Российская академия наук
Институт философии

А.С. Карпенко, Н.Е. Томова

ТРЕХЗНАЧНАЯ ЛОГИКА БОЧВАРА И ЛИТЕРАЛЬНЫЕ ПАРАЛОГИКИ

Москва
2016

УДК 164.03+510.644
ББК 87.4
К 26

В авторской редакции

Авторы:
А.С. Карпенко — Введение, глава 1, 2
Н.Е. Томова — Глава 3

Рецензенты

доктор филос. наук *К.И. Бахтияров*
доктор филос. наук *Д.В. Зайцев*

К 26 **Карпенко, А.С.** Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; А.С. Карпенко, Н.Е. Томова. — М. : ИФ РАН, 2016. — 110 с. ; 20 см. — Библиогр.: с. 92–102. — Имен. указ.: с. 103–104. — Предм. указ.: с. 105–108. — 500 экз. — ISBN 978-5-9540-0314-7.

Книга «Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики» состоит из трех глав и посвящена изучению литеральных паралогик. Исходным пунктом предложенного исследования является трехзначная логика бессмысленности Бочвара $\mathbf{B}_3$, содержащая два изоморфа классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$, комбинация которых приводит к построению двух знаменитых паралогик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. Доказано, что эти паралогики функционально *эквивалентны* и каждая функционально эквивалентна фрагменту логики $\mathbf{B}_3$, состоящему только из внешних формул. Построена четырехэлементная решетка трехзначных паралогик относительно обладания теми или иными *парасвойствами*. В заключительной главе приведена полурешетка четырехзначных литеральных паралогик относительно функционального вложения одних логик в другие.

ISBN 978-5-9540-0314-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ВВЕДЕНИЕ

Трехзначные логики вот уже целое столетие продолжают вызывать к себе повышенный интерес, и по сей день появляются новые логики этого класса порой с удивительными свойствами. Оказалось, что введение в логику третьего истинностного значения позволяет моделировать, как саму классическую логику, так и многие свойства, казалось бы с ней не связанные, например такие, как паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность, максимальность и т. д. Различные интерпретации третьего истинностного значения позволяют выделять различные классы логик, среди которых особую роль играет класс nonsense logic, т. е. таких логик, в которых третье истинностное значение интерпретируется как «бессмысленность». Наиболее интересной логикой здесь является трехзначная логика бессмысленности Бочвара $\mathbf{B}_3$ [*Бочвар,* 1938], которая по своим функциональным свойствам является довольно-таки «слабой», но тем не менее объединяет в себе совершено различные по природе логические связки, что позволяет ей занимать особое место в огромном разнообразии трехзначных логик.

Это разнообразие (имеется 27 унарных связок и 19683 двухместных связок) ставит свои проблемы, когда оказывается, что две логики, представленные разными аксиоматиками с совершенно различными свойствами и на протяжении многих лет изучаемые как принципиально отличные друг от друга, на самом деле являются функционально эквивалентными, т. е. по существу представляют одну и ту же логику с функциональной точки зрения. Так, например, произошло с паранепротиворечивой логикой $\mathbf{P}^1$ [*Sette,* 1973] и с параполной логикой $\mathbf{I}^1$ [*Sette, Carnielli,* 1995]. Этого можно избежать, если попытаться как-то систематизировать или даже классифицировать различные множества трехзначных связок. Но для этого должен быть найден некий фундаментальный принцип, положенный в основание универсума под названием «трехзначные логики».

Первой работой, где рассматриваются различные семейства трехзначных связок, выполняющие те или иные свойства, является статья [*Dienes,* 1949]. Например, дизъюнкция и конъюнкция являются ассоциативными и выполняются законы дистрибутивности. Для связки импликации выполняются также различные импликативные законы, и т. д. Вопросы взаимоотношения, функциональной эквивалентности и аксиоматизации трехзначных систем здесь не рассматриваются. В статье [*Maduch,* 1978] выделяется класс чисто импликативных логик, состоящий из 18 различных систем, для них доказывается теорема дедукции и приводится их аксиоматизация. Здесь выполняется закон тождества $p \to p$ и выделенным значением является только 1.

В книге Л. Годдарда и Р. Раутли [*Goddard, Routley,* 1973] вводится термин «логика значения» и перечисляется большое количество различных трехзначных (а также четырехзначных) логик. Основная идея состоит в том, что семантические значения высказываний в естественных языках зависят от контекста и поэтому некоторые многозначные логики могут служить в качестве полезной аппроксимации логической структуры естественного языка. Однако эта работа не содержит какого-либо формального определения «логика значения».

В [*Финн, Аншаков и др.,* 1980] и [*Finn, Grigolia,* 1993] дается формальное определение понятия «логика значения» и его частного случая «логика бессмысленностного типа» на основе использования методов алгебраической семантики и введения понятия «*тип истинностного значения*». В указанных работах приводится классификация трехзначных логик значения и логик бессмысленностного типа. В свою очередь логики бессмысленностного типа делятся на два основных подкласса: логики сильно бессмысленностного типа и логики слабо бессмысленностного типа.

Интересна статья А. Аврона [*Avron,* 1991], в которой выделяется класс так называемых «естественных» трехзначных логик, представляющих собой четыре расширения сильной регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3$ [*Клини,* 1957]. Два из этих расширений функционально эквивалентны трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$ [*Łukasiewicz,* 1920], а остальные два — функционально эквивалентны трехзначной паранепротиворечивой логике **PCont** (см. [*Розоноэр,* 1993]). Однако заметим, что в эту классификацию не попадает трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$ [*Бочвар,* 1938], которая в нашем исследовании является центральной.

В [*Ciucci, Dubois,* 2012] авторы рассматривают различные логические связки, точнее — соответствующие им функции, заданные на трехэлементном множестве, и исследуют их взаимоотношения. Здесь выделяется класс из 14 различных конъюнкций и импликаций и 3 отрицаний, удовлетворяющих, с точки зрения авторов, минимально интуитивно значимыми свойствами. В последующей работе [*Ciucci, Dubois,* 2013] авторы пробуют нарисовать карту взаимоотношений между конъюнкциями, отрицаниями и импликациями, являющимися расширением соответствующих булевых связок. Авторы демонстрируют, что (почти) все наиболее известные связки могут быть определены посредством лишь некоторых из них, а именно, посредством связок логики Лукасевича. И таким образом, заключают они, все известные трехзначные логики могут быть рассмотрены как фрагменты более общей структуры, например, трехзначной *MV*-алгебры [*Ciucci, Dubois,* 2013, p. 173]. Эти результаты могут быть полезными для решения конкретной задачи при выборе соответствующего фрагмента, где базовые связки позволят выразить все необходимое содержание с учетом соответствующей интерпретации третьего истинностного значения.

Каждая из указанных работ, представляет специфический интерес, однако ни одна из них не исключает появление *различных базисов связок* для одной и той же логики, но которые продолжительное время могут изучаться по отдельности, вызывая порой удивление в своей схожести, и тем не менее оставаясь разными для просвещенного научного сообщества.

Ниже мы рассмотрим совершенно иной подход к изучению трехзначных логик, предложенный Н.Е. Томовой в 2010 году [*Томова,* 2010]. Он состоит в разбиении интересуемого множества трехзначных связок на классы эквивалентностей, что позволит эти классы решеточно упорядочить относительно функционального вложения одних логик в другие. Таким образом, все возможные базисы для некоторой логики будут перечислены в соответствующем классе эквивалентности, и тогда никаких неясностей для определения места конкретной логики в полученной решетке не останется. Как раз наиболее интересным для нас окажется класс трехзначных бочваровых логик, поставивший необходимый инструментарий для детального изучения литеральных паралогик.

В настоящем исследовании будет предложен необычный подход к изучению литеральных паралогик, т. е. таких паралогик, которые обладают парасвойствами на уровне пропозициональных переменных. Так, исходным пунктом является трехзначная логика бессмысленности Бочвара $\mathbf{B}_3$, которая, как оказалось, содержит два изоморфа классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$, комбинация которых приводит к построению двух знаменитых паралогик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, первая из которых паранепротиворечива, а вторая параполна. Далее доказано, что эти паралогики на самом деле функционально *эквивалентны*. Более того, каждая из этих логик функционально эквивалентна фрагменту логики $\mathbf{B}_3$, состоящему только из внешних формул. В итоге будет построена четырехэлементная решетка трехзначных паралогик относительно обладания теми или иными *парасвойствами*. В заключительной главе мы еще раз сформулируем существующие алгоритмы конструирования литеральных паралогик, а также приведем их обобщения на четырехзначный случай. Будет представлена полурешетка четырехзначных литеральных паралогик, полученных посредством комбинации изоморфов классической логики.

Данная книга представляет собой расширенную версию статьи, опубликованной в электронной версии журнала *Logic and Logical Philosophy* 21 октября 2016 г.

Предварительно дадим определения базовых понятий, используемых в исследовании. Остальные определения будут даны непосредственно по тексту изложения для удобства восприятия материала.

Базовые определения

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Будем считать, что $a(F_i) \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots n\}$. Множество For определяется индуктивно:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) Для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \ldots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком*

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \ldots, f_m \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i.

Определение 2. Упорядоченная пара $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$ и $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V, называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой* v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \ldots, f_m \rangle$, что

1. если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;
2. если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы, и F^n — n-местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n — функция на V, соответствующая F^n.

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\models_{\mathfrak{M}} A$), е.т. е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} B$), е.т. е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Пусть мы имеем две конечнозначные логики: $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. F_1 и F_2 — множества функций, соответствующие исходным связкам логик $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$.

Определение 6. Пусть F_1 — множество функций, соответствующее исходным связкам логики $\mathbf{L}_1$. Замыканием $[F_1]$ будем называть множество функций, которое содержит все суперпозиции функций, принадлежащих F_1.

Операция суперпозиции состоит из элементарных операция над элементами множества F_1, например, переименование и отождествление переменных и подстановка одной функции в другую.

Определение 7. Логика $\mathbf{L}_1$ *функционально вложима* в логику $\mathbf{L}_2$ если и, только если любая функция из F_1 может быть определена посредством функций F_2.

Определение 8. Логика $\mathbf{L}_1$ *функционально эквивалентна* логике $\mathbf{L}_2$ если и, только если

(1) логика $\mathbf{L}_1$ *функционально вложима* в логику $\mathbf{L}_2$ и

(2) логика $\mathbf{L}_2$ *функционально вложима* в логику $\mathbf{L}_1$.

Существенной частью данного исследования является изучение проблематики паралогик с точки зрения их функциональных свойств. В этом случае под логикой будем понимать функциональную систему — некоторое множество функций замкнутое относительно операции суперпозиции.

Глава 1.

ТРЕХЗНАЧНАЯ ЛОГИКА БОЧВАРА $\mathbf{B}_3$

В данной главе подробно будет рассмотрена трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$, описаны ее свойства, в том числе представлены изоморфы классической логики, содержащиеся в $\mathbf{B}_3$. В контексте нашего исследования эта логика играет исключительную роль. Как будет далее показано, класс литеральных паралогик может быть получен посредством метода комбинирования изоморфов классической логики.

В 1938 г. Д.А. Бочваром была построена первая в мире логика бессмысленности $\mathbf{B}_3$ (см. [*Бочвар,* 1938][1]) в связи с проблемой разрешения логических антиномий, в первую очередь парадокса Рассела. В данной системе третье истинностное значение $1/2$ предлагается интерпретировать не столько как промежуточное между истиной 1 и ложью 0, сколько как парадоксальное значение или даже как «бессмысленность».

Переменные p, q, r с индексами или без пробегают по высказываниям; переменные x, y, z с индексами или без пробегают по истинностным значениям. Мы будем использовать одинаковые символы для обозначения логических связок и соот-

[1]Заметим, что в рецензии А. Чёрча на данную статью в журнале *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 4, No. 2, pp. 98–99 (June 1939), автором была допущена неточность в изложении аксиоматизации системы Бочвара, что привело к неверному утверждению о возможности получения в системе парадокса Рассела. Эта неточности и неправильность сделанного вывода были замечены самим А. Чёрчем и исправлены в том же журнале, vol. 5, No. 3, p. 119 (1940).

ветствующим им операциям в матрице. Логика $\mathbf{B}_3$ задается матрицей

$$\mathfrak{M}_3^B = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim, \cap, \vdash, \{1\}\rangle^2$$

где $\{1\}$ — множество выделенных значений, $\sim$ (внутреннее отрицание), $\cap$ (внутренняя конъюнкция) и $\vdash$ (внешнее утверждение) определяются таблицами[3]:

x	$\sim x$
1	0
1/2	1/2
0	1

x	$\vdash x$
1	1
1/2	0
0	0

$\cap$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

Через $p \cap q$ и $\sim p$ обычным образом определяются другие внутренние связки:

$$p \cup q := \sim (\sim p \cap \sim q)$$

$$p \supset q := \sim p \cup q$$

$$p \equiv q := (p \supset q) \cap (q \supset p)$$

где символ $:=$ означает «равно по определению».

Обратим внимание на яркую особенность внутренних связок, которая заключается в том, что приписывание хотя бы одному из аргументов значения 1/2 оказывается достаточным для того, чтобы вся формула имела значение 1/2. Такое свойство внутренних связок является следствием интерпретации 1/2 как «бессмысленность», т. е. бессмысленность влечет за собой

[2]В 1965 г. К. Сегерберг предложил логику $\mathbf{S}_3$ [*Segerberg,* 1965], матрица которой отличается от матрицы $\mathfrak{M}_3^B$ только классом выделенных значений $D = \{1, 1/2\}$.

[3]В указанной работе Бочвара исходные связки содержали еще одно отрицание, а именно внешнее отрицание $\rceil$, которое, как оказалось, определимо следующим образом: $\rceil p := \vdash\sim p$.

бессмысленность. Обратим внимание, что одновременно с Бочваром внутренние связки под названием «слабые» были открыты С. Клини [*Клини,* 1957]. Логика со связками $\{\sim, \cap, \cup\}$ есть не что иное, как слабая регулярная логика Клини .

1.1. Трехзначные изоморфы $\mathbf{C}_2$

Особую роль в $\mathbf{B}_3$ играет связка $\vdash$ (будем обозначать ее как $\Box$, поскольку она есть не что иное, как оператор необходимости в трехзначной модальной логике Лукасевича [*Łukasiewicz,* 1930, p. 169]), посредством которой следующим образом определяется отрицание $\sim^\Box$, импликация $\supset^\Box$, дизъюнкция $\cup^\Box$, конъюнкция $\cap^\Box$ и внешняя эквиваленция $\equiv^\Box$:

$\sim^\Box p := \sim\Box p$ (это отрицание будем обозначать посредством $\lceil p$),

$p \supset^\Box q := \Box p \supset \Box q$,

$p \cup^\Box q := \Box p \cup \Box q$,

$p \cap^\Box q := \Box p \cap \Box q$,

$p \equiv^\Box q := \Box p \equiv \Box q$.

Эти связки Д. А. Бочвар называет *внешними* и они задаются следующими таблицами:

x	$\lceil x$
1	0
1/2	1
0	1

$\supset^\Box$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

$\cup^\Box$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	0	0
0	1	0	0

$\cap^\Box$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	0	0
0	0	0	0

$\equiv^\Box$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	1	1
0	0	1	1

Выделенным значением здесь является 1.

Отметим важную особенность приведенных истинностных таблиц, которая состоит в том, что внутри них имеются только истинностные значения 1 и 0. По существу, Бочвар предложил *перевод* внутренних связок во внешние. Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B}_3^{\Box}$.

Определение 9. Под *фрагментом* некоторой логики $\mathbf{L}$ со множеством связок F будем понимать логику $\mathbf{L}'$ со множеством связок F' такую, что посредством F определимы связки из множества F', но не наоборот.

Отсюда следует, что $\mathbf{B}_3^{\Box}$ есть фрагмент логики $\mathbf{B}_3$. Этот фрагмент оказался необычным. Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара назовем $\mathbf{B}_3^{\Box}$ *изоморфом* классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$.

Определение 10. Некоторый фрагмент логики $\mathbf{L}$ является изоморфом классической пропозициональной логики, если и только если $\mathbf{L}$ совпадает по классу тавтологий и по классу выводимых формул с классической пропозициональной логикой $\mathbf{C}_2$. Такие изоморфы назовем *сильными.*

Таким образом, логика $\mathbf{B}_3$ содержит фрагмент, изоморфный $\mathbf{C}_2$.

В итоге, логика $\mathbf{B}_3$ имеет два уровня. Первый уровень образуют формулы с внутренними связками, второй уровень образуют формулы с внешними связками $\mathbf{B}_3^{\Box}$. Внутренние формулы суть выразительные средства и представляют язык-объект, в котором рассматриваемые факты не могут быть доказаны; внешние формулы суть дедуктивные средства, с помощью которых доказываются утверждения о внутренних формулах, и в этом смысле внешние формулы представляют метаязык. Логикой внешнего уровня, как мы видим, является классическая логика $\mathbf{C}_2$. Как раз заслугой Бочвара является то, что средствами трехзначной логики, даже такой слабой по функциональным свойствам как $\mathbf{B}_3$ (об этом см. ниже) можно определить два совершенно различных типа логических связок. Это было выдающееся открытие, не сразу получившее адекватного осмысления.

Н. Решер, наверное, был одним из первых, кто обратил внимание на $\mathbf{B}_3$ и на выделенный в ней Д.А. Бочваром фрагмент, являющийся изоморфом $\mathbf{C}_2$ [*Rescher,* 1969, p. 31]. Однако в [*Карпенко,* 1997, с. 25–26] было указано, что $\mathbf{B}_3$ имеет еще один изоморф $\mathbf{C}_2$. Как уже говорилось, связка $\vdash p$ есть $\Box p$, и тогда имеем также модальный оператор возможности $\Diamond p$, который определяется стандартным образом в виде $\Diamond p := \sim \Box \sim p$. Теперь мы можем определить внешние связки $\sim^{\Diamond}$, $\supset^{\Diamond}$, $\cap^{\Diamond}$, $\cup^{\Diamond}$ и $\equiv^{\Diamond}$ аналогично тому, как определялись внешние связки в $\mathbf{B}_3^{\Box}$, т. е. вместо оператора $\Box$ перед каждой пропозициональной переменной ставится оператор $\Diamond$. В результате имеем еще один перевод внутренних связок во внешние. Тогда для отрицания $\sim^{\Diamond}$ (будем обозначать его посредством $\rceil$), импликации $\supset^{\Diamond}$, дизъюнкции $\cup^{\Diamond}$, конъюнкции $\cap^{\Diamond}$ и эквиваленции $\equiv^{\Diamond}$ получаем следующие таблицы:

x	$\rceil x$
1	0
1/2	0
0	1

$\supset^{\Diamond}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\cup^{\Diamond}$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1	1
0	1	1	0

$\cap^{\Diamond}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	0

$\equiv^{\Diamond}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	0
0	0	0	1

Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$. Выделенными значениями здесь являются 1 и $1/2$.

Итак, в итоге мы получили еще один трехзначный изоморф $\mathbf{C}_2$[4]. Обратим внимание, что изоморфы $\mathbf{B}_3^{\Box}$ и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ отличаются друг от друга соответственно тем, что в $\mathbf{B}_3^{\Box}$ истинностное значение $1/2$ отождествляется с 0, а в $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ — с 1. При таком отождествлении свойства связок остаются классическими, что в явном виде указывает на то, что в $\mathbf{B}_3^{\Box}$ и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ верифицируются все аксиомы $\mathbf{C}_2$. Легко проверить, что здесь также верифицируется «строгий» *modus ponens*[5], т. е. это правило сохраняет выделенное значение. Такие изоморфы назовем «строгими изоморфами». Первая специальная работа, посвященная изоморфам, принадлежит Л.Ю. Девяткину [*Девяткин,* 2004], в которой исследовались свойства строгих изоморфов.

Новый поворот в изучении изоморфов был совершен в [*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007], где было обращено внимание на то, что имеется еще два изоморфа, если мы рассмотрим $\mathbf{B}_3^{\Box}$ с двумя выделенными значениями, а $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ с одним выделенным значением. Отличие от предыдущих изоморфов в том, что здесь верифицируется лишь «слабый» *modus ponens*, т. е. это правило сохраняет тавтологию, но не выделенное значение. Однако в данном случае, как и в случае с классической логикой $\mathbf{C}_2$, это различие не имеет никаких логических последствий в силу следующего результата из [*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007]: матрицы

$$\mathfrak{M}_3^{\Box,1} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \ulcorner, \supset^{\Box}, \{1\} \rangle,$$

$$\mathfrak{M}_3^{\Diamond,2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \urcorner, \supset^{\Diamond}, \{1/2, 1\} \rangle,$$

[4]Этот изоморф появляется уже у Решера [*Rescher,* 1969, p. 33], но он получает его средствами трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, которую мы рассмотрим ниже.

