

2. Знаконосители-индексы и иконические знаконосители являются всего лишь образами обобщенных гомоморфизмов. Прообразы гомоморфизмов нам недоступны. В терминах Канта, прообразы – это вещи в себе. Дискуссии о том, как на самом деле устроен мир, вызывают в памяти известную притчу о слепых мудрецах и слоне [10]. Ощупывая его ноги, хобот, хвост, бивни, бока и уши, мудрецы приходили к разным выводам о том, что перед ними. Первый решил, что это дерево, второй, что это змея, третий – веревка, четвертый – копьё, пятый – стена, шестой – веер. Каждый мудрец посредством осязания, элементарного знака-индекса, получил лишь частичку информацию о слоне и отсюда поспешил сделать вывод о его настоящей природе. В притче есть такие слова:

Вот так вот мудрецы с присущим им упрямым нравом
Договориться не могли и развязали спор-расправу.
Но скрытый смысл в том, что даже если бы сотрудничать они смогли,
То объединить бы воедино уж точно не смогли:
Копье, веревку, веер и змею, отвесную стену и дерево, цветущее весною.
Такой вот он, загадочный наш слон.

Подобную ошибку совершают те, кто убежден, что знаки позволяют судить о природе того, что они «обозначают».

3. О возможности построения неевклидовых геометрий знал уже Гаусс, но опасался сообщать о них, т. к. это противоречило общепринятым в то время взглядам. Лишь после работ Лобачевского новые геометрии стали проникать в науку и оказались эффективным математическим аппаратом при описании многих физических явлений. В настоящее время построено много неевклидовых геометрий. Если они, как знаковые системы, являются обозначающими, то вопрос о том, какая из них правильная, имеет смысл, но сегодня вряд ли кто будет дискутировать на эту тему.

4. Известные системы логики есть результат принятия конкретных онтологических и эпистемических допущений об устройстве окружающего мира и отношении к нему языка. В этом смысле они являются теориями, занимающими промежуточное положение между теориями конкретных наук и логикой.

5. Можно предположить, что хотя бы часть проблем, с которыми сталкивается современное естествознание и о которых упоминает Вайнберг, может быть решена путем отказа от ряда предпосылок, по умолчанию принимаемых в современной логике. Выходом в создавшейся ситуации может стать переход к использованию логики, основанной на теории знаков. Вместе с таким переходом изменяются и правила оперирования знаками. Происходит отказ от непосредственной интерпретации знаков как обозначающих. Это вовсе не означает, что логика становится просто игрой. Различные знаконосители появляются в опыте не по нашей прихоти, а детерминированы существованием реальных объектов и связей между ними.

6. Формальная теория знаков может рассматриваться как логика оперирования знаками, свободная от онтологических и эпистемических предпосылок. При минимуме средств она обладает богатыми выразительными возможностями, позволяющими представить любые конструктивные операции. Переход к формальной теории знаков с типами сопровождается принятием онтологических предпосылок в виде типов и эпистемических предпосылок в виде ограничений на допустимые комбинации типов. Тем самым знакам неявным образом приписываются смыслы без указания на представляемые ими объекты или явления.

7. Последнее, на что хотелось бы обратить внимание, – это корреспондентское понятие истинности. Оно отсутствует в формальной теории знаков, поскольку знаки перестают быть обозначающими. Вместо него может быть введено когерентное понятие истинности. В математике, где мы всегда остаемся в рамках тех или иных знаковых систем, это не должно создать дополнительных проблем. Проблемы ожидают лишь представителей естественных наук, которые по роду своих занятий убеждены, что изучают окружающий мир таким, каким он есть «на самом деле», и потому заинтересованы в «истинности» предложений своих теорий. Физические теории уже давно перегружены идеальными объектами, которые не могут быть ни с чем соотнесены, но помогают делать эмпирически проверяемые предсказания, как это имеет место в случае с квантовой механикой. Попытки мыслить идеальные объекты как реально существующие, относительно которых можно делать истинные и ложные утверждения, приводят к недоразумениям.

Список литературы

[1] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики: Учеб. М.: Космополис, 1994. 272 с.

[2] *Вайнберг С.* Мечты об окончательной теории. Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 256 с.

[3] *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс): Учеб. пособие для студентов филос. фак. и преподавателей логики. Кн. I. М.: Наука, 1994. 312 с.

[4] *Гастев Ю.А.* Гомоморфизмы и модели: Логико-алгебраические аспекты моделирования. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 208 с.

[5] *Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. 592 с.