[5]В разделе 2.7. подробно будут рассмотрены сильная и слабая формулировки *modus ponens*.

$$\mathfrak{M}_3^{\Box,2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \ulcorner, \supset^{\Box}, \{1/2, 1\} \rangle,$$
$$\mathfrak{M}_3^{\Diamond,1} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \urcorner, \supset^{\Diamond}, \{1\} \rangle^6,$$

являются *характеристическими*[7] для $\mathbf{C}_2$. Тем не менее, как мы увидим далее, средства трехзначной логики позволяют различать эти два вида правила *modus ponens*. Здесь обратим внимание на одно важное замечание, сделанное Н. Решером и А. Чёрчем в [*Church, Rescher,* 1950], что, хотя трехзначная матрица $\mathfrak{M}_3$ может быть характеристической для $\mathbf{C}_2$, но никакая булева алгебра не является гомоморфной $\mathfrak{M}_3$.

Специальному изучению трехзначных изоморфов $\mathbf{C}_2$ посвящена книга Л.Ю. Девяткина [*Девяткин,* 2011]. В ней сохраняется импликативно-негативный пропозициональный язык, но исследование изоморфов теперь ведется относительно свойств отношения логического следования.

Существенный прорыв в изучении трехзначных изоморфов $\mathbf{C}_2$ уже на более фундаментальном уровне совершен Л.Ю. Девяткиным в [*Девяткин, Преловский, Томова,* 2015, гл. 2]. Главным результатом является доказательство Теоремы 1 о необходимых и достаточных условиях, которыми должна обладать матрица $\mathfrak{M}$ (верифицирующая классическое отношение логического следования, т. е. строгий *modus ponens*), чтобы быть изоморфом для $\mathbf{C}_2$:

Трехзначная матрица $\mathfrak{M}$ является матрицей для $\mathbf{C}_2$, если и только если существует матричный гомоморфизм из $\mathfrak{M}$ на $\mathbf{C}_2$.

---

[6]Также заметим, что в работе [*Church,* 1953, p. 51] встречаем точно такие же таблицы, как для связок $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$, но с одним выделенным значением $D = \{1\}$, т. е. по сути матрицу $\mathfrak{M}_3^{\Diamond,1}$, и как, замечает А. Чёрч, эта матрица является характеристической матрицей классической пропозициональной логики.

[7]Матрица $\mathfrak{M}$ называется *характеристической* для исчисления $\mathbf{L}$, если формула A является тавтологией в $\mathfrak{M}$ т.т.т., когда A доказуема в $\mathbf{L}$.

К тому же, что очень важно, указанная теорема имеет место для произвольного пропозиционального языка $\mathcal{L}$. Таким образом, понятие изоморфа впервые обретает строгие логико-алгебраические основания.

Роль изоморфов классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$ еще полностью не изучена. По-видимому, самое интересное в том, что некоторая многозначная логика $\mathbf{L}$, содержащая изоморф $\mathbf{C}_2$, может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C}_2$ (см. об этом в [*Карпенко,* 2010, с. 55]).

1.2. Аксиоматизация и алгебраизация $\mathbf{B}_3$

В итоге можно констатировать, что логика $\mathbf{B}_3$ есть объединение внутренних и внешних логических связок. Как это выглядит в аксиоматической форме, впервые было показано В.К. Финном в [*Финн,* 1971] (расширенный вариант этой статьи см. в [*Финн,* 1974a]). Для этого при аксиоматизации $\mathbf{B}_3$ вводятся переменные двух сортов. Пусть p, q, r, ... — пропозициональные переменные, принимающие значения из множества $\{1, {}^1\!/_2, 0\}$; а u, v, w,... — сентенциональные переменные, принимающие значения из множества $\{1, 0\}$. Посредством A, B, C,... обозначаются произвольные формулы из $\mathbf{B}_3$, посредством же A^0, B^0, C^0,... обозначаются внешние формулы из $\mathbf{B}_3$.

Исходными связками исчисления $\mathbf{B}_3$ являются $\sim$, $\cap$, $\cup$ и $\rightarrow$ (в наших обозначениях последняя связка есть $\supset^{\Box}$). Это означает, что два множества связок $\{\sim, \cap, \vdash\}$ и $\{\sim, \cap, \cup, \rightarrow\}$ *функционально эквивалентны.*

В одну строну мы уже показали, т. е. посредством $\{\sim, \cap, \vdash\}$ определимы связки $\cup$ и $\rightarrow$. В обратную сторону имеем:

$$\vdash p := (p \rightarrow p) \rightarrow p,$$

$$p \rightarrow q := \sim\vdash p \cup \vdash q.$$

Аксиоматизация $\mathbf{B}_3$, предложенная В.К. Финном, выглядит следующим образом:

1. $p \to (q \to p)$

2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (q \to r))$

3. $((p \to q) \to p) \to p$

4. $p \cap q \to p$

5. $p \cap q \to q \cap p$

6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \cap r))$

7. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \cup q \to r))$

8. $p \cup q \to q \cup p$

9. $(p \cup q) \cup r \leftrightarrow p \cup (q \cup r)$

10. $p \cup q \to q \cup p$

11. $(p \cup q) \cap r \to (p \cap r) \cup (q \cap r)$

12. $r \cap (p \cup q) \to (r \cap p) \cup (r \cap q)$

13. $p \leftrightarrow \sim\sim p$

14. $\sim p \to (p \to q)$

15. $p \to (\sim q \to (\sim (p \to q)))$

16. $\sim p \to (p \cup q \leftrightarrow q)$

17. $\sim p \cap \sim q \leftrightarrow \sim (p \cup q)$

18. $\sim p \cup \sim q \leftrightarrow \sim (p \cap q)$

19. $p \to v \cup p$

20. $(\sim v \to \sim p) \to (p \to v)$

21. $\sim \downarrow v$

22. $\downarrow p \to \downarrow (p \cup q)$

23. $\Box p \cap \downarrow q \to \sim (p \to q)$.

Правила вывода:

R1. *Modus ponens.*

R2. Обычная подстановка: вместо p подставляется формула B.

R3. Ограниченная подстановка: вместо v подставляется B^0.

Исчисление, эквивалентное $\mathbf{B}_3$, построено также в [*Piróg-Rzepecka,* 1973] под названием **W**. Значительно более простая аксиоматизация $\mathbf{B}_3$, чем приведенная выше, принадлежит А.Т. Ишмуратову [*Ишмуратов,* 1974]. Эта аксиоматизация упрощена в [*Ишмуратов,* 1981], где $\mathbf{B}_3$ положена в основу специальной системы временной логики.

Заметим, что К. Сегерберг в [*Segerberg,* 1965], конструирует несколько трехзначных систем логики бессмысленности, одной из которых является не что иное, как трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_3$ с теми же самыми исходными связками (ibid., p. 204), но с двумя выделенными значениями.

Подчеркнем, что в аксиоматизации $\mathbf{B}_3$, предложенной В.К. Финном, верифицируются не все законы классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$, например, не имеет места контрапозиция $(p \supset^{\Box} q) \supset^{\Box} (\sim q \supset^{\Box} \sim p)$. Это же относится и к импликации $\supset^{\Diamond}$. Однако, имея ввиду, что $\mathbf{B}_3$ содержит фрагмент, изоморфный $\mathbf{C}_2$, естественно было бы посредством внешних формул задать аксиоматизацию классической логики $\mathbf{C}_2$. Тогда аксиоматизацию самой $\mathbf{B}_3$ можно представить как расширение $\mathbf{C}_2$, что и было сделано в [*Finn, Grigolia,* 1993, p. 235–236] (29 аксиомных схем плюс сокращения), но с единственным правилом вывода *modus ponens*). Наконец, в [*Бочвар, Финн,* 1976] приводятся аналитические таблицы для логики высказываний $\mathbf{B}_3$ и для логики предикатов $\mathbf{B}_3$.

В [*Финн,* 1974a] вводится понятие трехэлементной алгебры Бочвара. Более подробно об этом см. в [*Finn, Grigolia,* 1993], где алгебраизация $\mathbf{B}_3$ дается в сигнатуре $\langle \cup, \cap, \sim, J_0, J_{1/2}, J_1, 0, 1 \rangle$. Здесь $\langle \cup, \cap, \sim \rangle$ есть деморгановская дистрибутивная квази-решетка (т. е. решетка без законов поглощения), а операторы J_0, $J_{1/2}$, и J_1 определяются следующим образом:

$$J_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i \end{cases} (i = 0, 1/2, 1).$$

В 2007 г. Томова показала (см. [*Томова,* 2012, с. 59]), что логики со связками $\{\sim, \cap, \vdash\}$ и $\{\rceil, \cap, \cup\}$ функционально эквивалентны. Осталось показать, что посредством связок из $\{\rceil, \cap, \cup\}$ определимы связки $\sim$ и $\vdash$:

$$\sim p := (p \cap \rceil p) \cup \rceil p,$$

$$\vdash p := \rceil \sim p.$$

Это значит, что алгебраизацию $\mathbf{B}_3$ можно представить в очень простом виде, а именно как дистрибутивную квазирешетку $\langle L, \cup, \cap, 0, 1 \rangle$, снабженную операцией трехзначного псевдодополнения.

Имеется несколько обобщений трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ на n-значный случай $\mathbf{B}_n$ при том совершенно разных, т. е. с разными классами тавтологий. В [*Бочвар, Финн,* 1972, с. 289] построено обобщение со связками $\sim, \cap, \cup$ и J_i $(0 \leq i \leq n-1)$, сохраняющее алгебраические свойства $\mathbf{B}_3$. Именно с этими связками $\mathbf{B}_n$ была аксиоматизирована в [*Григолия, Финн,* 1979] и [*Finn, Grigolia,* 1980] в виде гильбертовского исчисления и построена ее алгебра с доказательством теоремы представления. Заметим, что алгебры для $\mathbf{B}_n$ не являются многообразием, а только *квазимногообразием.*

1.3. Функциональные свойства B_3

Рассмотрим матрицу для трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$ [*Łukasiewicz,* 1920]:

$$\mathfrak{M}^{L}_3 = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim, \to, \{1\}\rangle,$$

где $\sim$ определено выше, а таблица для $\to$ есть

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

Посредством исходных связок по определению вводятся другие логические связки:

$$p \vee q := (p \to q) \to q \qquad (p \vee q = max(x, y)),$$

$$p \wedge q := \sim(\sim p \vee \sim q) \qquad (p \wedge q = min(x, y)).$$

Заметим, что фрагмент $\mathbf{Ł}_3$, состоящей из множества связок $\{\sim, \wedge, \vee\}$ представляет собой язык сильной регулярной логики Клини $\mathbf{K}_3$ [*Клини,* 1957, § 64], где импликация $\supset$ определяется стандартным образом:

$$p \supset q := \sim p \vee q.$$

В.И. Шестаков[8] в [*Шестаков,* 1964] показал, что если в $\mathbf{B}_3 = \{\sim, \cap, \vdash\}$ конъюнкцию $\cap$ заменить на $\wedge$ из $\mathbf{K}_3$, то $\mathbf{B}_3$ превращается в трехзначную логику Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$.

[8]Напомним, что В.И. Шестаков является пионером (на ряду с К.Э. Шенноном и А. Накашимой) в применении булевой алгебры к анализу электрических релейно-контактных схем (диссертация 1938 г.). Ограниченность средств классической двузначной логики, обнаруженная Шестаковым в процессе более сложных сетей таких, как соединение мостов, привело его к необходимости использования аппарата многозначной логики.

Это делается следующим образом:

$p \to q := (\sim p \vee q) \vee (\downarrow p \wedge \downarrow q)$, где

$\downarrow p := \sim(\vdash p \cup \vdash \sim p)$.[9]

Заметим, что логика $\mathbf{B}_3$ функционально вложима в $\mathbf{Ł}_3$:

$\vdash p := \sim (p \to \sim p)$,

$p \cap q := (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$ [*Бочвар, Финн,* 1972, с. 289],

но обратное не имеет места, поскольку из построения «нормальных форм» для $\mathbf{B}_3$ (см. [*Финн,* 1974a]) следует, что импликация Лукасевича $\to$ не определима в $\mathbf{B}_3$.

Отметим также, что $\mathbf{Ł}_3$ по функциональным свойствам является *предполной* логикой в $\mathbf{P}_3$, где $\mathbf{P}_3$ есть трехзначная функционально полная логика Поста [*Post,* 1921]. Очень важное понятие *предполноты* состоит в следующем.

Определение 11. В общем случае система функций F_1 называется *предполной* в F_2, если F_1 представляет не полную систему, но добавление к F_1 любой функции f такой, что $f \in F_2$ и $f \notin F_1$ преобразует F_1 в F_2.

Важный результат получен В.К. Финном в [*Финн,* 1974b], где установлен критерий функциональной полноты для класса функций B_3, соответствующего трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_3$. Здесь доказывается, что B_3 имеет ровно 11 предполных классов, и система функций F полна в B_3 т.т.т., когда F не включается ни в один из этих классов.

Наконец, мы должны указать еще один результат, на самом деле фундаментальный, относительно логики $\mathbf{B}_3$. Пусть

[9] В этом же году Е. Слупецкий (см. [*Słupecki, Bryll, Prucnal,* 1967]) посредством связок $\{\sim, \vee, \wedge, \Diamond\}$ определяет $p \to q$ следующим образом:
$p \to q := (\sim p \vee q) \vee \Diamond(\sim p \wedge q)$, где
$\Diamond p := \sim\vdash\sim p$.

P_n есть множество всех n-значных функций, соответствующих n-значной логике Поста $\mathbf{P}_n$, и пусть $F \subseteq P_n$. Тогда, следуя А.В. Кузнецову, множество всех функций, которые можно получить с помощью операции *суперпозиции* (см. [*Яблонский,* 1958]) из F, называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$. Множество F n-значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом)*, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. если $F = [F]$. В [*Post,* 1941] Пост доказал, что мощность множества замкнутых классов в P_2, где P_2 есть множество булевых функций, *счётна*, и дал полное описание решетки замкнутых классов. Неожиданно оказалось [*Янов, Мучник,* 1959], что для *всякого* $n (n \geq 3)$ P_n *содержит континуум различных замкнутых классов*[10]. Возникает естественный вопрос о мощности множества замкнутых классов функций в логиках «слабее» $\mathbf{P}_n$ (обсуждение см. в [*Карпенко,* 2010]). Установлено, что $\mathbf{Ł}_3$ является «континуальной» логикой, а как быть с $\mathbf{B}_3$? Была уверенность, что $\mathbf{B}_3$, как и $\mathbf{C}_2$ является «счетной» логикой, пока недавно был получен удивительный результат, что такая «слабая» логика, как $\mathbf{B}_3$, также содержит континуум различных замкнутых классов функций [*Prelovskiy,* 2013].

1.4. Фрагмент $\mathbf{B}_3$, состоящий только из внешних формул

Еще В.И. Шестаков в работе [*Шестаков,* 1959] сократил число основных связок логики Бочвара $\mathbf{B}_3$ до двух $\{\psi, \vdash\}$, где ψ по аналогии с классической логикой высказываний есть антидизъюнкция (стрелка Пирса) и определяется следующим образом: $p \, \psi \, q := \sim p \cap \sim q$. Таким образом, все внутренние связки $\mathbf{B}_3$ определимы посредством $p \, \psi \, q$. В последующем фрагмент $\mathbf{B}_3$,

[10]См. также [*Hulanicki, Swierckowski,* 1960].

состоящий только из внутренних связок, Шестаков обозначил посредством $\mathbf{B}_0$.

В работе [*Шестаков,* 1971] автор выделяет фрагмент $\mathbf{B}_3$, который содержит только внешние связки, и обозначает его как $\mathbf{B}_1$. В этой работе вводится стрелка Пирса γ (и штрих Шеффера λ):

γ	1	½	0
1	0	0	0
½	0	0	1
0	0	1	1

посредством которого определяется весь класс внешних связок, в числе которых все связки, входящие в изоморф $\mathbf{B}_3^{\square}$ (см. выше раздел 1.1), а также связку $\rceil$. Через эти связки следующим образом определяется γ [*Шестаков,* 1971, с. 105]:

$$x\,\gamma\,y := (\rceil x \cap^{\square} \lceil y) \cup^{\square} (\lceil x \cap^{\square} \rceil y) \quad \text{(Sh)}.$$

К этой примечательной формуле мы еще вернемся в связи с паралогиками. Шестаков обсуждает также вопрос о взаимоотношении $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$ и приходит к выводу, что логика $\mathbf{B}_3$ является объединением непересекающихся логик $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$. Отсюда, кстати, следует, что множество всех связок $\mathbf{B}_3$ не представимо в виде штриха Шеффера (стрелки Пирса). Теперь понятен шокирующий результат Преловского [*Prelovskiy,* 2013] о континуальности $\mathbf{B}_3$. По отдельности $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_1$ счетные логики, и поэтому $[\{B_0\}] \cup [\{B_1\}] = \aleph_0$, но $[\{B_0\} \cap \{B_1\}] = \mathcal{C}$.

Главный результат статьи [*Шестаков,* 1971] заключается в доказательстве теоремы о функциональной полноте множества внешних связок посредством введения «канонических» (нормальных) форм[11]. Однако заметим, что имеется более сильный

[11] В [*Финн,* 1974a, с. 399] сформулирована следующая теорема. Всякая внешняя формула из $\mathbf{B}_3$, тождественно не равная 0, представима един-

результат, а именно из упоминаемого нами критерия функциональной полноты для класса функций B_3 [*Финн,* 1974b] следует критерий функциональной полноты для класса внешних функций[12] B_1: B_1 имеет ровно 7 предполных классов, и система функций F полна в B_1 т.т.т., когда F не включается ни в один из этих классов.

1.5. Класс бочваровых логик $\mathcal{B}$

Мы уже знаем, что $\mathbf{B}_3$ является расширением $\mathbf{B}_0$ (или, что то же самое, расширением слабой логика Клини $\mathbf{K}_3^w$ [*Kleene,* 1938], открытой одновременно с $\mathbf{B}_0$). Возникает нетривиальный вопрос о классификации всех *интересных* расширений $\mathbf{B}_0$ (см. [*Томова,* 2010])[13].

Надо уточнить слово «интересные». Для каждой системы логики наиболее важно, какими свойствами обладает её связка импликации. Пусть V_3 есть $\{0, 1/2, 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию $\to$ будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

(1) **C**-*расширение*, т. е. ограничение $\to$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_3 есть обычная классическая связка импликации.

(2) *Нормальность* в смысле Лукасевича–Тарского, т. е. если $x \to y \in D$ и $x \in D$, то $y \in D$ [*Łukasiewicz, Tarski,* 1930, p. 134].

(3) *Согласованность с частичным порядком*, т. е. для всех $x, y \in V_3$: если $x \leq y$, то $x \to y \in D$.

ственным образом в виде совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы.

[12]Функция f называется *внешней*, если для любого набора истинностных значений $x_1, \ldots, x_n$ $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

[13]См. также книгу [*Томова,* 2012] и статью [*Tomova,* 2012].

При $D = \{1\}$ имеем 6 импликаций:

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	a	0
$1/2$	1	1	b
0	1	1	1

Здесь $a \in \{0, 1/2\}$ и $b \in \{0, 1/2, 1\}$.

При $D = \{1, 1/2\}$ имеем 24 импликации:

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	b	0
$1/2$	a	a	0
0	1	a	1

Здесь $a \in \{1, 1/2\}$ и $b \in \{0, 1/2, 1\}$.

Заметим, что 2 пары импликаций совпадают как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, 1/2\}$, поэтому имеется всего 28 уникальных импликаций, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Множество трехзначных логик, которые являются расширением $\mathbf{B}_0$ естественными импликациями, разбивается на семь непересекающихся классов. Эти семь классов представимы в виде решетки семи *базовых* (при данном подходе) трехзначных логик по отношению функционального вложения одной логики в другую:

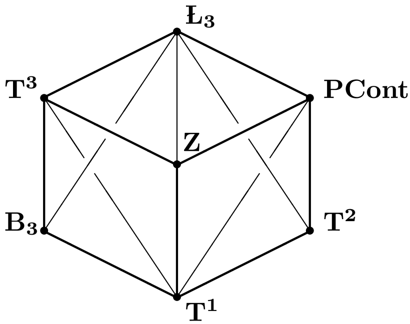

Рис. 1. Решетка базовых трехзначных логик

Интересна таблица разбиений всех 28 расширений на классы эквивалентности:

Ł$_3$	**PCont**	**B$_3$**	**Z**	**T^1**	**T^2**	**T^3**
12	8	3	2	1	1	1

Исходную паранепротиворечивую логику **PCont** мы рассмотрим ниже. Одна из логик **Z** появилась в [*Hałkowska,* 1989]. Логики $\mathbf{T}^1$, $\mathbf{T}^2$ и $\mathbf{T}^3$ появились впервые.

Нас интересует класс трехзначных логик Бочвара, который обозначим посредством $\mathcal{B}$. Импликации из этого класса окажутся тем инструментом, который приведет нас к установлению истинного взаимоотношения между простыми паралогиками.

Мы видим, что класс трехзначных логик Бочвара $\mathcal{B}$ состоит из трех элементов — трех логик. Теперь мы можем их перечислить [*Томова,* 2012, с. 33]):

$\{\sim, \cup, \cap, \to_5\}$, $\{\sim, \cup, \cap, \to_7\}$ и $\{\sim, \cup, \cap, \to_4\}$,

Импликация $\to_5$ есть $\supset^{\Box}$, импликация $\to_7$ есть $\supset^{\Diamond}$.

Импликация $\rightarrow_4$ определяется следующей таблицей:

$\rightarrow_4$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

Здесь выделенным значением является 1. Эта импликация появляется уже у Н. Решера [*Rescher,* 1969, p. 47] при построении «стандартной последовательности логик», и специально выделена В.И. Шестаковым в [*Шестаков,* 1971, с. 104], где обозначается как $\prec$ и определяется следующим образом:

$$p \prec q := (p \supset^{\square} q) \cap^{\square} (\urcorner q \supset^{\square} \urcorner p).$$

Класс $\mathcal{B}$ говорит о том, что логики с этими связками попарно функционально эквивалентны[14]. Доказательство данного факта не представляет сложности. Так, функциональная эквивалентность $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_5\}$ и $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_7\}$ следует из определений:

$$p \rightarrow_7 q := \sim p \rightarrow_5 \sim q,$$

$$p \rightarrow_5 q := \sim p \rightarrow_7 \sim q.$$

Далее докажем функциональную эквивалентность $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_5\}$ и $\{\sim, \cup, \cap, \rightarrow_4\}$. Непосредственно это следует из определений:

$$p \rightarrow_4 q := (p \rightarrow_5 q) \cap (\sim q \rightarrow_5 \sim p),$$

$$p \rightarrow_5 q := (p \cup q) \rightarrow_4 ((p \rightarrow_4 q) \cup \sim p).$$

Обратим внимание на импликацию $\rightarrow_4$, которая в предложенной классификации имеет «напарника» $\rightarrow_{4'}$. Последнее

[14] Ср. с [*Томова,* 2012, Утверждение 2.20].

означает, что таблица для $\rightarrow_{4'}$ есть в точности как для $\rightarrow_4$, но с двумя выделенными значениями $1/2$ и 1. Более того, матрицы

$$\mathfrak{M} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_4, \{1\} \rangle \text{ и}$$
$$\mathfrak{M}' = \langle \{0, 1/2, 1\}, \rightarrow_{4'}, \{1/2, 1\} \rangle$$

эквивалентны, т. е. задают один и тот же класс тавтологий. В [*Tomova,* 2013, p. 347] показано, что в этих матрицах не имеют места закон утверждения консеквента, закон Пирса и перестановка:

$$p \supset (q \supset p),$$
$$((p \supset q) \supset p) \supset p,$$
$$(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r)).$$

Напомним, что импликации $\rightarrow_5$ и $\rightarrow_7$ являются классическими, т. е. в матрицах для них верифицируется импликативный фрагмент $\mathbf{C}_2$.

Итак, в результате класс $\mathcal{B}$ содержит четыре элемента $\{\rightarrow_5, \rightarrow_7, \rightarrow_4, \rightarrow_{4'}\}$ и обращает на себя внимание то, что в этом классе нет напарников для $\rightarrow_5$ и $\rightarrow_7$, т. е. нет импликации $\rightarrow_{5'}$, задаваемой матрицей с двумя выделенными значениями, и нет импликации $\rightarrow_{7'}$, задаваемой матрицей с одним выделенным значением. Напомним, что эти импликации появляются в работе [*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007] и играют ту же самую роль для построения изоморфов $\mathbf{C}_2$, как и импликации $\rightarrow_5$ и $\rightarrow_7$. Как мы увидим далее, класс $\mathcal{B}$ может быть пополнен.

Глава 2.

ЛИТЕРАЛЬНЫЕ ПАРАЛОГИКИ

Интерес к трехзначным паранепротиворечивым логикам и трехзначным параполным логикам необычайно высок в силу простоты исследуемых объектов и возможности различных применений, в том числе в области компьютерных наук, при работе с базами данных, в сфере искусственного интеллекта и других областях. Еще из многочисленных применений паранепротиворечивой логики выделим то, которое связано с обработкой противоречивой информации компьютером.

2.1. Паранепротиворечивость и параполнота

Основным стимулом разработки систем паранепротиворечивой логики является мысль о том, что мы можем оказаться в ситуации, когда наша теория окажется противоречивой, и в то же время мы должны осуществить некоторый обоснованный вывод.

Существуют различные определения паранепротиворечивой логики. Наиболее часто используется в литературе следующее.

Пусть $\vDash$ — отношение следования. Назовем $\vDash$ *эксплозивным*[1], если $A, \neg A \vDash B$, имеет место для любых A и B. Классическая логика и большинство стандартных неклассических логик, таких как интуиционистская, многозначные логики $\mathbf{Ł}_3$

[1] От эксплозия (англ. *explosion*) — взрыв, направленный во вне.

и $\mathbf{B}_3$ являются эксплозивными. В случае с паранепротиворечивой логикой ситуация меняется. Логика *паранепротиворечива*, если и только если ее отношение логического следования не является эксплозивным (см. [*Priest, Tanaka, Weber,* 2013]). Дуальным образом, назовем $\vDash$ *имплозивным*[2], если $B \vDash A, \neg A$, имеет место для любых A и B. Логика *параполна*, если и только если ее отношение логического следования не является имплозивным.

Следуя В.М. Попову [*Попов,* 2011], мы можем дать более развернутое определение паранепротиворечивости и параполноты. Здесь под логикой будем понимать непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки и правила *modus ponens.* Теорией логики $\mathbf{L}$ называется множество формул, включающее логику $\mathbf{L}$ и замкнутое относительно правила *modus ponens.* Множество всех формул называется тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что для некоторой формулы A верно следующее: $A \in \mathbf{T}$ и $\neg A \in \mathbf{T}$. Паранепротиворечивой теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую противоречивую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что $\mathbf{T}$ не есть тривиальная теория. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику $\mathbf{L}$, что существует паранепротиворечивая теория логики $\mathbf{L}$ (ср. с [*Da Costa,* 1974]). Полной теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что что для всякой формулы A верно: $A \in \mathbf{T}$ или $\neg A \in \mathbf{T}$. Параполной теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что $\mathbf{T}$ не является полной теорией логики $\mathbf{L}$ и всякая полная теория логики $\mathbf{L}$, включающая $\mathbf{T}$, есть тривиальная теория. Параполной логикой называем такую логику $\mathbf{L}$, что существует параполная теория логики $\mathbf{L}$ (ср. с [*Loparic, da Costa,* 1986]).

Итак, существуют различные формальные и содержательные критерии построения систем паранепротиворечи-

[2] От имплозия (англ. *implosion*) — взрыв, направленный внутрь.

вых логик (**PL**), но для данной работы хорошо подходит «импликативно-негативный» критерий С. Яськовского, именно он первый рассмотрел эту проблему в 1948 г. (см. [*Jaśkowski,* 1969]). Эта работа предлагает следующий критерий построения **PL** (более подробно см. в [*Karpenko,* 1999]): в системе **PL** не верифицируется импликативный закон $A \supset (\neg A \supset B)$. Обычно этот закон называется *законом Дунса Скота*. По аналогии с паранепротиворечивыми логиками удобно будет использовать следующий формальный критерий для параполноты: логика **L** параполна, если закон Клавия $(\neg A \supset A) \supset A$ не имеет места в **L** (см. [*Ciuciura,* 2015]).

Отметим, что классическая логика $\mathbf{C}_2$ не является ни паранепротиворечивой, ни параполной. Логики, которые одновременно являются и паранепротиворечивыми и параполными называются *паранормальными* логиками (следуя терминологии Ф. Миро Квисада (F. Miró Quesada)).[3] Ниже мы приведем удивительный пример *трехзначной* паранормальной логики ($\mathbf{TK}^1$), которая имеет непосредственное отношение к бочваровому классу $\mathcal{B}$.

Обратим внимание, что если в логике не верифицируется закон Дунса Скота , то при наличии правила *modus ponens*, сохраняющего выделенное значение, мы не сможем из противоречия получить любую формулу, т. е. отношение логического следования не будет эксплозивным. Однако в некоторых системах верификация закона Дунса Скота не приводит к тому, что из противоречия следует все что угодно, и логика также является паранепротиворечивой. Пример такой логики рассмотрим в следующем параграфе.

[3] О паранормальных логиках см. также [*Béziau,* 1989].

2.2. Логика Приста LP и логика PCont

Интересным примером трехзначной паранепротиворечивой логики является логика Приста **LP** (см. [*Priest,* 1979; *Priest,* 1984]), при построении которой в явном виде используется свойство быть изоморфом $\mathbf{C}_2$ и свойство слабого правила *modus ponens*. На самом деле логика **LP** есть не что иное, как трехзначная сильная регулярная логика Клини $\mathbf{K}_3$ (см. стр. 23), но с двумя выделенными значениями.

Уже Н. Решер в [*Rescher,* 1969, p. 116–117] заметил, что матрица для $\mathbf{K}_3$ с двумя выделенными значениями является характеристической для $\mathbf{C}_2$. Строгое доказательство этого утверждения можно найти в [*Epstein,* 1990, p. 252] (см. также книгу Л. Девяткина [*Девяткин,* 2011, раздел 3.2]). Это означает, что закон Дунса Скота имеет место в **LP**, но правило *modus ponens* в **LP** не сохраняет выделенное значение, т. е. не является строгим и поэтому, имея A и $\sim A$, из закона Дунса Скота по правилу *modus ponens* не получим B. В итоге, при стандартном определении отношения логического следования следующие утверждения не верны:

1. $(A \wedge \sim A) \vDash B$.
2. $A, \sim A \vee B \vDash B$.
3. $A \supset B, B \supset C \vDash A \supset C$.
4. $A \supset B, A \vDash B$.
5. Если A и B не содержат общих пропозициональных переменных и если B принимает значение 0, то $A \nvDash B$.

Заметим, что логика **LP** положена Пристом в основание паранепротиворечивой теории множеств. Алгебраическое изучение **LP** см. в [*Pynko,* 1995a].

Конечно, для построения паранепротиворечивой логики необязателен прием ослабления строгого правила *modus ponens*. Например, одной из самых известных трехзначной паранепротиворечивых логик является **PCont**. Берется $\mathbf{K}_3$ с двумя выделенными значениями, но в определении связки импликации имеется существенное изменение: вместо $^1/_2 \supset 0 = {}^1/_2$ берется $^1/_2 \supset 0 = 0$, т. е. импликация в **PCont** задается следующей таблицей:[4]

$\supset$	1	$^1/_2$	0
1	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	1	$^1/_2$	0
0	1	1	1

Эта логика открывалась в разное время и в разных странах независимым образом. Начиная с 1983, она систематически изучалась Л.И. Розоноэром (см. [*Розоноэр,* 1993]).

PCont содержит весь позитивный фрагмент классической логики $\mathbf{C}_2$ плюс следующие классические формулы с отрицанием: $p \vee \sim p, \sim\sim p \approx p, \sim (p \supset q) \approx (p \wedge \sim q)$ и законы Де Моргана

$$\sim (x \vee y) \approx \sim x \wedge \sim y$$

$$\sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y,$$

где $p \approx q := (p \supset q) \wedge (q \supset p)$. Но не все классические тавтологии с отрицанием имеют место в **PCont**, например, закон Дунса Скота, добавление которого к **PCont** превращает последнюю в $\mathbf{C}_2$. Изящное секвенциальное исчисление для **PCont** построено в [*Попов,* 1989].

[4]Интересно, что уже в работе С. Яськовского [*Jaśkowski,* 1969, p. 40] с ссылкой на систему L_3^2 Е. Слупецкого приводится эта импликация вместе с особым отрицанием и указывается, что закон Дунса Скота не имеет места.

Отметим также, что исчисление **PCont** является *максимальным* в том смысле, что между **PCont** и $\mathbf{C}_2$ нет промежуточного исчисления [*Batens,* 1980]. Другими словами, $\mathbf{C}_2$ является единственным собственным непротиворечивым расширением **PCont** .

2.3. Паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$

Теперь мы рассмотрим замечательную паранепротиворечивую логику с необычными свойствами. В 1973 году Сетте [*Sette,* 1973] построил наиболее простое из возможных паранепротиворечивое исчисление $\mathbf{P}^1$ со следующим синтаксисом:

1. Пропозициональные переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$;
2. Логические связки $\supset$ (импликация) и $\neg$ (отрицание);
3. Технические символы (,).

Понятия правильно построенных формул, атомарных формулы, схем формул и др. определяются стандартно (аналогично тому, как это сделано в классической логике). Заглавные буквы используются в качестве метапеременных над формулами.

Если A, B, C — формулы, то следующие схемы формул являются аксиомами:

(A1) $A \supset (B \supset A)$,

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,

(A3) $(\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg A \supset \neg\neg B) \supset A)$,

(A4) $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$,

(A5) $(A \supset B) \supset \neg\neg(A \supset B)$,

и *modus ponens*, (MP) $A, A \supset B/B$, в качестве единственного правила вывода.

В [*Boscaino,* 1992] показано, что аксиома (A4) не является независимой. Заметим, что если к аксиомам (A1) и (A2) добавим контрапозицию $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$, то получим аксиоматизацию $\mathbf{C}_2$ из [*Łukasiewicz, Tarski,* 1930, p. 136].

Исчисление $\mathbf{P}^1$ семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$$\mathfrak{M}_{P^1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \neg, \supset, \{1, 1/2\}\rangle,$$

где $\neg$ и $\supset$ суть $\ulcorner$ и $\supset^\Diamond$, соответственно (см. соответствующие таблицы в разделе 1.1). Дизъюнкция, конъюнкция и эквиваленция вводятся согласно определениям:

$$A \vee B := (A \supset \neg\neg A) \supset (\neg A \supset B),$$

$$A \wedge B := (((A \supset A) \supset A) \supset \neg((B \supset B) \supset B)) \supset \neg(A \supset \neg B),$$

$$A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

Эти связки есть не что иное как дизъюнкция $\cup^\Diamond$, конъюнкция $\cap^\Diamond$, и эквиваленция $\equiv^\Diamond$ изоморфа $\mathbf{B}_3^\Diamond$.

Впервые таблицы истинности для $\neg$, $\supset$, $\vee$, $\wedge$ $\equiv$ появляются в 1974 (см. [*Da Costa,* 1974, p. 499]), где они были использованы для доказательства того факта, что некоторые классические тавтологии не имеют места в паранепротиворечивой логике да Косты $\mathbf{C}_1$. В [*Da Costa, Alves,* 1981] рассматривается логика $\mathbf{P}^1$ под названием $\mathbf{F}$, полученная из трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$. Однако теперь мы знаем, что связки логики $\mathbf{P}^1$ определимы посредством связок логики Бочвара $\mathbf{B}_3$. Логика $\mathbf{P}^1$ как расширение паранепротиворечивой логики да Косты $\mathbf{C}_1$ была независимо рассмотрена Мортенсеном в 1989, под названием $\mathbf{C}_{0.1}$ (см. [*Mortensen,* 1989, p. 299]). В [*Popov,* 1999] Попов обратил внимание, что $\mathbf{P}^1$ (под названием $\mathbf{I}_1$) получается из трехзначной паранепротиворечивой логики Арруды **V1** [*Arruda,* 1977], если в ней останутся только так называемые «переменные Васильева», т. е. только атомарные формулы. В [*Marcos,* 2005a] $\mathbf{P}^1$ аксиоматизирована как расширение системы да Косты $\mathbf{C}_n$. В [*Ciuciura,* 2015a] представлена новая гильбертова аксиоматизация $\mathbf{P}^1$.

Обратим внимание на работу [*Karpenko,* 1986, p. 67], где значительно упрощается определение связок $\vee$ и $\wedge$ в $\mathbf{P}^1$. Это делается следующим образом:

$$\rceil A := \lceil(\lceil A \supset A)^5,$$

$$A \vee B := (\rceil A \supset B),$$

$$A \wedge B := \rceil(A \supset \rceil B).$$

Подчеркивается, что логика со связками $\rceil$, $\supset$, $\vee$ и $\wedge$ есть модель классической двузначной логики. В нашей новой терминологии это есть изоморф $\mathbf{C}_2$, обозначенный нами как $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$.

Теперь выделим основные свойства логики $\mathbf{P}^1$:

(1) В отличие от паранепротиворечивой логики **PCont**, $\mathbf{P}^1$ является паранепротиворечивой только на атомарном уровне. Это значит, что закон Дунса Скота $A \supset (\neg A \supset B)$ является $\mathbf{P}^1$-тавтологией только если A не является пропозициональной переменной. Об атомарных и молекулярных паранепротиворечивых логиках см. [*Karpenko,* 2002].

(2) Исчисление $\mathbf{P}^1$ является *максимальным* в следующем смысле: если A — классическая тавтология, не доказуемая в $\mathbf{P}^1$, тогда в результате добавления A к $\mathbf{P}^1$

[5] Ради справедливости заметим, что уже из работы [*Da Costa,* 1974, p. 500] следует, что посредством логических связок из $\mathbf{P}^1$ можно определить «сильное отрицание» $\rceil$, которое «имеет все свойства классического отрицания»: $\rceil A := \lceil A \wedge \lceil(A \wedge \lceil A)$. Понятно почему $\rceil A$ является классическим отрицанием: замена в $\mathbf{P}^1$ отрицания $\lceil A$ на отрицание $\rceil A$ превращает $\mathbf{P}^1$ в изоморф $\mathbf{C}_2$, который мы обозначили посредством $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$. Последнее означает, что теперь мы можем определять дизъюнкцию $\vee$ и конъюнкцию $\wedge$ стандартным образом.

в качестве новой схемы аксиомы получим классическую логику $\mathbf{C}_2$ [*Sette,* 1973, Proposition 11] (см. также [*Mortensen,* 1989, Theorem 5.4]).

(3) Логика $\mathbf{P}^1$ алгебраизуема в смысле В. Блока и Д. Пигоцци (см. [*Lewin, Mikenberg, Schwarze,* 1990] и [*Pynko,* 1995]).

(4) $\mathbf{P}^1$ является комбинацией логических операций изоморфов $\mathbf{B}_3^{\Box}$ и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$, т. е. логика $\mathbf{P}^1$ — логика со следующим множеством связок $\{\sim^{\Box}, \supset^{\Diamond}, \cap^{\Diamond}, \cup^{\Diamond}, \equiv^{\Diamond}\}$ [*Karpenko,* 2000b, p. 34].

(5) В $\mathbf{P}^1$ верифицируется формула $A \supset (\neg A \supset (\neg\neg A \supset B))$. В 1997 Ж.-И. Безье (см. [*Béziau,* 2000, p. 100]) и Е.К. Войшвилло независимо обнаружили, что в $\mathbf{P}^1$ из $\neg A$ and $\neg\neg A$ следует B. Несложно проверить, что формула $\neg A \supset (\neg\neg A \supset B)$ верифицируема трехзначными таблицами для $\neg$ и $\supset$ в $\mathbf{P}^1$. Но результат Войшвилло более сильный, т. к. для построения вывода B требуются только аксиомы (A1) и (A3) с правилом *modus ponens* (см. [*Karpenko,* 2000b, p. 185]).

(6) В [*Araujo, Alves, Guerzoni,* 1987] представлен перевод $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ есть модальная система Гёделя-Фейса-фон Вригта.

2.4. Параполная логика $\mathbf{I}^1$

В [*Sette, Carnielli,* 1995] в качестве дуальной к паранепротиворечивой логике $\mathbf{P}^1$ была введена параполная трехзначная логика $\mathbf{I}^1$, названная авторами «слабо интуиционистской логикой».

Исчисление $\mathbf{I}^1$ аксиоматизировано посредством следующих схем аксиом:

(A1) $A \supset (B \supset A)$,

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,

(A3) $(\neg\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg\neg A \supset B) \supset \neg A)$,

(A4) $\neg\neg(A \supset B) \supset (A \supset B)$,

и *modus ponens*.

В [*Sette, Carnielli,* 1995] показано, что исчисление $\mathbf{I}^1$ семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$$\mathfrak{M}_{I^1} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \neg, \supset, \{1\} \rangle,$$

где $\neg$ и $\supset$ суть $\sim^\lozenge(\rceil)$ и $\supset^\Box(\rightarrow_5)$, соответственно (см. соответствующие таблицы в разделе 1.1).

Конъюнкция $\wedge$ и дизъюнкция $\vee$ определяются в $\mathbf{I}^1$ следующим образом:

$$A \wedge B := \neg(((A \supset A) \supset A) \supset \neg((B \supset B) \supset B)),$$

$$A \vee B := \neg((B \supset B) \supset B) \supset ((A \supset A) \supset A).$$

Эти связки есть не что иное как конъюнкция $\cap^\Box$ и дизъюнкция $\cup^\Box$ изоморфа $\mathbf{B}_3^\Box$. В $\mathbf{I}^1$ имеют место все аксиомы известной интуиционистскй логики Гейтинга.