[6] *Карпенко А.С.* В поисках реальности: исчезновение // Философия науки. Т. 20. М., 2015. С. 36–72.

[7] *Моррис Ч.У.* Основания теории знаков // Семиотика. Т. 1. Благовещенск: БГК им. И.А. Бодуэна де Куртенэ, 1998. С. 36–88.
[8] *Пирс Ч.С.* Избр. филос. произведения. М.: Логос, 2000. 448 с.
[9] *Платон.* Собр. соч.: в 4 т. Т. I. М.: Мысль, 1990. 860 с.
[10] Притча о слепых мудрецах и слоне. URL: http://vedic-culture.in.ua/ru/culture/creation/764-the-parable-about-blind-sages-and-the-elephant-vaishnava-vedic-version-in-verse (дата обращения: 17.12.2016).
[11] Проблема реальности в современном естествознании. М.: Канон+ РООИ «Реабилитация», 2015. 384 с.
[12] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сб. тр. М.: Аспект Пресс, 2000. 512 с.
[13] *Шалак В.И.* Протологика: новый взгляд на природу логического: Дис... д-ра филос. наук. М., 2010. 274 с.
[14] *Barendregt H.* Lambda Calculi with Types // Handbook of Logic in Computer Science. Vol. II. Oxford University Press, 1992. P. 117–309.
[15] *Nederpelt L., Geuvers H.* Type Theory and Formal Proof. Cambridge University Press, 2014. 436 p.
[16] Studia Semiotyczne – English Supplement. URL: http://studiaes.pts.edu.pl/ (дата обращения: 17.12.2016).
[17] *Tokarz M.* Towards a Formal Semiotics // Bulletin of the Section of Logic. 1984. Vol. 13. No. 2. P. 44–49.

Essays on the foundations of logic

Shalack Vladimir

Doctor of Philosophy, head of the department of logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Science; e-mail: shalack@mail.ru

Logic is an instrument of intellectual cognition. It forms the basis of all sciences. In the first essay, we analyze Zeno's aporia "Arrow" and show the errors to which ignorance of logic leads. The conventional wisdom is that paradoxes of Zeno fixed inadequacy of our concepts of space, time and movement to describe the phenomena of the world. Physicists use Zeno's "Arrow" paradox for interpreting the results of quantum mechanical experiments. It is shown, that to solve the aporia it suffices to use elementary means of Aristotelian logic.

It is believed that the transition from traditional logic to modern logic is a transition from the logic of properties to the logic of relations. An implicit assumption is that we should describe the world around us in terms of relationships. In the second essay, we analyze the ontological status of relations and functions and show that with equal success the world can be described in terms of functional dependencies between phenomena and measurements.

The goal of the program of logicism was the reduction of mathematics to logic. This program has failed because it contained internal contradictions. Nevertheless, this does not mean that no fragments of mathematics cannot be represented by definitions in terms of pure logic. The necessary and sufficient condition for reducing some theory to logic is the existence of a degenerate one-element model of the theory. For philosophers, interesting examples are the theory of symmetrical relations, group theory, topos theory, combinatory logic. In the theories of the arithmetic and the geometry, the full reduction to logic is prevented by the

existential axiom that asserts the existence of more than one object in the subject area. All other axioms are reducible to logic. The laws of classical Newtonian mechanics do not contain existential presuppositions and therefore are reducible to logic.

The prerequisites for the emergence of a science of logic are found at the lowest level of sign systems. They are the interconnections of the phenomena of the surrounding world, when certain objects and phenomena are natural carriers of partial information about other objects and phenomena. Logic arises when we ignore the specific content of the information and make the object of study the fact of its transfer. Known systems of logic are the result of acceptance of specific ontological and epistemic assumptions about the structure of the surrounding world and the attitude of language to it. In this sense they are theories occupying an intermediate position between the theories of concrete sciences and real logic. In this situation it is necessary to make a transition to the use of logic based on the theory of signs. The formal theory of signs can be regarded as the logic of operating with signs, free from ontological and epistemic assumptions.

Keywords: aporia, Zeno, syllogistics, epistemic assumptions, ontological assumptions, functions, relations, logicism, theory of definitions, foundations of logic, foundations of mathematics, theory of signs, index signs, iconic signs, symbol signs, protologic

Научное издание

Шалак Владимир Иванович

Очерки по основаниям логики

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректор *А.А. Гусева*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 05.07.17.
Формат 64x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 4,5 Тираж 500 экз. Заказ № 14.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерная верстка: *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/books/arhive.htm