Система, подобная $\mathbf{I}^1$, также была изучена с различных точек зрения в [*Cândido,* 1992] и [*Loparic, da Costa,* 1986]. В [*Sette, Alves,* 1996] было доказано, что исчисление β_1 из [*Loparic, da Costa,* 1986] эквивалентно исчислению $\mathbf{I}^1$. В [*Popov,* 1999] для логики $\mathbf{I}^1$ (под названием $\mathbf{I}_2$) представлено секвенциальное исчисление генценовского типа. В [*Ciuciura,* 2015] представлена новая гильбертова аксиоматизация для $\mathbf{I}^1$.

Логика $\mathbf{I}^1$ имеет следующие свойства:

(1) $\mathbf{I}^1$ является параполной логикой только на атомарном уровне. Это означает, что закон Клавия, $(\neg A \supset A) \supset A$,

является $\mathbf{I}^1$-тавтологией только если A не является пропозициональной переменной.

(2) Исчисление $\mathbf{I}^1$ является *максимальным* [*Sette, Carnielli,* 1995].

(3) $\mathbf{I}^1$ алгебраизуема в смысле В. Блока и Д. Пигоцци (см. [*Sette, Carnielli,* 1995])[6].

(4) $\mathbf{I}^1$ является комбинацией логических операций изоморфов $\mathbf{B}_3^{\Box}$ и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$, т. е. логика $\mathbf{I}^1$ — логика со следующим множеством связок $\{\sim^{\Diamond}, \supset^{\Box}, \cap^{\Box}, \cup^{\Box}, \equiv^{\Box}\}$ [*Karpenko,* 2000b, p. 34].

2.5. Взаимоотношения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$

Уже в работе [*Sette, Carnielli,* 1995], где вводится параполная логика $\mathbf{I}^1$, авторы поясняют в каком смысле логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ могут быть рассмотрены в качестве дуальных. И в данном случае дуальность этих систем авторы сводят к тому, что $\mathbf{P}^1$ представляется как слабо паранепротиворечивая логика — логика, в которой не верифицируется закон непротиворечия, а логика $\mathbf{I}^1$ как слабо интуиционистская — логика, в которой не верифицируется закон исключенного третьего.

Важным оказался 2000 год, когда независимо друг от друга сразу в трех работах: [*Carnielli,* 2000; *D'ottaviano, Feitosa,* 2000; *Karpenko,* 2000b] сами логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ стали изучаться параллельно и взаимосвязано.

В [*Carnielli,* 2000] сильное отрицание $\rceil A$ в $\mathbf{P}^1$ определяется следующим образом (будем использовать наши обозначения):

---

[6]Здесь авторы обращают внимание на то, что с алгебраической точки зрения, кажется удивительным, что такие различные (а на самом деле дуальные) логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ могут быть алгебраизуемы посредством одной и той же системы эквивалентных формул Δ и посредством одних и тех же равенств $\sigma \sim \epsilon$. Тогда в случае с $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ естественно возникает вопрос: каковы отношения между $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$? (ibid., p. 202).

$\rceil A := \lceil(\lceil A \supset^{\Diamond} A)$.

В [*D'ottaviano, Feitosa,* 2000] определяется так:

$\rceil A := A \supset^{\Diamond} \lceil(A \supset^{\Diamond} A)$.

В [*Carnielli,* 2000] и [*D'ottaviano, Feitosa,* 2000] даются более простые определения $\cup^{\Diamond}$ и $\cap^{\Diamond}$ в $\mathbf{P}^1$ чем это сделал А. Сетте в [*Sette,* 1973][7]:

$A \cup^{\Diamond} B := (\rceil A \supset^{\Diamond} B)$,

$A \cap^{\Diamond} B := \rceil(A \supset^{\Diamond} \rceil B)$ [*Carnielli,* 2000, p. 158],

$A \cap^{\Diamond} B := \rceil(\rceil A \supset^{\Diamond} \rceil B)$ [*D'ottaviano, Feitosa,* 2000, p. 84].

Также в [*Carnielli,* 2000] и [*D'ottaviano, Feitosa,* 2000] определяются связки $\lceil$, $\cup^{\Box}$ и $\cap^{\Box}$ в $\mathbf{I}^1$. Например, $\lceil A := A \supset^{\Box} \rceil A$ [*Carnielli,* 2000, p. 159].

Целью работы [*Carnielli,* 2000] является обеспечение конечнозначных логик, включая такие экзотические как $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, семантическими интерпретациями, которые одновременно были бы интуитивно приемлемыми и с которыми легко было бы работать. Для этого В. Карниелли специально разработана «*семантика возможной переводимости*» (*possible translations semantics*). Данная семантика может рассматриваться как обобщение семантики Крипке, в которой имеем миры совершенно *различной природы*. Целью работы [*D'ottaviano, Feitosa,* 2000] является применение нового типа перевода между логиками, названного «консервативным переводом» (*conservative translation*). В частности представлен перевод R: $\mathbf{I}^1$ в $\mathbf{P}^1$, и перевод S: $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{I}^1$. Здесь отмечается, что А. Сетте и В. Карниелли [*Sette, Carnielli,* 1995] «не вводят какой-либо функции или из $\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{I}^1$, или из $\mathbf{I}^1$ в $\mathbf{P}^1$, которая проясняла бы в терминах переводов, что озна-

[7] См. также [*Karpenko,* 1986].

чает упомянутая ими “дуальность” между двумя системами» [*D’ottaviano, Feitosa,* 2000, p. 90].

Целью статьи [*Karpenko,* 2000b] как раз и является прояснение смысла дуальности между $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ посредством комбинации двух трехзначных изоморфов классической логики $\mathbf{C}_2$. Из того, что в $\mathbf{P}^1$ можно определить

$\vdash A := \ulcorner\ulcorner A$ и $\urcorner A := \ulcorner(\ulcorner A \supset^{\Diamond} A)$

делается важный вывод [*Karpenko,* 2000b, p. 185]:

a) $\mathbf{P}^1$ содержит фрагменты $\mathbf{B}_3^{\Box}$ and $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ изоморфные $\mathbf{C}_2$,

b) $\mathbf{P}^1$ содержит фрагмент изоморфный $\mathbf{I}^1$.

Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу:

c) $\mathbf{I}^1$ содержит фрагменты $\mathbf{B}_3^{\Box}$ and $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ изоморфные $\mathbf{C}_2$,

d) $\mathbf{I}^1$ содержит фрагмент изоморфный $\mathbf{P}^1$.

Отсюда очевидным образом следует, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ функционально эквивалентны, т. е. посредством связок из $\mathbf{P}^1$ определимы связки из $\mathbf{I}^1$, и наоборот, посредством связок из $\mathbf{I}^1$ определимы связки из $\mathbf{P}^1$.

Более того, поскольку $\mathbf{P}^1$ (как и $\mathbf{I}^1$) содержат оба указанных изоморфа, то имеются связки $\urcorner$, $\ulcorner$, $\cup^{\Box}$ и $\cap^{\Box}$. А это значит, что в силу формулы Шестакова (Sh) (см. выше раздел 1.4) логика $\mathbf{P}^1$ (как и $\mathbf{I}^1$) функционально эквивалентна фрагменту $\mathbf{B}_1$, состоящему из множества всех внешних формул логики Бочвара $\mathbf{B}_3$. Этот же вывод следует из рассмотренных работ [*Carnielli,* 2000] и [*D’ottaviano, Feitosa,* 2000], если мы возьмем логику $\mathbf{I}^1$ с отрицанием $\ulcorner$. Однако никто из указанных авторов, включая автора статьи [*Karpenko,* 2000b], на все это не обратили специального внимания. Только в [*Томова,* 2011, с. 265] был переоткрыт вариант формулы Шестакова (Sh), и с ее помощью доказана функциональная эквивалентность $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{B}_1$. Отсюда опять же можно получить функциональную эквивалентность логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

На самом деле, функциональная эквивалентность логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ доказывается чрезвычайно просто. Мы уже видели, что отрицания $\rceil$ и $\lceil$ в обоих логиках взаимоопределимы. То же самое осталось сделать для импликаций $\supset^{\Box}$ и $\supset^{\Diamond}$:

$$A \supset^{\Diamond} B := \lceil B \supset^{\Box} \lceil A \text{ и } A \supset^{\Box} B := \rceil B \supset^{\Diamond} \rceil A.$$

Таким образом, мы видим, что каждая из логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ расщепляется на два изоморфа $\mathbf{C}_2$. В связи с этим приведем цитату из [*Marcos,* 2004, p. 24] о применении семантики возможной переводимости к конечнозначным логикам: «Более того, истинностно-функциональные конечнозначные логики сами по себе могут быть разделены с точки зрения двузначной логики, т. е. на фрагменты двузначной логики… копии классической логики могут быть объединены во фрагменты модальных логик и т. д.»

Также подчеркнем, что логика $\mathbf{P}^1$ ($\mathbf{I}^1$), а следовательно и логика внешних связок $\mathbf{B}_1$, может быть аксиоматизирована как непосредственное расширение $\mathbf{C}_2$, используя метод Аншакова-Рычкова (см. [*Аншаков, Рычков,* 1982; *Аншаков, Рычков,* 1984]) для гильбертовской аксиоматизации конечнозначных логик. Условия для аксиоматизации следующие. Символы x, y, z,…, будут использованы для обозначения произвольных истинностных значений.

Логика $\mathbf{L}_n$ является *истинностно-полной логикой*, если, и только если в $\mathbf{L}_n$ функционально выразимы все J-операторы $J_i | i \in V_n$ (определение J-операторов см. в разделе 1.2). Логика $\mathbf{L}_n$ называется $\mathbf{C}$-*расширяющей*, если, и только если в $\mathbf{L}_n$ операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, ограничение которых на подмножество $\{0, 1\}$ совпадает с классическими логическими операциями. То есть $\mathbf{L}_n$ совпадает с $\mathbf{C}_2$ на множестве $\{0, 1\}$. В [*Аншаков, Рычков,* 1984] представлено подробное изложение общего эффективного метода построения исчисления гильбертовского типа для истинностно-полной **C**-*расширяющей* логики[8].

Очевидно, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются **C**-*расширяющими*. Покажем, например, что $\mathbf{I}^1$ является истинностно-полной:

$J_0(x)$ есть $\rceil(x)$,

$J_{1/2}(x)$ есть $\rceil(x \cup^{\square} \rceil x)$,

$J_1(x)$ есть $\rceil(\rceil x \cup^{\square} J_{1/2}(x))$.

Никто не обратил внимание, что логика Арруды **V3** из [*Arruda,* 1977, p. 16], которая есть ни что иное как $\mathbf{I}^1$ со всеми J-операторами, аксиоматизирована подобным образом.

2.6. Литеральные паралогики. LPP-матрицы

В очень интересной статье [*Lewin, Mikenberg,* 2006] авторы представляют семейство логических матриц, определяющих логики, в которых свойства паранепротиворечивости и/или параполноты имеют место только на литеральном уровне[9], т. е.

[8] Гильбертовское исчисление предикатов для произвольной истинностно-полной **C**-расширяющей хорошо кванторизуемой логики см. в [*Аншаков, Рычков,* 1984]. Логика является *хорошо кванторизуемой*, если, и только если соответствующая алгебра $\langle V_n, \vee, \wedge \rangle$ является квазирешеткой. Заметим, что кванторы $\forall$ и $\exists$ могут быть определены в логике как обобщенная конъюнкция и как обобщенная дизъюнкция, если, и только если, логика хорошо кванторизуема. Поскольку каждая решетка является квазирешеткой, то класс истинностно-полных **C**-расширяющих хорошо кванторизуемых логик содержит много хорошо известных неклассических логик, в которых операции конъюнкции и дизъюнкции обуславливают решеточную структуру.

[9] Пусть Fm — множество формул, построенных обычным рекурсивным образом из счетного множества пропозициональных переменных $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$ и некоторых логических связок. *Литералами* множества Fm

для формул, являющихся пропозициональными переменными p, q, $r\ldots$ или их повторными отрицаниями. Заглавные буквы A, B, $C\ldots$ используются в качестве переменных для сложных формул, т. е. формул, которые содержат бинарные связки, и α, β, $\gamma\ldots$ в качестве переменных для произвольных формул.

Используя уже принятые обозначения, пусть V есть множество истинностных значений такое, что $\{0, 1\} \subseteq V$ и множество D такое, что $D \subseteq V$, $1 \in D$ и $0 \notin D$. Пусть $\sim\colon V \to V$ есть функция такая, что $\sim 1 = 0$ и $\sim 0 = 1$. Они задают *литеральную паранепротиворечивую-параполную матрицу* (или *LPP-матрицу*) (*the literal-paraconsistent-paracomplete matrix*) $\langle V, D, \sim\rangle$ со следующими операциями:

$$x \vee y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ или } y \in D,\\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ и } y \in D,\\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin D \text{ или } y \in D,\\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

LPP-матрица является *паранепротиворечивой* если для некоторого $x \in V$ одновременно и $x \in D$, и $\sim x \in D$; LPP-матрица является *параполной* если одновременно $x \notin D$, и $\sim x \notin D$.

Заметим, что матрица $\langle\{1, 0\}, \{1\}, \sim\rangle$, где $\sim 0 = 1$ и $\sim 1 = 0$, которая определяет пропозициональную классическую логику $\mathbf{C}_2$, не является ни паранепротиворечивой, ни параполной.

Р. Левин и И. Микенберг определяют непротиворечивую и полную дедуктивную систему для логики, задаваемой классом

назовем множество Lit всех формул следующего вида: $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$ [*Lewin, Mikenberg,* 2006, p. 479].

всех LPP-матриц $\langle V, D, \sim\rangle$, не налагая условия на V, D или $\sim$. Эта система названа *литеральная паранепротиворечивая-параполная логика* (**LPPL**) с единственным правилом вывода modus ponens (MP) и со следующими аксиомами:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

(A3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$.

(A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$.

(A5) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$.

(A6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

(A7) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$.

(A8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma))$.

(A9) Аксиома для отрицания: $(\sim A \to \sim B) \to (B \to A)$, где A и B — сложные формулы.

Р. Левин и И. Микенберг отмечают, что эта система была предложена Л. Пуга и Н. да Коста в [*Puga, Da Costa,* 1988] в качестве аксиоматизации воображаемой логики Васильева. В [*Lewin, Mikenberg,* 2006] изучается класс трехэлементных матриц $\langle V_3, D, \sim\rangle$, где $V_3 = \{0, 1/2, 1\}$. Существует три возможные функции $\sim$, а именно,

$\sim_1 1/2 = 1/2$ (т. е. $\sim_1$ есть $\sim$)

$\sim_2 1/2 = 1$ (т. е. $\sim_2$ есть $\lceil$)

$\sim_3 1/2 = 0$ (т. е. $\sim_3$ есть $\rceil$).

Кроме того, возможны два множества выделенных значений, а именно, $D_1 = \{1\}$ и $D_2 = \{1, 1/2\}$. Тогда мы получим следующие шесть комбинаций:

$\mathfrak{M}^3_{1,1} = \langle V_3, D_1, \sim_1\rangle$,

$\mathfrak{M}^3_{1,3} = \langle V_3, D_1, \sim_3 \rangle$,

$\mathfrak{M}^3_{2,1} = \langle V_3, D_2, \sim_1 \rangle$,

$\mathfrak{M}^3_{2,2} = \langle V_3, D_2, \sim_2 \rangle$,

$\mathfrak{M}^3_{1,2} = \langle V_3, D_1, \sim_2 \rangle$,

$\mathfrak{M}^3_{2,3} = \langle V_3, D_2, \sim_3 \rangle$.

Р. Левин и И. Микенберг рассматривают только редуцированные матрицы (см. определение в [*Lewin, Mikenberg,* 2006, p. 482]), это первые четыре из указанных шести матриц. Обратим внимание, что последние две матрицы есть не что иное как бочваровы изоморфы $\mathbf{B}_3^{\Box}$ и $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ классической логики $\mathbf{C}_2$ (см. раздел 1.1).

2.6.1. Аксиоматизации и решетка расширений LPPL

Представляют интерес аксиоматизации логик, задаваемые первыми четырьмя матрицами.

Пусть $\alpha^{\circ} = \sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$ и $\alpha^{\bullet} = \alpha \vee \sim \alpha$

Ниже приведена аксиоматизация логики $\mathbf{S}_{2,2}$, определяемой матрицей $\mathfrak{M}^3_{2,2} = \langle V_3, D_2, \sim_2 \rangle$. Это логика Сетте $\mathbf{P}^1$.

Система аксиом:

($\mathrm{A}_{2,2}$.1) Аксиомы **LPPL**.

($\mathrm{A}_{2,2}$.2) $\beta^{\circ} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim_2 \beta) \to \sim_2 \alpha))$.

($\mathrm{A}_{2,2}$.3) $(\sim_2 \alpha)^{\circ}$.

MP единственное правило вывода.

Далее следует аксиоматизация логики $\mathbf{S}_{1,3}$, определяемой матрицей $\mathfrak{M}^3_{1,3} = \langle V_3, D_1, \sim_3 \rangle$. Это логика $\mathbf{I}^1$.

Система аксиом:

($\mathrm{A}_{1,3}$.1) Аксиомы **LPPL**.

(A$_{1,3}$.2) $\alpha^{\bullet} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim_3 \beta) \to \sim_3 \alpha))$.

(A$_{1,3}$.3) $(\sim_3 \alpha)^{\bullet}$.

MP единственное правило вывода.

Ниже приведена аксиоматизация логики $\mathbf{S}_{2,1}$, определяемой матрицей $\mathfrak{M}^3_{2,1} = \langle V_3, D_2, \sim_1 \rangle$. Эта система появляется в [*Carnielli, Marcos,* 2002, p. 62] под названием $\mathbf{P}^2$ (в нашем обозначении $\mathbf{P}^1_2$) и получена из $\mathbf{P}^1$ в результате замены отрицания $\sim_2$ на отрицание $\sim_1$. Более того, ее аксиоматизация и доказательство полноты есть в [*Marcos,* 2005a][10]. В этой работе Маркос показал (p. 64), что

$$\sim_2 \alpha := \alpha \supset^{\Diamond} \sim_1 \alpha.$$

Таким образом, $\mathbf{P}^1_2$ есть расширение $\mathbf{P}^1$ посредством добавления отрицания $\sim_1$.

Система аксиом:

(A$_{2,1}$.1) Аксиомы **LPPL**.

(A$_{2,1}$.2) $\beta^{\circ} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim_1 \beta) \to \sim_1 \alpha))$.

(A$_{2,1}$.3) $\alpha \leftrightarrow \sim_1 \sim_1 \alpha$.

MP единственное правило вывода.

Или $\mathbf{P}^1_2$ есть $\mathbf{P}^1 + \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$.

Далее приведена аксиоматизация логики $\mathbf{S}_{1,1}$, определяемой матрицей $\mathfrak{M}^3_{1,1} = \langle V_3, D_1, \sim_1 \rangle$. Эта система появляется в [*Попов,* 2002] под названием **LAP**. Здесь же она представлена в виде гильбертовского и секвенциального исчисления. В [*Marcos,* 2005a, p. 66] она появилась под названием $\mathbf{I}^2$ (в нашем обозначении $\mathbf{I}^1_2$). Поскольку, имеет место

[10] Еще ранее подобная система появилась в [*Mortensen,* 1989, p. 301] под названием $\mathbf{C}_{0,2}$, но с одним выделенным значением.

$\sim_3 \alpha := \sim_1 (\sim_1 \alpha \supset^{\square} \alpha)$,

то $\mathbf{I}^1_2$ есть расширение $\mathbf{I}^1$ посредством добавления отрицания $\sim_1$.

Система аксиом:

($\mathrm{A}_{1,1}$.1) Аксиомы **LPPL**.

($\mathrm{A}_{1,1}$.2) $\alpha^{\bullet} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim_1 \beta) \to \sim_1 \alpha))$.

($\mathrm{A}_{1,1}$.3) $\beta \leftrightarrow \sim_1 \sim_1 \beta$.

MP единственное правило вывода.

Или $\mathbf{I}^1_2$ есть $\mathbf{I}^1 + \beta \leftrightarrow \neg\neg\beta$.

Подчеркнем, что в этой работе Р. Левин и И. Микенберг определяют условия максимальности этих логик. В [*Hirsh, Lewin,* 2008] Хирш и Левин исследуют алгебраизуемость этих логик, построенных с использованием литеральных паранепротиворечивых-параполных матриц, и в [*Lewin, Mikenberg,* 2010] Левин и Микенберг разрабатывают первопорядковую теорию для логик, определяемых посредством литеральных паранепротиворечивых-параполных матриц.

Теперь построим решетку аксиоматических расширений пропозициональной логики **LPPL**. Пусть $\mathbf{LPPL}_{\sim_1}$ есть **LPPL**$+\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$. Тогда мы получим восьмиэлементную Булеву решетку, представленную на рис. 2.

Однако, учитывая, что (1) логики $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{I}^1$ и $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$ функционально эквивалентны и (2) логики $\mathbf{P}^1_2$, $\mathbf{I}^1_2$ и $\mathbf{I}^1_2\mathbf{P}^1_2$ тоже функционально эквивалентны, то восьмиэлементная Булева решетка на рис. 1 коллапсирует в четырехэлементную Булеву решетку, представленную на рис. 3.

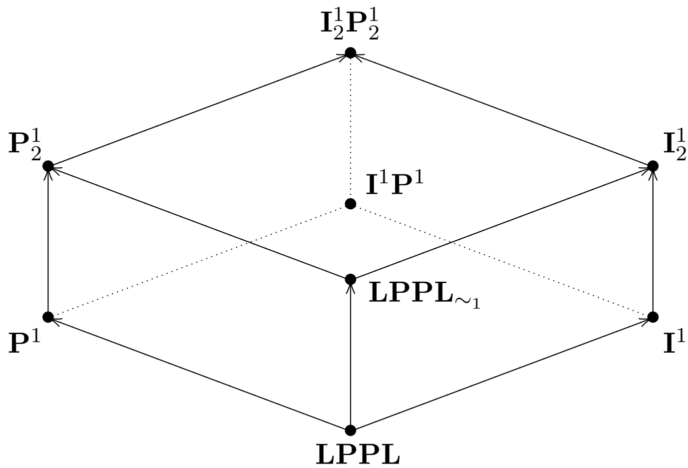

Рис. 2. Восьмиэлементная Булева решетка

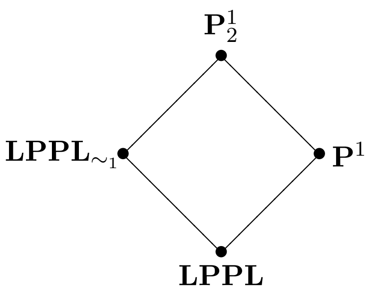

Рис. 3. Четырехэлементная Булева решетка

2.6.2. Паранормальные логики

В [*Loparic, da Costa,* 1986] было представлено гильбертовское исчисление логики β_0 и объявлено, что она является четырехзначной логикой. В [*Puga, Da Costa,* 1988] со ссылкой на [*Loparic, da Costa,* 1986] эта логика под названием **V** рассмотрена как паранормальная логика со следующей характеристической матрицей

$$\mathfrak{M}_V = \langle\{1, \top, \bot, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\}\rangle$$

где матричные операции $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$ и $\wedge$ определяются следующими таблицами:

x	$\neg x$
1	0
$\top$	1
$\bot$	0
0	1

$\rightarrow$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	0	0
$\top$	1	1	0	0
$\bot$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\vee$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	1
$\top$	1	1	1	1
$\bot$	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\wedge$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	0	0
$\top$	1	1	0	0
$\bot$	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Такая же матрица (в других обозначениях) появляется в [*Popov,* 1999] для логики под названием $\mathbf{I}_0$ и из нее выделяются следующие две подматрицы:

$$\mathfrak{M}_{I_1} = \langle\{1, \top, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\}\rangle,$$

$$\mathfrak{M}_{I_2} = \langle\{1, \bot, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\}\rangle.$$

Первая является характеристической для логики $\mathbf{I}_1$ ($\mathbf{P}^1$ с одним выделенным значением), вторая для логики $\mathbf{I}_2$ ($\mathbf{I}^1$). Для всех этих логик построены секвенциальные исчисления генценовского типа. Также в [*Попов,* 2003б] установлена связь $\mathbf{I}_0$ с классической пропозициональной логикой, посредством определения операций, погружающих классическую пропозициональную логику в $\mathbf{I}_0$.

В [*Попов,* 2003a] изучается четырехзначная паранормальная логика под названием **AVP** с характеристической матрицей

$$\mathfrak{M}^{\sim} = \langle \{1, \top, \bot, 0\}, \neg, \to, \vee, \wedge, \{1\} \rangle,$$

где $\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$, но $\neg\top = \top$ и $\neg\bot = \bot$. Для этой логики строится секвенциальное исчисление. Заметим, что здесь мы можем также выделить две интересные подматрицы:

$$\mathfrak{M}^{\sim}_1 = \langle \{1, \top, 0\}, \neg, \to, \vee, \wedge, \{1, \top\} \rangle,$$
$$\mathfrak{M}^{\sim}_2 = \langle \{1, \bot, 0\}, \neg, \to, \vee, \wedge, \{1\} \rangle.$$

Первая является характеристической для логики $\mathbf{P}^1_2$, вторая для логики $\mathbf{I}^1_2$.

Наконец, в [*Lewin, Mikenberg,* 2006, p. 487] представлена четырехзначная матрица $\mathfrak{M}^4$, которая отличается от $\mathfrak{M}^{\sim}$ только тем, что $D = \{1, \top\}$ и тем, что является наименьшей матрицей, которая одновременно и паранепротиворечива, и параполна. Соответствующая паранормальная логика обозначается посредством $\mathbf{S}^4$ и аксиоматизируется следующим образом:

Система аксиом:

(A_4.1) Аксиомы **LPPL**.

(A_4.2) $(\alpha^{\bullet} \wedge \beta^{\circ}) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$.

(A_4.3) $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$.

MP единственное правило вывода.

Тем не менее имеется также *трехзначная* паранормальная логика, если мы вспомним, что класс бочваровых логик $\mathcal{B}$ сдержит еще одну логику, а именно с импликацией $\to_4$.

Рассмотрим матрицу

$\mathfrak{M}_{TK^1} = \langle\{0, 1/2, 1\}, \sim, \rightarrow_4, \{1\}\rangle$ (см. раздел 1.5).

Дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$ определяются следующим образом:

$A \vee B := \sim A \rightarrow_4 B$,

$A \wedge B := \sim (\sim A \vee \sim B)$.

Матричную логику, задаваемую этой матрицей назовем $\mathbf{TK}^1$. Легко проверить, что $\mathbf{TK}^1$ является трехзначной паранормальной логикой, т. е. она и паранепротиворечива (не верифицируется *закон Дунса Скота*) и параполна (не верифицируется *закон Клавия*), но в отличие от четырехзначной паранормальной логики $\mathbf{S}^4$ она не является максимальной паранормальной логикой, т. е. не является максимальным паранормальным фрагментом классической логики $\mathbf{C}_2$. Хотя в $\mathbf{TK}^1$ верифицируется контрапозиция, но, как уже отмечалось, не имеет места закон утверждения консеквента, закон Пирса и перестановка. Обычным образом используя таблицы истинности для доказательства независимости аксиом, можно показать, что добавление перестановки $(A \rightarrow_4 (B \rightarrow_4 C)) \rightarrow_4 (B \rightarrow_4 (A \rightarrow_4 C))$ в качестве тавтологии к $\mathbf{TK}^1$, не превращает $\mathbf{TK}^1$ в $\mathbf{C}_2$, поскольку закон утверждения консеквента $A \rightarrow_4 (B \rightarrow_4 A)$ остается независимым законом (см. [*Karpenko,* 2000a, p. 256, matrix 5]). Таким образом, имеется трехзначная паранормальная логика $\mathbf{TK}^1$, но она не максимальна. И тогда результат из [*Lewin, Mikenberg,* 2006, p. 487] о том, что матрица для литеральной паранормальной четырехзначной логики $\mathbf{S}_4$ наименьшая матрица, которая является одновременно и паранепротиворечивой и параполной остается в силе, но в том случае, если эта логика максимальна.

В результате, все три бочваровы импликации из класса $\mathcal{B}$ плюс отрицание $\sim$ задают следующие три паралогики: логику

$\mathbf{P}_2^1$ со связками $\{\sim, \supset^{\Diamond}\}$, которая паранепротиворечива, логику $\mathbf{I}_2^1$ со связками $\{\sim, \supset^{\Box}\}$, которая параполна, и логику $\mathbf{TK}^1$ со связками $\{\sim, \rightarrow_4\}$, которая и паранепротиворечива, и параполна, т. е. паранормальна. Наличие еще одной логики, а именно, ни паранепротиворечивой, ни параполной, позволило бы нам построить решетку, относительно обладания или не обладания одним из указанных парасвойств. И такая логика есть, но для этого надо обобщить понятие естественной импликации.

2.7. Сильная и слабая формулировки правила *modus ponens*

Условия, налагаемые на критерий быть естественной импликацией, можно обобщить как минимум в двух направлениях. Во-первых, не требовать, чтобы импликация $\rightarrow$ была **C**-расширяющей. Это сразу же ведет к появление новых классов логик и к решетке этих классов, где супремумом является класс, состоящий из логик, функционально эквивалентных трехзначной логике Поста $\mathbf{P}_3$ [*Post,* 1921]. Напомним, что эта логика является функционально полной. Конечно, для построения этой новой решетки не обойтись без соответствующей компьютерной программы.

Во-вторых, ослабить ограничение на то, что логическая матрица должна быть нормальной в смысле Лукасевича-Тарского [*Łukasiewicz, Tarski,* 1930, p. 134]. Это условие необходимо для того, чтобы правило modus ponens сохраняло выделенное значение.

В книге [*Rescher,* 1969, p. 70–71] Н. Решер обращает внимание читателя, что при исследованиях в области многозначных логик принципиально важно различать следующие две формулировки правила *modus ponens*:

(i) более сильное условие: *modus ponens* относительно сохранения выделенного значения;

(ii) более слабое условие: *modus ponens* относительно сохранения тавтологии.

Заметим, что первую формулировку мы находим в [*Łukasiewicz, Tarski,* 1930, p. 134], а вторую у А. Чёрча [*Чёрч,* 1960, с. 106].

Символические формулировки правила *modus ponens*, соответствующие (i) и (ii), представлены Н.Е. Томовой [*Девяткин, Преловский, Томова,* 2015, гл. 3] следующим образом:

(i) $\{A, A \to B\} \models_{\mathfrak{M}} B$ или

$\forall \mathfrak{M} \forall A \forall B \forall v[v(A) \in D \ \& \ v(A \to B) \in D \Rightarrow v(B) \in D]$;

(ii) $\models_{\mathfrak{M}} A, \ \models_{\mathfrak{M}} A \to B \ \Rightarrow \ \models_{\mathfrak{M}} B$ или

$\forall \mathfrak{M} \forall A \forall B[\forall v(v(A) \in D) \,\&\, \forall v(v(A \to B) \in D) \Rightarrow \forall v(v(B) \in D)]$.

В случае двузначной классической логики $\mathbf{C}_2$ обе формулировки имеют место. Очевидно, что для любой логической матрицы и для всякой связки импликации из (i) следует (ii). Обратное же в общем случае не имеет место, так, например, это в случае трехзначной логики.

В [*Девяткин, Преловский, Томова,* 2015] на примере трехзначной логики показывается, что различие между (i) и (ii) принципиально, и на этом основании были выделены *строго* естественные и *слабо* естественные импликации. Понятно, что если импликация является строго естественной, то она является и слабо естественной, но не наоборот. Также показано, что это приводит к появлению 18 матриц, в которых операция импликации удовлетворяет условиям (1)–(3), где условие (2) о нормальности логической матрицы заменяется на формулировку слабого *modus ponens*. В результате множество трехзначных логик, являющихся расширением $\mathbf{B}_0$ посредством слабо естественных импликаций, разбивается на десять непересекающихся классов, но самое интересное, класс бочваровых логик $\mathcal{B}$ пополняется еще одной логикой (назовем ее $\mathbf{TK}^2$), задаваемой матрицей

$$\mathfrak{M} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \sim, \cap, \cup, \rightarrow_{29}, \{1\} \rangle,$$

где импликация $\rightarrow_{29}$ определяется следующей таблицей:

$\rightarrow_{29}$	1	1/2	0
1	1	1	0
1/2	1	1	1
0	1	1	1

Утверждение 1. Расширение $\mathbf{B}_0$ посредством $\rightarrow_{29}$ есть $\mathbf{B}_3$.

Покажем, что множество связок $\{\sim, \cap, \cup, \rightarrow_{29}\}$ и $\{\sim, \cap, \vdash\}$ функционально эквивалентны. С одной стороны, известно, что множество всех внешних функций[11] включено в класс функций логики Бочвара [*Финн,* 1974b]. И очевидно, что $\rightarrow_{29}$ принадлежит к классу внешних функций.

С другой стороны, посредством $\{\sim, \cap, \cup, \rightarrow_{29}\}$ выразить $\vdash$ можно следующим образом:

$$\vdash x := \sim (x \rightarrow_{29} \sim x).$$

Свойства импликации $\rightarrow_{29}$ в некотором смысле дуальны по отношению к $\rightarrow_4$, поскольку матрица для $\rightarrow_{29}$ в отличие от матрицы для $\rightarrow_4$ верифицирует закон утверждения консеквента, закон Пирса и перестановку.

Кроме этого появляются недостающие напарники: $\rightarrow_{5'}$, $\rightarrow_{7'}$ и $\rightarrow_{29'}$, т. е. таблицы для $\rightarrow_{5'}$ и $\rightarrow_{29'}$ с двумя выделенными значениями и таблица для $\rightarrow_{7'}$ с одним выделенным значением.

[11] Функция f называется внешней, если для любого набора истинностных значений $v_1 \ldots, v_n$ $f(v_1 \ldots, v_n) = 0$ или $f(v_1 \ldots, v_n) = 1$.

В итоге мы имеем 8 бочваровых импликаций, которые разбиваются на четыре класса, в каждом из которых одна из импликаций со своим напарником. Теперь мы можем эти классы решеточно упорядочить относительно свойства modus ponens *строгий/слабый* и числа выделенных значений $\{1\}/\{1, {}^1\!/_2\}$. При этом учитывается, что всякая строгая естественная импликация является также слабой естественной импликацией . В результате получаем следующую четырехэлементную булеву решетку (ср. с [*Карпенко,* 2015, р. 27]):

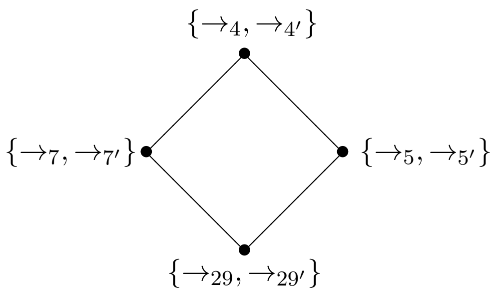

Рис. 4. Четырехэлементная Булева решетка классов бочваровых импликаций

Здесь в качестве нуля решетки выступает класс *слабых* бочваровых импликаций независимо от выбора D. Затем этот класс, с одной стороны, расширяется свойством быть строгой бочваровой импликацией на $D = \{1, {}^1\!/_2\}$, а с другой стороны, свойством быть строгой бочваровой импликацией на $D = \{1\}$. Единицей решетки выступает класс *строгих* бочваровых импликаций независимо от выбора D.

Обратим внимание на то, что не каждая импликация имеет напарника. Например, из 16 различных импликаций для Ł_3 только 3 импликации имеют напарников (см. таблицу в [*Томова,* 2015, с. 124]).

2.8. Решетка трехзначных паралогик

Логику, задаваемую матрицей

$$\mathfrak{M}_{TK^2} = \langle \{0, 1/2, 1\}, \sim, \to_{29}, \{1, 1/2\} \rangle$$

обозначим посредством $\mathbf{TK}^2$.

Конъюнкция $\wedge$ и дизъюнкция $\vee$ определяются следующим образом:

$$A \vee B := \sim A \to_{29} B,$$

$$A \wedge B := \sim (\sim A \vee \sim B).$$

Легко проверить, что закон Дунса Скота и закон Клавия

$$A \to_{29} (\sim A \to_{29} B) \text{ и } (\sim A \to_{29} A) \to_{29} A$$

верифицируемы здесь, т. е. логика $\mathbf{TK}^2$ ни паранепротиворечива, ни параполна. В результате мы можем построить решетку паралогик (обозначим ее посредством $\mathcal{TK}$) относительно парасвойств, которая приведена на рис. 5.

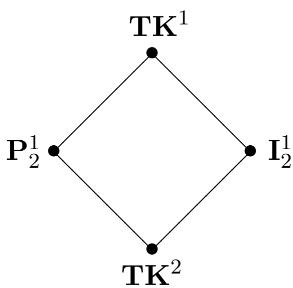

Рис. 5. Решетка $\mathcal{TK}$

В качестве нуля решетки выступает логика $\mathbf{TK}^2$, которая ни паранепротиворечива, ни параполна. Затем, с одной стороны, это свойство расширяется свойством паранепротиворечивости, а с другой стороны, свойством параполноты. В качестве единицы решетки выступает логика $\mathbf{TK}^1$, которая и паранепротиворечива, и параполна.

Теорема 1. *Логики* $\mathbf{P}^1_2$, $\mathbf{I}^1_2$, $\mathbf{TK}^1$ *и* $\mathbf{TK}^2$ *попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик $\mathbf{P}^1_2$ и $\mathbf{I}^1_2$, т. е. систем со связками $\{\sim, \to_7\}$ и $\{\sim, \to_5\}$, где $\to_7$ есть $\supset^{\Diamond}$ и $\to_5$ есть $\supset^{\Box}$ — следует из определений

(1) $A \to_5 B := \sim B \to_7 \sim A$,

(2) $A \to_7 B := \sim B \to_5 \sim A$.

Функциональная эквивалентность логик $\mathbf{I}^1_2$ и $\mathbf{TK}^2$, т. е. систем со связками $\{\sim, \to_5\}$ и $\{\sim, \to_{29}\}$, следует из определений

(3) $A \to_5 B := A \to_{29} \sim (B \to_{29} \sim A)$,

(4) $A \to_{29} B := \sim (A \to_5 B) \to_5 (\sim B \to_5 \sim A)$.

Из определений (1), (2), (3) и (4), а также в силу транзитивности отношения функциональной эквивалентности следует, что и логики $\mathbf{TK}^2$ и $\mathbf{P}^1_2$ функционально эквивалентны.

Далее для доказательства теоремы достаточно доказать функциональную эквивалентность логик $\mathbf{P}^1_2$ и $\mathbf{TK}^1$, т. е. систем со связками $\{\sim, \to_7\}$ и $\{\sim, \to_4\}$. Это следует из определений

(5) $A \to_7 B := \sim (A \to_4 B) \to_4 \sim (B \to_4 \sim A)$,

(6) $A \to_4 B := \sim ((\sim B \to_7 \sim A) \to_7 \sim (A \to_7 B))$.

Из определений (1), (2), (5) и (6), а также в силу транзитивности отношения функциональной эквивалентности следует, что и логики $\mathbf{TK}^2$ и $\mathbf{I}^1_2$ функционально эквивалентны. Теорема доказана. $\Box$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{B}_1^{\sim}$ *есть класс всех внешних формул трехзначной логики Бочвара* $\mathbf{B}_3$*, задаваемый стрелкой Пирса* γ *(см. раздел 1.4) и пополненный связкой* $\sim$*. Тогда логика* $\mathbf{I}_2^1$ *со связками* $\{\sim, \to_5\}$ *и логика* $\mathbf{B}_1^{\sim}$ *со связками* $\{\sim, \gamma\}$ *функционально эквивалентны.*

Доказательство.

(1) Очевидно, связка $\to_5$ определима посредством стрелки Пирса γ,

(2) $\rceil A := \sim(\sim A \to_5 A)$,

(3) $\lceil A := A \to_5 \sim A$,

(4) $A \cup^{\square} B := \lceil A \to_5 B$,

(5) $A \cap^{\square} B := \lceil(A \to_5 \lceil B)$,

(6) $A \equiv^{\square} B := (\rceil A \cap^{\square} \lceil B) \cup^{\square} (\lceil A \cap^{\square} \rceil B)$ (Sh).

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Логики $\mathbf{P}_2^1$, $\mathbf{I}_2^1$, $\mathbf{TK}^1$ и $\mathbf{TK}^2$ функционально эквивалентны $\mathbf{B}_1^{\sim}$.

Следствие 2. Логики $\mathbf{P}_2^1$, $\mathbf{I}_2^1$, $\mathbf{TK}^1$ и $\mathbf{TK}^2$ аксиоматизируемы методом Аншакова-Рычкова как расширение $\mathbf{C}_2$. См. конец раздела 2.5 об аксиоматизируемости $\mathbf{I}^1$.

В заключение заметим, что из теоремы В.К. Финна [*Финн,* 1974b] о критерии функциональной полноты класса функций B_3 следует, что класс $B_3^{\sim}$ функционально предполон в B_3 (в списке предполных классов B_3 он рассматривается в пункте 8). Последнее означает, что выделен класс функций $B_1^{\sim}$, который является *минимальным* для порождения решетки $\mathcal{TK}$.

Глава 3.

ОБОБЩЕНИЯ И ИЕРАРХИИ ЛИТЕРАЛЬНЫХ ПАРАЛОГИК

А. Сетте и В. Карниелли в работе [*Sette, Carnielli,* 1995] указывают на возможность построения различных иерархий конечнозначных паранепротиворечивых и параполных логик и в этой же работе предлагают многозначные обобщения логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, которые они обозначают как $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{I}^n$. Здесь же они приводят четырехзначные таблицы для $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{I}^2$. Далее мы приведем существующие в литературе обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

В. Фернандес в диссертации [*Fernández,* 2001] строит гильбертовские аксиоматизации иерархий логик $(\mathbf{P}^n)_{n\in\omega}$ и $(\mathbf{I}^n)_{n\in\omega}$, а также вводит и аксиоматизирует иерархию паранормальных логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$, т. е. логик, которые являются одновременно и паранепротиворечивыми, и параполными. Отметим также статью [*Fernández, Coniglio,* 2003], основная задача которой представить несколько обобщений *семантики объединения* (*society semantics*), которая разработана В. Карниелли и М. Лима-Маркесом в [*Carnielli, Lima-Marques,* 1999][1]. Переформулировав семантику объединения в более широком контексте, авторы подробно разрабатывают два примера применения нового

[1]В. Карниелли и М. Лима-Маркес продемонстрировали, что $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ могут быть представлены в терминах семантики объединения (оценок), т. е. семантики, в которой между некоторыми агентами, рассуждения каждого из которых описываются классической логикой, взаимодействие происходит так, что оно описывается неклассической логикой. Здесь также рассмотрены четырехзначные исчисления $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{I}^2$ как обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

формализма, один характеризует иерархию паранепротиворечивых логик $(\mathbf{P}^n)_{n\in\omega}$, другой — иерархию параполных логик $(\mathbf{I}^n)_{n\in\omega}$. Они также предлагают еще три обобщения, разрабатывая семантику объединения для нескольких многозначных логик, включая иерархию паранормальных логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$.

В этой же работе показано, как можно получить логику Бочвара $\mathbf{B}_3$ из объединения классических оценок (ibid., p. 18). Однако заметим, что здесь в качестве $\mathbf{B}_3$ выступает всего лишь фрагмент $\mathbf{B}_3$, а именно внутренние связки, т. е. $\mathbf{B}_0$. На самом деле, как мы теперь знаем, $\mathbf{B}_3$ есть $\mathbf{P}^1 \cup \mathbf{B}_0$ (или $\mathbf{I}^1 \cup \mathbf{B}_0$)[2]. Тогда интересно было бы, начиная с $\mathbf{B}_0$ построить обобщенную семантику объединения для всех расширений $\mathbf{B}_0$ (рассмотренных в [*Томова,* 2012] и [*Девяткин, Преловский, Томова,* 2015]) вплоть до трехзначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_3$, которая, заметим, также рассматривается в [*Fernández, Coniglio,* 2003].

Обратим внимание на фундаментальную работу [*Brunner, Carnielli,* 2005], цель которой помочь прояснить некоторые вопросы относительно двойственности между интуиционистской и паранепротиворечивой установками мышления. Авторы выделили общее понятие *дуальной логической системы* и процедуры дуализации, которая применима к широкому классу логик. Было показано, что дуальными к интуиционистским логикам всегда являются паранепротиворечивые логики. Дуализируя иерархию параполных (или максимально слабо интуиционистских) многозначных логик $(\mathbf{I}^n)_{n\in\omega}$, они показывают, что анти-интуиционистская иерархия $(\mathbf{I}^n*)_{n\in\omega}$, полученная из $(\mathbf{I}^n)_{n\in\omega}$ *совпадает* с иерархией многозначных паранепротиворечивых логик $(\mathbf{P}^n)_{n\in\omega}$. Также была рассмотрена самодуальность иерерхии логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$.

---

[2] В данном случае имеем в виду, что множество связок $\mathbf{B}_3$ есть объединение множества связок $\mathbf{P}^1$ и фрагмента $\mathbf{B}_3$, содержащего только внутренние связки (или множества связок $\mathbf{I}^1$ и фрагмента $\mathbf{B}_3$, содержащего только внутренние связки).

Наконец, обратим внимание на ряд работ В.М. Попова [*Попов,* 1989; *Попов,* 2006; *Попов,* 2007; *Попов,* 2008; *Попов,* 2010; *Попов,* 2013; *Попов,* 2016], где определяются бесконечные строго убывающие по включению последовательности паралогик, получивших название *простых* паралогик. В простых паралогиках парасвойства имеют место на уровне т. н. квазиэлементарных формул — формул, которые не содержат бинарных логических связок. Подробно подход В.М. Попова будет рассмотрен в разделе 3.3.

Таким образом, в литературе достаточно широко представлены различные иерархии и обобщения паранепротиворечивых, параполных и паранормальных логик.

Итак, напомним, в рамках нашего исследования мы указали, что существует три подхода к конструированию специального класса паралогик, который следуя Р. Левину и И. Микенберг будем называть *литеральными* паралогиками:

(1) Комбинирование *изоморфов* классической логики $\mathbf{C}_2$.

(2) Построение *литеральных* параматриц.

(3) Введение понятия *квазиэлементарной* формулы.

Далее в рамках вышеуказанных подходов рассмотрим вопрос обобщения литеральных паралогик, в частности более подробно нами будут рассмотрены их четырехзначные обобщения.

3.1. Метод построения паралогик посредством комбинирования изоморфов классической логики $\mathbf{C}_2$

Рассмотрим матрицу для четырехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_4$ [*Бочвар, Финн,* 1972, с. 289]:

$\mathfrak{M}_4^B = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \sim, \cap, \cup, J_0, J_{1/3}, J_{2/3}, J_1, \{1\} \rangle$, где $\sim x =$

$1 - x$, а J-операторы и связки $\cap$ и $\cup$ задаются следующими таблицами (см. [*Бочвар, Финн,* 1972, с. 294]):

x	$J_0(x)$	$J_{1/3}(x)$	$J_{2/3}(x)$	$J_1(x)$
1	0	0	0	1
$2/3$	0	0	1	0
$1/3$	0	1	0	0
0	1	0	0	0

$\cap$	1	$2/3$	$1/3$	0
1	1	$2/3$	$1/3$	0
$2/3$	$2/3$	$2/3$	$1/3$	$1/3$
$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$
0	0	$1/3$	$1/3$	0

$\cup$	1	$2/3$	$1/3$	0
1	1	$2/3$	$2/3$	1
$2/3$	$2/3$	$2/3$	$2/3$	$2/3$
$1/3$	$2/3$	$2/3$	$1/3$	$1/3$
0	1	$2/3$	$1/3$	0

Напомним, что на трехзначном случае у нас имелось только две функции перевода: $\Box$ и $\Diamond$. Первая переводила истинностное значение $1/2$ в 0, а вторая — в 1. На четырехзначном случае мы имеем четыре функции перевода: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$. Они имеют следующие свойства:

(1) $f_1(x)$ есть $J_1(x)$ и переводит $2/3$ и $1/3$ в 0;

(2) $f_2(x)$ есть $\sim J_0(x)$ и переводит $2/3$ и $1/3$ в 1;

(3) $f_3(x)$ есть $J_1(x) \cup J_{2/3}(x)$ и переводит $2/3$ в 1 и $1/3$ в 0;

(4) $f_4(x)$ есть $J_1(x) \cup J_{1/3}(x)$ и переводит $2/3$ в 0 и $1/3$ в 1.

Теперь, используя функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$, аналогично тому, как это делалось средствами $\mathbf{B}_3$, получаем четыре внешних импликации и четыре внешних отрицания: $\rightarrow_1$, $\rightarrow_2$, $\rightarrow_3$, $\rightarrow_4$ и $\neg_1$, $\neg_2$, $\neg_3$, $\neg_4$.

Таблицы для них следующие:

x	$\neg_1 x$	$\neg_2 x$	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$
1	0	0	0	0
$^2/_3$	1	0	0	1
$^1/_3$	1	0	1	0
0	1	1	1	1

$\to_1$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	0
1	1	0	0	0
$^2/_3$	1	1	1	1
$^1/_3$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_2$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	0
1	1	1	1	0
$^2/_3$	1	1	1	0
$^1/_3$	1	1	1	0
0	1	1	1	1

$\to_3$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	0
1	1	1	0	0
$^2/_3$	1	1	0	0
$^1/_3$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_4$	1	$^2/_3$	$^1/_3$	0
1	1	0	1	0
$^2/_3$	1	1	1	1
$^1/_3$	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Итак, приведем логические матрицы, соответствующие четырехзначным изоморфам классической логики $\mathbf{C}_2$:

$\mathfrak{M}_1 = \langle \{0, {}^1/_3, {}^2/_3, 1\}, \neg_1, \to_1, \{1\} \rangle,$

$\mathfrak{M}_2 = \langle \{0, {}^1/_3, {}^2/_3, 1\}, \neg_2, \to_2, \{1, {}^2/_3, {}^1/_3\} \rangle,$

$\mathfrak{M}_3 = \langle \{0, {}^1/_3, {}^2/_3, 1\}, \neg_3, \to_3, \{1, {}^2/_3\} \rangle,$

$\mathfrak{M}_4 = \langle \{0, {}^1/_3, {}^2/_3, 1\}, \neg_4, \to_4, \{1, {}^1/_3\} \rangle.$

Обратим внимание, что в вышеприведенных матрицах класс выделенных значений D зависит от того, какие значения функции перевода $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ сопоставляют промежуточным значениям. Так, например, если $f_2(x)$ переводит $^2/_3$ и $^1/_3$ в 1, то соответственно $^2/_3$ и $^1/_3$ добавляются в D. Ниже подробно остановимся на вопросе о связи выбора класса выделенных значений в матрице с парасвойствами соответствующей логики.

Далее, применив метод комбинирования изоморфов классической логики $\mathbf{C}_2$, мы можем получить класс четырехзначных литеральных паралогик. Этот класс состоит из 16 логик. Рассмотрим и проанализируем этот класс с точки зрения парасвойств логик, входящих в него.

Напомним, что в паранепротиворечивых системах не верифицируется закон Дунса Скота $A \to (\neg A \to B)$ (*ЗДС*), в паранолных — не верифицируется закон Клавия $(\neg A \to A) \to A$ (*ЗК*), в паранормальных не верифицируются оба закона, логики, в которых верифицируются оба закона не являются ни паранепротиворечивыми, ни параполными. Тогда можно построить следующую таблицу наборов матричных операций и указать, какими парасвойствами будут обладать те или иные матрицы в зависимости от сочетания операций. Символом «+» обозначим факт верификации закона, и соответственно «−» — если закон не верифицируется в соответствующей матрице.

Таблица 1

	$\neg_1$		$\neg_2$		$\neg_3$		$\neg_4$	
	ЗДС	*ЗК*	*ЗДС*	*ЗК*	*ЗДС*	*ЗК*	*ЗДС*	*ЗК*
$\to_1$	+	+	+	−	+	−	+	−
$\to_2$	−	+	+	+	−	+	−	+
$\to_3$	−	+	+	−	+	+	−	−
$\to_4$	−	+	+	−	−	−	+	+

«$-+$» — логика с соответствующими операциями паранепротиворечива,

«$+-$» — логика с соответствующими операциями параполна,

«$--$» — логика с соответствующими операциями паранормальна,

«$++$» — логика с соответствующими операциями не является ни паранепротиворечивой, ни параполной.

В результате получили, что в рассматриваемом классе литеральных паралогик 5 логик являются *паранепротиворечивыми*, они имеют следующие логические матрицы:

$\mathfrak{M}_5 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_1, \to_2, \{1, 2/3, 1/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_6 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_3, \to_2, \{1, 2/3, 1/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_7 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_2, \{1, 2/3, 1/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_8 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_1, \to_3, \{1, 2/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_9 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_1, \to_4, \{1, 1/3\}\rangle.$

Далее, 5 логик являются *параполными* и имеют следующие логические матрицы:

$\mathfrak{M}_{10} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_2, \to_1, \{1\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_{11} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_3, \to_1, \{1\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_{12} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_1, \{1\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_{13} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_2, \to_3, \{1, 2/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_{14} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_2, \to_4, \{1, 1/3\}\rangle.$

Далее 2 логики, являющиеся *паранормальными*, задаются следующими матрицами:

$\mathfrak{M}_{15} = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_3, \{1, 2/3\}\rangle,$

$\mathfrak{M}_{16} = \langle \{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_3, \to_4, \{1, {}^1\!/\!{}_3\} \rangle$.

Также имеем 4 логики, которые не являются ни паранепротиворечивыми, ни параполными. Это и есть сами четырехзначные изоморфы классической логики $\mathbf{C}_2$. Соответствующие им матрицы приведены на странице 68.

Заметим, что, если мы рассматриваем логику как класс тавтологий, то при указанных комбинациях матричных операций не важно, какой класс выделенных значений мы задаем, поскольку операции таковы, что задаются внешними функциями (см. определение в сноске на стр. 27). Однако если мы будем рассматривать логику в качестве семантической дедуктивной системы нам важно, что бы в случае паранепротиворечивой логики соответствующее отношение логического следования не было эксплозивным, в случае параполной логики — не было имплозивным и т. д. И в этой ситуации важную роль играет выбор множества выделенных значений, что напрямую влияет на свойства отрицания.

Из приведенной выше таблицы 1, а также матриц $\mathfrak{M}_5$ – $\mathfrak{M}_{16}$ наглядно видны парасвойства некоторых операций. Так, например, отрицание $\neg_1$ является паранепротиворечивым в том смысле, что, если классическое отрицание формирует противоречие, то отрицание $\neg_1$ таковым не является, то есть формулы A и $\neg_1 A$ могут быть одновременно истинными, при этом запрещается (по возможности) ситуация, когда A и $\neg_1 A$ будут одновременно ложными. Это напрямую обусловлено выбором класса выделенных значений D.

Отрицание $\neg_2$ в этом смысле обладает свойством параполноты. В этом случае формулы A и $\neg_2 A$ могут быть одновременно ложными, но при этом запрещается (по возможности) ситуация, когда A и $\neg_2 A$ будут одновременно истинными. Опять же это зависит от выбора класса D.

Обратим внимание, что матрица $\mathfrak{M}_{15}$ только с одним выделенным значением $D = \{1\}$ совпадает с матрицей для логики **V** [*Puga, Da Costa,* 1988] и логики $\mathbf{I}_0$ [*Popov,* 1999] (см. ранее раздел 2.6.2)[3].

3.1.1. Решетки четырехзначных паралогик

В случае трехзначных логик нами была построена единственная решетка паралогик относительно парасвойств (см. раздел 2.8). При этом была доказана теорема о функциональной эквивалентности паралогик, составляющих эту решетку (см. теорему 1 на стр. 61).

В случае четырехзначных логик ситуация иная.

В этом разделе сначала рассмотрим решетки паралогик относительно парасвойств, далее исследуем функциональные свойства базовых операций матриц, соответствующих интересующим нас паралогикам (четырехзначным паралогикам, полученным по методу комбинирования изоморфов), в результате будет приведена интересная полурешетка паралогик относительно функционального вложения одной логики в другую[4].

Итак, учитывая, что мы имеем 5 паранепротиворечивых, 5 параполных, 2 паранормальные логики, а также 4 изоморфа классической логики (т. е. 4 логики, которые не обладают свойством ни паранепротиворечивости, ни параполноты), арифметически можем подсчитать, что возможно построить 200 решеток относительно парасвойств.

[3] Операции $\vee$ и $\wedge$ определяются посредством исходных стандартным образом.

[4] Еще раз заметим, что, говоря о функциональной эквивалентности, функциональном вложении литеральных паралогик, будем иметь ввиду отношения между множествами базовых функций соответствующих логических матриц.

Остановимся на наиболее интересных случаях. Так, логики, имеющие матрицы $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_8$, $\mathfrak{M}_{13}$ и $\mathfrak{M}_{15}$ образуют следующую решетку $\mathcal{P}1$ относительно парасвойств[5]:

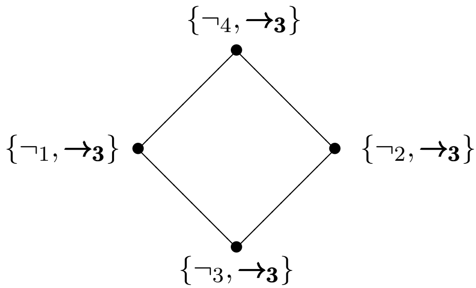

Рис. 6. Решетка $\mathcal{P}1$

Обратим внимание, что единственное различие логик, образующих эту решетку, в отрицаниях. При этом заметим, что во всех матрицах, соответствующих этим паралогикам, в качестве множества выделенных значений берется $D = \{1, {}^2\!/_3\}$.

Аналогичная решетка получается, если рассмотрим логики, матрицы которых суть $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{M}_9$, $\mathfrak{M}_{14}$ и $\mathfrak{M}_{16}$. Они образуют решетку $\mathcal{P}2$, представленную на рис. 7.

Снова обратим внимание на то, что единственное различие логик, образующих эту решетку, в разных отрицаниях. При этом во всех матрицах, соответствующих этим паралогикам, в качестве множества выделенных значений берется $D = \{1, {}^1\!/_3\}$.

Заметим, отрицания $\neg_3$ и $\neg_4$ в зависимости от выбора класса выделенных значений в соответствующих матрицах могут быть или паранормальными, или таковыми не являться.

[5]Для удобства и наглядности в качестве элементов решетки будем указывать множества базовых операций соответствующих логических матриц.

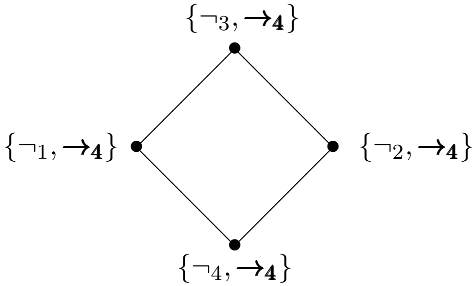

Рис. 7. Решетка $\mathcal{P}2$

Рассмотрим 2 другие решетки паралогик относительно парасвойств. Решетка $\mathcal{P}3$ включает в себя паралогики, которые задаются матрицами $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_{11}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ (см. рис. 8).

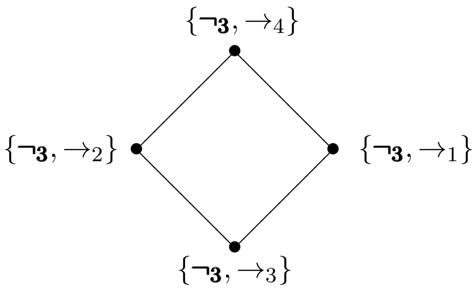

Рис. 8. Решетка $\mathcal{P}3$

Решетка $\mathcal{P}4$ включает в себя паралогики, которые задаются матрицами $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{M}_7$, $\mathfrak{M}_{12}$ и $\mathfrak{M}_{15}$ (см. рис. 9).

Заметим, что как в решетке $\mathcal{P}3$, так и в решетке $\mathcal{P}4$, в четырех паралогиках, составляющих решетку, матричным операциям отрицания соответствует одна и та же функция. Здесь на-

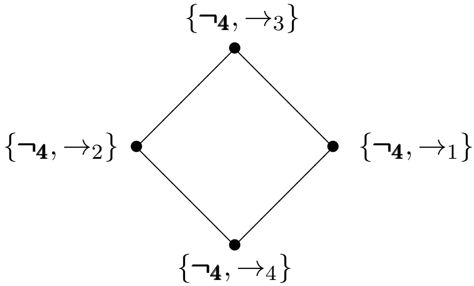

Рис. 9. Решетка $\mathcal{P}4$

глядно видно, что парасвойства отрицаниям обеспечивает варьирование класса выделенных значений D.

Обратим внимание, что во всех пяти паранепротиворечивых логиках рассматриваемого нами класса, то есть логиках, имеющих матрицы $\mathfrak{M}_5$, $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$, $\mathfrak{M}_8$ и $\mathfrak{M}_9$, хотя и не верифицируется закон Дунса Скота, но верифицируется формула Лукасевича:

$$p \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)),$$

то есть хотя из противоречия не следует все что угодно, но имея противоречивую тройку посылок p, $\neg p$ и $\neg\neg p$ можем вывести все что угодно. Заметим, что подобным свойством обладает также трехзначная паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$.

Другой интересный вопрос относительно рассматриваемого нами класса литеральных паралогик, представляет вопрос об их соотношении с точки зрения классов тавтологий. На данном этапе исследования можно выдвинуть гипотезу о том, что по классу тавтологий, все 16 систем распределяются по четырем классам:

(1) класс эквивалентных по тавтологиям паранепротиворечивых логик (матрицы $\mathfrak{M}_5$, $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$, $\mathfrak{M}_8$ и $\mathfrak{M}_9$);

(2) класс эквивалентных по тавтологиям параполных логик (матрицы $\mathfrak{M}_{10}$, $\mathfrak{M}_{11}$, $\mathfrak{M}_{12}$, $\mathfrak{M}_{13}$ и $\mathfrak{M}_{14}$);

(3) класс эквивалентных по тавтологиям паранормальных логик (матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$);

(4) класс эквивалентных по тавтологиям логик, не являющихся ни паранепротиворечивыми, ни параполными (матрицы $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$) — это положение доказательства не требует, т. к. указанные системы являются изоморфами $\mathbf{C}_2$.

Особый интерес представляет изучение функциональных свойств рассматриваемого нами класса паралогик.

А. Непейводой была написана программа на языке Рефал, использующая алгоритм суперкомпиляции (в частности, описанный в [*Немытых,* 2007]) и вычисляющая функциональные свойства (функциональную эквивалентность/функциональное вложение) класса четырехзначных паралогик, полученных по методу комбинирования изоморфов классической логики. В результате обработки данных программы, установлено, что паралогики образуют верхнюю полурешетку по отношению функционального вложения одной логики в другую (см. рис. 10).

Обратим внимание, что все элементы нижнего ряда полурешетки представляют собой множества функций, соответствующих базовым операциям матриц изоморфов классической логики (матрицы $\mathfrak{M}_1$–$\mathfrak{M}_4$)[6]. В среднем ряду расположено пять элементов, каждый из которых представляет собой класс, состоящий из двух эквивалентных множеств функций, при этом одно множество функций соответствует паранепротиворечивой логике, другое — параполной. Супремумом полурешетки является класс из двух эквивалентных множеств функций, соответствующих параномальным логикам, определяемым матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$.

[6]Для удобства, говоря о множестве базовых операций соответствующих матриц, будем использовать более общее понятие функции.

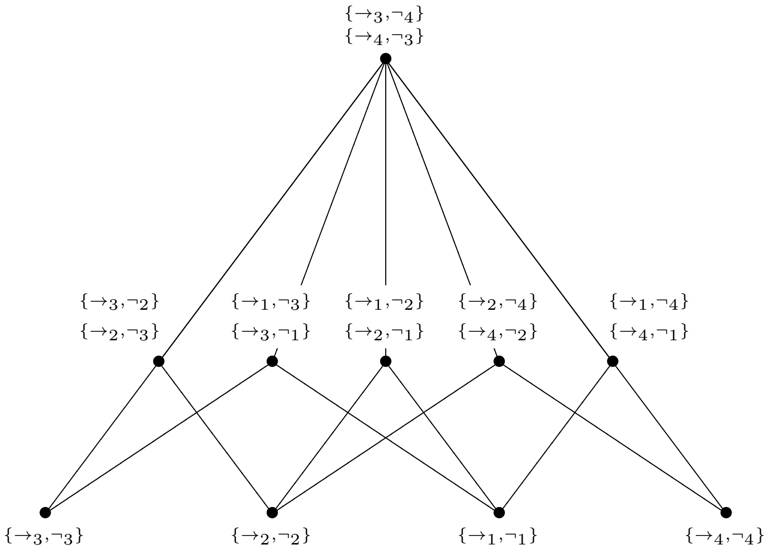

Рис. 10. Полурешетка четырехзначных паралогик

Приведенная структура действительно является верхней полурешеткой, поскольку для любой пары ее элементов существует супремум[7]. В некоторых случаях это наглядно видно по построению полурешетки[8], в других — требует доказательства.

Утверждение. Функции из множества $\{\to_3, \neg_4\}$ определимы посредством множеств функций

(1) $\{\to_3, \neg_2\}$ и $\{\to_1, \neg_3\}$;

---

[7]Частично-упорядоченное множество $(SL, \leq)$ называется верхней полурешеткой, если для любой пары элементов множества $x, y \in SL$ существует супремум $x \cup y$.

[8]Так, например, очевидно, что функции из множества $\{\to_3, \neg_4\}$ определимы посредством функций из двух множеств $\{\to_3, \neg_3\}$ и $\{\to_4, \neg_4\}$.

(2) $\{\rightarrow_1, \neg_3\}$ и $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$;

(3) $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$ и $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$;

(4) $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$ и $\{\rightarrow_1, \neg_4\}$.

Доказательство.
Для доказательства (1) достаточно показать, что посредством множеств функций $\{\rightarrow_3, \neg_2\}$ и $\{\rightarrow_1, \neg_3\}$ можно определить $\neg_4$. Посредством $\{\rightarrow_3, \neg_2\}$ определима функция $\wedge_3$:

$$x \wedge_3 y := \neg_2(x \rightarrow_3 \neg_2 y).$$

Далее, учитывая, что множества функций $\{\rightarrow_1, \neg_3\}$ и $\{\rightarrow_3, \neg_1\}$ функционально эквивалентны (факт 1), имеем:

$$\neg_4 x := (\neg_3 x \rightarrow_3 \neg_2 x) \wedge_3 (x \rightarrow_3 \neg_1 x).$$

Для доказательства (2) достаточно показать, что посредством множеств функций $\{\rightarrow_1, \neg_3\}$ и $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$ можно определить $\rightarrow_3$ и $\neg_4$. Поскольку имеет место факт 1, очевидно, что импликация $\rightarrow_3$ определима. Остается выразить $\neg_4$. Последнее можно сделать аналогично тому, как это мы сделали при доказательстве пункта (1).

Для доказательства (3) достаточно показать, что посредством множеств функций $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$ и $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$ можно определить $\rightarrow_4$ и $\neg_3$. Поскольку множества функций $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$ и $\{\rightarrow_4, \neg_2\}$ функционально эквивалентны (факт 2), очевидно, что импликация $\rightarrow_4$ определима. Остается выразить $\neg_3$. Учитывая, что посредством $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$ определима функция $\wedge_1$:

$$x \wedge_1 y := \neg_2(x \rightarrow_1 \neg_2 y),$$

а также то, что множества функций $\{\rightarrow_1, \neg_2\}$ и $\{\rightarrow_2, \neg_1\}$ функционально эквивалентны, имеем:

$$\neg_3 x := (\neg_4 x \rightarrow_1 \neg_2 x) \wedge_1 \neg_1 x.$$

Для доказательства (4) достаточно показать, что посредством множеств функций $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$ и $\{\rightarrow_1, \neg_4\}$ можно определить $\rightarrow_4$

и $\neg_3$. Поскольку имеет место факт 2, очевидно, что $\rightarrow_4$ определима. Остается выразить $\neg_3$. Учитывая, что посредством $\{\rightarrow_2, \neg_4\}$ определима функция $\wedge_2$:

$$x \wedge_2 y := \neg_4(x \rightarrow_2 \neg_4 y),$$

а также факт 2 и то, что множества функций $\{\rightarrow_1, \neg_4\}$ и $\{\rightarrow_4, \neg_1\}$ функционально эквивалентны, имеем:

$$\neg_3 x := (\neg_4 x \rightarrow_2 \neg_2 x) \wedge_2 \neg_1 x. \qquad \square$$

Рассмотрим свойства класса функций $\{\rightarrow_3, \neg_4\}$, являющегося супремумом полурешетки. Во-первых, посредством функций данного множества возможно определить **C**-расширяющие $\vee$ и $\wedge$. Это можно сделать стандартным образом:

$$x \vee y := \neg_4 x \rightarrow_3 y,$$

$$x \wedge y := \neg_4(x \rightarrow_3 \neg_4 y).$$

Во-вторых, учитывая, что множества функций $\{\rightarrow_3, \neg_4\}$ и $\{\rightarrow_4, \neg_3\}$ функционально эквивалентны, можем определить все четырехзначные J-операторы:

$$J_0(x) := \neg_4(\neg_4 x \rightarrow_3 x),$$

$$J_1(x) := \neg_3(x \rightarrow_4 \neg_3 x),$$

$$J_{2/3}(x) := \neg_3(\neg_4 x \rightarrow_3 \neg_3 x),$$

$$J_{1/3}(x) := \neg_3(\neg_3 x \rightarrow_3 \neg_4 x).$$

Таким образом, посредством суперпозиции функций из множества $\{\rightarrow_3, \neg_4\}$ возможно построить совершенную дизъюнктивную J-нормальную форму четырехзначной внешней функции, аналогично тому, как это было сделано В.К. Финном в случае трехзначных внешних функций [*Финн,* 1974a, с. 399].

Множество всех суперпозиций функций, соответствующих исходным связкам четырехзначной логики Бочвара $\mathbf{B}_4$ (матрицу для $\mathbf{B}_4$ см. на стр. 65), обозначим посредством $\mathfrak{B}^{(4)}$.

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема. *Всякая внешняя функция $F(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathfrak{B}^{(4)}$, тождественно не равная 0, представима единственным образом в виде совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы.*

Таким образом, супремуму полурешетки, представленной на рис. 10, соответствует класс всех внешних четырехзначных функций.

Кроме того, построенная полурешетка позволяет наглядно представить метод получения литеральных паралогик посредством комбинирования изоморфов. Более того видим, что верхняя полурешетка паралогик относительно функционального вложения содержит в себе целый класс решеток литеральных паралогик относительно парасвойств. Так, ранее приведенные нами решетки $\mathcal{P}1$–$\mathcal{P}4$ как раз и являются представителями этого класса. Интересно отметить, что, если относительно обладания парасвойствами решетки $\mathcal{P}1$ и $\mathcal{P}3$ отличны друг от друга, то с учетом того, что множества функций $\{\to_4, \neg_3\}$ и $\{\to_3, \neg_4\}$, $\{\to_3, \neg_2\}$ и $\{\to_2, \neg_3\}$, $\{\to_1, \neg_3\}$ и $\{\to_3, \neg_1\}$ попарно функционально эквивалентны, то решетки $\mathcal{P}1$ и $\mathcal{P}3$ схлопываются. Такая же ситуация имеет место касательно решеток $\mathcal{P}2$ и $\mathcal{P}4$.

3.2. Метод построения паралогик посредством литеральных параматриц

Используя метод построения LPP-матриц Левина-Микенберг [*Lewin, Mikenberg,* 2006], мы получим более обширный класс литеральных паралогик, поскольку здесь также появляются отрицания с промежуточными истинностными значениями, в то время как при предыдущем походе (комбинирование изоморфов) мы ограничиваемся только внешними связками $\mathbf{B}_4$.

Приведем таблицы, определяющие остальные (кроме четырех таблиц, ранее приведенных на стр. 67) возможные отрицания:

x	$\neg_5 x$	$\neg_6 x$	$\neg_7 x$	$\neg_8 x$	$\neg_9 x$	$\neg_{10} x$	$\neg_{11} x$	$\neg_{12} x$	$\neg_{13} x$	$\neg_{14} x$	$\neg_{15} x$	$\neg_{16} x$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2/3$	$2/3$	$1/3$	$1/3$	0	$2/3$	$2/3$	1	0	$2/3$	$1/3$	$1/3$	1
$1/3$	$1/3$	$2/3$	1	$2/3$	1	0	$1/3$	$1/3$	$2/3$	$1/3$	0	$2/3$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Заметим, что операции импликации по данному алгоритму в точности те же самые, что и полученные по методу комбинирования изоморфов (см. стр. 67).

В результате, согласно алгоритму Левина-Микенберг, на черырехзначном случае могут быть построены 64 литеральные паралогики. Заметим, что 16 из них мы также получили по ранее рассмотренному методу комбинирования изоморфов.

Итак, посмотрим, какие известные четырехзначные логики попали в данных расширенный класс паралогик. В первую очередь обратимся к четырехзначным обобщениям паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^1$ и параполной логики $\mathbf{I}^1$, которые входят в иерархии конечнозначных логик $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{I}^n$ (см. [*Sette, Carnielli,* 1995; *Carnielli, Lima-Marques,* 1999; *Fernández, Coniglio,* 2003]).

Впервые четырехзначные обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ — логики $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{I}^2$ — приведены в работе [*Sette, Carnielli,* 1995, p. 101–102][9]. Обратим внимание, что если в случае $\mathbf{P}^{2*}$ промежуточные значения рассматриваются в качестве степеней истины и обозна-

[9]Хотя данные обобщения в указанной работе обозначены как $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{I}^2$, в данном исследовании мы будем обозначать их как $\mathbf{P}^{2*}$ и $\mathbf{I}^{2*}$, чтобы отличить их от других обобщений.

чены T^* и T^{**}, то в случае $\mathbf{I}^{2*}$ они рассматриваются в качестве степеней лжи и имеют обозначения F^* и F^{**}.[10]

Тогда матрица для $\mathbf{P}^{2*}$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{M}^{P^{2*}} = \langle\{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_{16}, \rightarrow_{P^2}, \{1, {}^2\!/_3, {}^1\!/_3\}\rangle.$$

где $\rightarrow_{P^2}$ определяется таблицей:

$\rightarrow_{P^2}$	1	${}^2\!/_3$	${}^1\!/_3$	0
1	1	1	1	0
${}^2\!/_3$	1	1	${}^2\!/_3$	0
${}^1\!/_3$	1	${}^2\!/_3$	1	0
0	1	1	1	1

Четырехзначная параполная логика $\mathbf{I}^{2*}$ имеет следующую матрицу:

$$\mathfrak{M}^{I^{2*}} = \langle\{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_7, \rightarrow_{I^2}, \{1\}\rangle.$$

где $\rightarrow_{I^2}$ определяется таблицей:

$\rightarrow_{I^2}$	1	${}^2\!/_3$	${}^1\!/_3$	0
1	1	0	0	0
${}^2\!/_3$	1	${}^1\!/_3$	1	1
${}^1\!/_3$	1	1	${}^1\!/_3$	1
0	1	1	1	1

Однако очевидно, что вышеприведенные логики хотя и являются литеральными паралогиками, однако не входят в рассматриваемый класс логик, полученных по алгоритму Левина-Микенберг, в силу того, что импликации в качестве значений

[10] При этом отметим, что в упомянутой работе множество истинностных значений $\mathbf{P}^{2*}$ обозначено как $\{T, T^*, T^{**}, F\}$, а множество истинностных значений $\mathbf{I}^{2*}$ — обозначено как $\{F, F^*, F^{**}, T\}$, тогда унифицируя обозначения истинностных значений, которые используются в нашем исследовании, будем обозначать T^* и F^{**} как ${}^2\!/_3$, а T^{**} и F^* как ${}^1\!/_3$.

имеют в том числе и промежуточные значения. Таким образом, алгоритм Левина-Микенберг задает достаточно обширный класс литеральных паралогик, но не весь класс таких логик.

В более поздних работах [*Carnielli, Lima-Marques,* 1999; *Fernández, Coniglio,* 2003], находим другие обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, а вышеприведенные четырехзначные логики $\mathbf{P}^{2*}$ и $\mathbf{I}^{2*}$ встречаются только в единственной вышеупомянутой работе [*Sette, Carnielli,* 1995].

Итак, рассмотрим эту пару обобщений $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

Матрица для паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^2$ имеет вид:

$$\mathfrak{M}_2^P = \langle\{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_{16}, \rightarrow_2, \{1, {}^2\!/\!{}_3, {}^1\!/\!{}_3\}\rangle.$$

Параполная логика $\mathbf{I}^2$ имеет следующую матрицу[11]:

$$\mathfrak{M}_2^I = \langle\{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_8, \rightarrow_1, \{1\}\rangle.$$

Также в работе [*Fernández, Coniglio,* 2003] рассмотрена иерархия паранормальных логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$. В четырехзначном случае логика $\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2$ имеет следующую матрицу:

$$\mathfrak{M}^{I^2P^2} = \langle\{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_4, \rightarrow_3, \{1, {}^2\!/\!{}_3\}\rangle.$$

Заметим, что это в точности та же матрица что и $\mathfrak{M}_{16}$, полученная по методу комбинирования изоморфов.

Обратим внимание, что логика $\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2$ функционально эквивалентна логике $\mathbf{V}$ (см. раздел 2.6.2), которая разработана с целью формализации наиболее важных интуиций Н.А. Васильева, положенных в основу его воображаемой логики. $\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2$ отличается от $\mathbf{V}$ классом выделенных значений D.

[11] Обратим внимание, что в [*Carnielli, Lima-Marques,* 1999] для истинностных значений в $\mathbf{I}^2$ также как и в [*Sette, Carnielli,* 1995] использованы обозначения T, F^*, F^{**}, F, однако здесь явно указано, что F^{**} представляет более несомненную ложь, чем F^*. Таким образом, данном случае промежуточные истинностные значения F^* и F^{**} будем обозначать ${}^2\!/\!{}_3$ и ${}^1\!/\!{}_3$.

Интересной особенностью как паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^2$, так и $\mathbf{P}^{2*}$, оказалось то, что формула Лукасевича в обеих этих логиках не верифицируется. Заметим, что в трехзначной логике Сетте $\mathbf{P}^1$ эта формула верифицируется.

Обратим внимание на тот факт, что если трехзначные логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ функционально эквивалентны (см. раздел 2.5), то в случае четырехзначных логик это не так. Так, очевидно, что логики $\mathbf{P}^{2*}$ и $\mathbf{I}^{2*}$ не являются функционально эквивалентными. Так, например, посредством связок $\mathbf{P}^{2*}$ невозможно выразить отрицание $\neg_7$, поскольку функции, соответствующие связкам $\mathbf{P}^{2*}$, принимают значение из множества $\{0, {}^2/_3, 1\}$, в то время как в матрице $\mathfrak{M}^{I^{2*}}$ существует такая оценка v, что $v(\neg_7 p) = {}^1/_3$.

Также аналогичное утверждение об отсутствии функциональной эквивалентности справедливо и для логик $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{I}^2$.

Доказательство. Можно показать, что посредством связок $\{\neg_{16}, \rightarrow_2\}$ невозможно выразить отрицание $\neg_8$. Допустим, что это возможно. То есть существует такая формула α, что она представляет функцию, соответствующую связке $\neg_8$. Тогда α имеет вид (1) $\neg_{16}\beta$ или (2) $\beta_1 \rightarrow_2 \beta_2$. Но очевидно, что (2) не имеет место, поскольку связке $\rightarrow_2$ соответствует внешняя функция, т. е. функция, значение которой на любой наборе аргументов принадлежит множеству $\{1, 0\}$. Тогда α имеет вид $\neg_{16}\beta$ и β — формула, представляющая функцию, приведенную в следующей таблице:

x	$\alpha = \neg_{16}$	β
1	0	1
$^2/_3$	0	1
$^1/_3$	$^2/_3$	$^1/_3$
0	1	0

Но очевидно, что подобная функция не может быть получена посредством суперпозиции функций $\neg_{16}$ и $\to_2$, т. к. эти функции принимают значения только из множества $\{1, {}^2\!/_3, 0\}$.

$\square$

В рассматриваемый нами класс литеральных паралогик входят также и упомянутые нами ранее паранормальные логики **AVP** и $\mathbf{S}^4$. Матрицы для них приведены в разделе 2.6.2.

Итак, дополним таблицу 1, приведем весь класс из 64 паралогик:

Таблица 2

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\neg_3$	$\neg_4$	$\neg_5$	$\neg_6$	$\neg_7$	$\neg_8$	$\neg_9$	$\neg_{10}$	$\neg_{11}$	$\neg_{12}$	$\neg_{13}$	$\neg_{14}$	$\neg_{15}$	$\neg_{16}$
$\to_1$	$++$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$
$\to_2$	$-+$	$++$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$	$-+$
$\to_3$	$-+$	$+-$	$++$	$--$	$--$	$++$	$++$	$++$	$-+$	$--$	$--$	$+-$	$-+$	$+-$	$+-$	$-+$
$\to_4$	$-+$	$+-$	$--$	$++$	$--$	$++$	$-+$	$+-$	$--$	$+-$	$-+$	$--$	$+-$	$-+$	$++$	$++$

«$-+$» — паранепротиворечивая логика.

«$+-$» — параполная логика.

«$--$» — паранормальная логика.

«$++$» — логика, не являющаяся ни паранепротиворечивой, ни параполной.

Напомним, что, согласно алгоритму Левина-Микенберг, импликация $\to_1$ появляется при $D = \{1\}$, импликация $\to_2$ — при $D = \{1, {}^2\!/_3, {}^1\!/_3\}$, импликация $\to_3$ — при $D = \{1, {}^2\!/_3, \}$ и импликация $\to_4$ — при $D = \{1, {}^1\!/_3\}$. И тогда, например, если рассмотрим вторую строку в таблице, то соответствующие логические матрицы будут иметь вид:

$$\mathfrak{M} = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_i, \to_2, \{1, {}^2\!/_3, {}^1\!/_3\} \rangle, \text{ где } 1 \le i \le 16.$$

Из таблицы видно, что все эти матрицы (за исключением случая, когда $i = 2$) определяют паранепротиворечивые логики. И в принципе любая из них может быть рассмотрена в качестве четырехзначного обобщения трехзначной паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^1$. Напомним, что в работах [*Carnielli, Lima-Marques,* 1999; *Fernández, Coniglio,* 2003], предложено обобщение при $i = 16$. Но на самом деле не совсем ясно, почему предпочтение отдано именно этой системе. Так, например, в разделе 2.3. при перечислении свойств $\mathbf{P}^1$ указано, что в $\mathbf{P}^1$ верифицируется формула Лукасевича $p \to (\neg p \to (\neg\neg p \to q))$. Так, несложно проверить, что в матрицах при $i \in \{1, 3, 4, 8, 15\}$ также эта формула верифицируется, в то время как в матрицах при $i \in \{5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$ она не является тавтологией.

В всех матрицах рассматриваемого вида закон утверждения консеквента (K), закон самодистрибутивности (S) и закон Пирса (P) являются тавтологиями:

$K: \ p \to (q \to p)$

$S: \ (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

$P: \ ((p \to q) \to p) \to p$

Однако контрапозиция не верифицируется.

Если мы обратимся к первой строке таблицы 2, то видим, что матрицы вида

$$\mathfrak{M} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_i, \to_1, \{1\} \rangle, \text{ где } 1 \leq i \leq 16,$$

определяют класс параполных логик (за исключением случая, когда $i = 1$). И эти системы могут быть рассмотрены в качестве обобщения трехзначной параполной логики $\mathbf{I}^1$.

3.3. Метод построения паралогик посредством ведения понятия квазиэлементарной формулы

В данном параграфе опишем класс паралогик, который может быть получен по методу В.М. Попова посредством введения понятия квазиэлементарной формулы.

Приведем основные понятия, используемые при данном подходе.

Язык L есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L) $\supset$, $\wedge$, $\vee$, (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(\neg A)$ являются формулами, (3) ничто другое не является L-формулой. *Квазиэлементарной*[12] L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной квазиэлементарной L-формулы называется число вхождений $\neg$ в эту формулу.

Тогда *простой* паранепротиворечивой теорией логики **L** называем такую паранепротиворечивую теорию **T** логики **L** (см. определение на стр. 33), что для всякой L-формулы A верно следующее: если A и $(\neg A)$ принадлежат теории **T**, то A есть квазиэлементарная L-формула. *Простой* паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику **L**, что всякая паранепротиворечивая теория логики **L** является простой паранепротиворечивой теорией логики **L**.

[12] Очевидно, что понятие квазиэлементарной формулы совпадает с понятием литерала см. сноску 9 на стр. 47.

Простой параполной логикой называем такую параполную логику $\mathbf{L}$, что для всякой параполной теории $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$ (см. определение на стр. 33) верно следующее: существует такая квазиэлементарная L-формула E, что $E \notin \mathbf{T}$ и $(\neg E) \notin \mathbf{T}$.

В.М. Попов строит целый класс бесконечных строго убывающих по теоретико-множественному включению последовательностей паралогик. Этот класс достаточно обширен и его можно структурировать в зависимости от решения тех или иных задач, выделяя последовательности, обладающие теми или иными свойствами, доказывать для них определенные теоремы.

Выделяются два класса последовательностей: I-последовательности простых паралогик и Int-последовательности простых паралогик [*Попов,* 2010]. Доказаны теоремы, демонстрирующие связь простых паралогик из I-последовательностей с классической пропозициональной логикой, простые паралогики второго типа, из Int-последовательностей, в рамках нашего исследования рассматриваться не будут, отметим только, что они имеют определенную связь с интуиционистской пропозициональной логикой.

Так, в [*Попов,* 2010] рассмотрены следующие I-последовательности паралогик:

(1) бесконечно строго убывающая последовательность простых *паранормальных* логик $I_{0,1}, I_{0,2}, I_{0,3}, \ldots$ что пересечение всех членов этой последовательности есть простая паранормальная логика $I_{0,\omega}$.

(2) бесконечно строго убывающая последовательность простых *паранепротиворечивых* логик $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}, \ldots$ что пересечение всех членов этой последовательности есть простая паранепротиворечивая логика $I_{1,\omega}$.

(3) бесконечно строго убывающая последовательность простых *paраполных* логик $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, \ldots$ что пересечение всех членов этой последовательности есть простая параполная логика $I_{2,\omega}$.

(4) бесконечно строго убывающая последовательность простых *паранормальных* логик $I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, \ldots$ что пересечение всех членов этой последовательности есть простая паранормальная логика $I_{3,\omega}$.

Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ построено исчисление гильбертовского типа $HI_{i,\alpha}$ и $I_{i,\alpha}$ является множеством всех формул, доказуемых в $HI_{i,\alpha}$.

Указано, что множество $I_{0,0}$ равно множеству всех классических тавтологий в языке L, а также то, что $I_{0,0} = I_{1,0} = I_{2,0} = I_{3,0}$ [*Попов,* 2010, с. 208].

Автором формулируются секвенциальные исчисления, аксиоматизирующие указанные простые паралогики, а также устанавливается связь между ними и классической пропозициональной логикой $I_{0,0}$. В частности утверждается, что для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ позитивный фрагмент логики $I_{i,\alpha}$ равен позитивному фрагменту логики $I_{0,0}$. Формулируются операции, погружающие классическую пропозициональную логику в соответствующие паралогики.

В этой же работе приводится утверждение о том, что простые паралогики из четвертой последовательности являются результатом пересечения соответствующий простых паралогик из второй и третьей последовательностей, т. е. $I_{1,\alpha} \cap I_{2,\alpha} = I_{3,\alpha}$.

Отметим, что ранее мы уже упоминали на стр. 53 характеристические матрицы для логик $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ из статьи [*Popov,* 1999], это и есть логики $I_{1,1}$ и $I_{2,1}$ — представители вышеприведенных последовательностей (2) и (3) соответственно.

Таким образом, с одной стороны, характеристические матрицы логик $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ являются подматрицами матрицы логики $\mathbf{I}_0$ (это логика $I_{0,1}$ последовательности (1)), с другой, по классу тавтологий логики $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ в пересечении дают логику $\mathbf{I}_3$, или что тоже самое[13]: $I_{1,1} \cap I_{2,1} = I_{3,1}$.

Напомним, что $I_{1,1}$ есть ни что иное как множество всех формул, доказуемых в паранепротиворечивом исчислении Сетте $\mathbf{P}^1$ [*Sette,* 1973], а параполная логика $I_{2,1}$ — множество всех формул, доказуемых в параполном исчислении $\mathbf{I}^1$ [*Sette, Carnielli,* 1995].

Отдельное внимание стоит обратить на выделенные В.М. Поповым так называемые I-логики васильевского типа. С помощью I-логик васильевского типа эксплицируются некоторые логические построения, представленные в работах Николая Александровича Васильева и лежащие в основе его «воображаемой логики».

В работе [*Попов,* 2013] для произвольных α и β из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ определяется логика $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. В случае, когда $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$, логика $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является простой паралогикой. В статье [*Попов,* 2016] В.М. Попов такую логику называет I-логикой васильевского типа.

Далее, I-логики васильевского типа подразделяются на следующие паралогики в зависимости от парасвойств (см. [*Попов,* 2013, с. 28]):

(1) если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть простая *паранормальная* логика;

(2) если $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$, то $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть простая *паранепротиворечивая* логика, не являющаяся параполной;

(3) если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть простая *параполная* логика, не являющаяся паранепротиворечивой.

[13]Используя нотацию работы [*Попов,* 2010].

Для всякого для всяких α и β из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ построено исчисление гильбертовского типа $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ и $I_{\alpha,\beta}$ является множеством всех формул, доказуемых в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Можно установить соотношение между I-логиками васильевского типа $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ и ранее приведенными нами последовательностями простых паралогик $I_{i,\alpha}$. Так, заметим, не всякая простая паралогика $I_{i,\alpha}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha \in \{1, 2, \dots \omega\}$) является логикой васильевского типа.

Итак,

1) простые паранормальные логики $I_{0,1}, I_{0,2}, I_{0,3}, \dots I_{0,\omega}$ есть следующие I-логики васильевского типа $I_{\langle 1,1\rangle}$, $I_{\langle 2,2\rangle}, I_{\langle 3,3\rangle}, \dots I_{\langle\omega,\omega\rangle}$;

2) простые паранепротиворечивые логики $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}, \dots$ $I_{1,\omega}$ есть следующие I-логики васильевского типа $I_{\langle 1,0\rangle}$, $I_{\langle 2,0\rangle}, I_{\langle 3,0\rangle}, \dots I_{\langle\omega,0\rangle}$;

3) простые параполные логики $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, \dots I_{2,\omega}$ есть следующие I-логики васильевского типа $I_{\langle 0,1\rangle}$, $I_{\langle 0,2\rangle}, I_{\langle 0,3\rangle}, \dots I_{\langle 0,\omega\rangle}$.

Простые паранормальные логики $I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, \dots I_{3,\omega}$ не относятся к I-логикам васильевского типа.

В.М. Поповым построены секвенциальные аксиоматизации I-логик васильевского типа, удобные для пользователя и пригодные к машинной реализации поиска доказательства, а также построены интуитивно ясные двузначные семантики, адекватные I-логикам васильевского типа (см. [*Попов,* 2016]).

Отдельный интерес представляет вопрос о наличии характеристических матриц для I-логик васильевского типа. В этой связи интересна связь исследований В.М. Попова с ранее упоминаемой нами работой Р. Левина и И. Микенберг, посвященной алгоритму построения матриц для литеральных паранепротиворечивых и параполных логик.

По поводу проблемы табличности I-логик васильевского типа В.М. Попов говорит о возможности применения метода доказательства табличности логик, базирующегося на построении так называемой кортежной семантики (см., например, [*Попов,* 2011a]) этой логики. Этот новый метод позволяет положительно/отрицательно решать проблему табличности для бесконечного числа пропозициональных паралогик. Так, автором планируется доказать *табличность* любой такой I-логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ васильевского типа, что $\alpha \neq \omega$ и $\beta \neq \omega$, и *нетабличность* любой такой I-логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ васильевского типа, что $\alpha = \omega$ и $\beta = \omega$ [*Попов,* 2016, с. 66].

Список литературы

[*Аншаков, Рычков,* 1982] *Аншаков О.М., Рычков С.В.* О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. Вып. 19. С. 90–117.

[*Аншаков, Рычков,* 1984] *Аншаков О.М., Рычков С.В.* Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. 1984. Вып. 23. С. 78–106.

[*Бочвар,* 1938] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Вып. 4. № 2. С. 287–308.

[*Бочвар, Финн,* 1972] *Бочвар Д.А., Финн В.К* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам М.: Наука, 1972. С. 238–295.

[*Бочвар, Финн,* 1976] *Бочвар Д.А., Финн В.К* Некоторые дополнения к статьям о многозначных логиках // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 265–325.

[*Григолия, Финн,* 1979] *Григолия Р.Ш., Финн В.К.* Алгебры Бочвара и соответствующие им пропозициональные исчисления // Исследования по неклассическим логикам и теория множеств. М.: Наука, 1979. С. 345–372.

[*Девяткин,* 2004] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные изоморфы классической логики // Логические исследования. Т. 11. М., 2004. С. 119–125.

[*Девяткин,* 2011] *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФ РАН, 2011. 108 с.

[*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 50–62.

[*Девяткин, Преловский, Томова,* 2015] *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. 136 с.

[*Ишмуратов,* 1974] *Ишмуратов А.Т.* Аксиоматизация трехзначного исчисления высказываний Бочвара // Теория логического вывода. Ч. II. М.: ИФ РАН, 1974. С. 214–218.

[*Ишмуратов,* 1981] *Ишмуратов А.Т.* Логические теории временных контекстов. Киев: Наукова Думка, 1981. 144 с.

[*Карпенко,* 1997] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. М.: Наука, 1997. 223 с.

[*Карпенко,* 2010] *Карпенко А.С.* Континуальность трехзначных логик: проблемы и гипотезы // Логические исследования. Т. 16. М., 2010. С. 127–133.

[*Карпенко,* 2010] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[*Карпенко,* 2015] *Карпенко А.С.* Предисловие: Многообразие трехзначности // *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. С. 9–33.

[*Клини,* 1957] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностр. лит., 1957. 526 с.

[*Немытых,* 2007] *Немытых А.П.* Суперкомпилятор SCP4. Общая структура. М.: ЛКИ, 2007. 152 с.

[*Попов,* 1989] *Попов В.М.* Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М.: Наука, 1989. С. 285–289.

[*Попов,* 2002] *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. Т. 9. М., 2002. С. 175–178.

[*Попов,* 2003a] *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича / Под ред. В.И. Маркина. М.: Соврем. тетр., 2003. С. 192–195.

[*Попов,* 2003б] *Попов В.М.* Об одной паранормальной логике // Смирновские чтения: Материалы 4 Международ. конф. М.: ИФ РАН, 2003. С. 46–49.

[*Попов,* 2006] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранормальных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы IX Общерос. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, 22–24 июня 2006 г.). СПб., 2008. С. 382–385.

[*Попов,* 2007] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранепротиворечивых логик // Логические исследования. Т. 14. М., 2007. С. 257–261.

[*Попов,* 2008] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранополных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы X Общерос. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, 26–28 июня 2008 г.). СПб., 2008. С. 304–306.

[*Попов,* 2010] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик // Логические исследования. Т. 16. М., 2010. С. 205–220.

[*Попов,* 2011] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики PContPComp // Логические исследования. Т. 17. М., 2011. С. 240–245.

[*Попов,* 2011a] *Попов В.М.* Семантическая характеризация паранормальных логик $I_{0,1}, I_{0,2}, I_{0,3} \ldots$ // Логическая семантика: перспективы для философии языка и эпистемологии. Сборник науч. статей, посвященных юбилею Е.Д. Смирновой / Отв. ред. Е.Г. Драгалина-Черная, Д.В. Зайцев. М.: Креативная экономика, 2011. С. 161–167.

[*Попов,* 2013] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ // 8-е Смирновские чтения по логике: материалы Международ. науч. конф. (г. Москва, 19–21 июня 2013 г.). М.: Соврем. тетр., 2013. С. 27–29.

[*Попов,* 2016] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 32–69.

[*Розоноэр,* 1993] *Розоноэр Л.И.* О семантике противоречивых формальных теорий // Семиотика и информатика. Вып. 33. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1993. С. 71–100.

[*Томова,* 2010] *Томова Н.Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Т. 16. М., 2010. С. 233–258.

[*Томова,* 2011] *Томова Н.Е.* Естественные p-логики // Логические исследования. Т. 17. М., 2011. С. 256–268.

[*Томова,* 2012] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: Функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

[*Томова,* 2015] *Томова Н.Е.* Расширение класса естественных трехзначных импликаций // Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е. В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. С. 97–130.

[*Финн,* 1971] *Финн В.К.* Об аксиоматизация некоторых трехзначных логик // Научно-техническая информация. 1971. Сер. 2. № 11. С. 16–20.

[*Финн,* 1974a] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика / Под ред. П.В. Таванца и В.А. Смирнова. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[*Финн,* 1974b] *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[*Финн, Аншаков и др.,* 1980] *Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р.Ш., Забежайло М.И.* Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. Вып. 15. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1980. С. 27–60.

[*Чёрч,* 1960] *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М.: Иностр. лит., 1960. 484 с.

[*Шестаков,* 1959] *Шестаков В.И.* Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем //

Логические исследования. Вып. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 315–351.

[*Шестаков,* 1964] *Шестаков В.И* О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 2(116). С. 177–181.

[*Шестаков,* 1971] *Шестаков В.И* Об одном фрагменте исчисления Д.А. Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. Вып. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1971. С. 102–115.

[*Яблонский,* 1958] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[*Янов, Мучник,* 1959] *Янов Ю.И., Мучник А.А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[*Araujo, Alves, Guerzoni,* 1987] *Araujo A.L., Alves E.H., Guerzoni J.A.D.* Some relations between modal and paraconsistent logic // The Journal of Non-Classical Logic. 1987. Vol. 4(2). P. 33–44.

[*Arruda,* 1977] *Arruda A.I.* On the imagionary logic of N.A. Vasil'ev // Non-Classical Logics, Model Theory and Computability. Amsterdam: Nort-Holland, 1977. P. 3–24.

[*Avron,* 1991] *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56(1). P. 276–294.

[*Batens,* 1980] *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logics // Logique et Analyse. 1980. Vol. 90–91. P. 127–139.

[*Béziau,* 1989] *Béziau J.-Y.* Calcul des séequents pour logique non-alèthique // Logique et Analyse. 1989. Vol. 125–126. P. 143–155.

[*Béziau,* 2000] *Béziau J.-Y.* What is paraconsistent logic? // Frontiers of Paraconsistent Logic / Eds. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem. Philadelphia: Research Studies Press, 2000. P. 95–111.

[*Boscaino,* 1992] *Boscaino E.G.* Os Cálculos Paraconsistentes P_1 e β_2, Ph.D. thesis. São Paulo, 1992.

[*Brunner, Carnielli,* 2005] *Brunner A.B.M., Carnielli W.A.* Anti-intuitionism and paraconsistency // Journal of Applied Logics. 2005. Vol. 3(1). P. 161–184.

[*Cândido,* 1992] *Cândido S.L.* Sobre a lógica n ao-alética, Master's thesis. Pontifícia Universidade de São Paulo, 1992.

[*Carnielli, Lima-Marques,* 1999] *Carnielli W.A., Lima-Marques M.* Society semantics and multiple-valued logics // Advances in Contemporary Logic and Computer Science / Eds. by W. Carnielli and I.M.L. D'Ottaviano. American Mathematical Society, 1999. P. 33–52.

[*Carnielli,* 2000] *Carnielli W.A.* Possible-translations semantics for paraconsistent logics // Frontiers of Paraconsistent Logic / Eds. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem. Baldock Research Studies Press, 2000. P. 149–163.

[*Carnielli, Marcos,* 2002] *Carnielli W.A., Marcos J.* A Taxonomy of C-systems // Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent. Vol. 228 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics / Eds. by W.A. Carnielli, M.E. Coniglio and I.M.L. D'Ottaviano. N. Y., 2002. P. 1–94.

[*Church, Rescher,* 1950] *Church A., Rescher N.* Review of Z.P. Dienes On an implication function in many-valued systems of logic // The Journal of Symbolic Logic. 1950. Vol. 15(1). P. 69–70.

[*Church,* 1953] *Church A.* Non-normal truth tables for the propositional calculus // Boietin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1953. Vol. 10. No. 1–2. P. 41–52.

[*Ciucci, Dubois,* 2012] *Ciucci D., Dubois D.* Relationships between connectives in three-valued logics // Advances in Computational Intelligence / Eds. by S. Greco et al. Berlin: Springer, 2012. P. 633–642.

[*Ciucci, Dubois,* 2013] *Ciucci D., Dubois D.* A map of dependencies among three-valued logics // Information Sciences. 2013. Vol. 250. P. 162–177.

[*Ciuciura,* 2015] *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

[*Ciuciura,* 2015a] *Ciuciura J.* Paraconsistency and Sette's calculus P1 // Logic and Logical Philosophy. 2015. Vol. 24(2). P. 265–273.

[*Da Costa,* 1974] *Da Costa N.C.A.* On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 15(4). P. 497–510.

[*Da Costa, Alves,* 1981] *Da Costa N.C.A., Alves E.H.* Relations between paraconsistent logic and many-valued logic // Bulletin of the Section of Logic. 1981. Vol. 10(4). P. 185–191.

[*Dienes,* 1949] *Dienes P.* On ternary logic // The Journal of Symbolic Logic. 1949. Vol. 14(2) P. 85–94.

[*D'ottaviano, Feitosa,* 2000] *D'ottaviano I.M.L., Feitosa H. de A.* Paraconsistent logics and translations // Synthese. 2000. Vol. 125. P. 77–95.

[*Epstein,* 1990] *Epstein G.L.* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional Logic. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388 p.

[*Fernández,* 2001] *Fernández V.L.* Society Semantics for N-valued Logics. Master's thesis. IFCH-State University of Campinas, 2001 (in Portuguese).

[*Fernández, Coniglio,* 2003] *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13(1). P. 21–46.

[*Finn, Grigolia,* 1980] *Finn V.K., Grigolia R.* Bochvar's algebras and their corresponding propositional calculi // Bulletin of the Section of Logic. 1980. Vol. 9. P. 39–45.

[*Finn, Grigolia,* 1993] *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsens logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. LIX (1-3). P. 207–273.

[*Goddard, Routley,* 1973] *Goddard L., Routley R.* The Logic of Significance and Context. Edinburgh; L.: Scottish Academic Press, 1973. 641 p.

[*Hałkowska,* 1989] *Hałkowska K.* A note on matrices for systems of nonsens-logic // Studia Logica. 1989. Vol. 48(4). P. 461–464.

[*Hirsh, Lewin,* 2008] *Hirsh E., Lewin R.A.* Algebraization of logics defined by literal-paraconsistent or literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2008. Vol. 54(2). P. 153–166.

[*Hulanicki, Swierckowski,* 1960] *Hulanicki A., Swierckowski S.* Number of algebras with a given set of elements // Bull. Acad. Polon., Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1960. Vol. 8. P. 283–284.

[*Jaśkowski,* 1969] *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

[*Karpenko,* 1986] *Karpenko A.S.* Paraconsisten structure inside of many-valued logic // Synthese. 1986. Vol. 66. P. 63–69.

[*Karpenko,* 1999] *Karpenko A.S.* Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 81–86.

[*Karpenko,* 2000a] *Karpenko A.S.* The classification of propositional calculi // Studia Logica. 2000. Vol. 66(2). P. 253–271.

[*Karpenko,* 2000b] *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Frontiers of Paraconsistent Logic / Eds. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem. Philadelphia: Research Studies Press, 2000. P. 181–187.

[*Karpenko,* 2002] *Karpenko A.S.* Atomic and molecular paraconsistent logics // Logique et Analyse. 2002. Vol. 177–178. P. 31–37.

[*Kleene,* 1938] *Kleene S.C.* On a notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. P. 150–155.

[*Lewin, Mikenberg, Schwarze,* 1990] *Lewin R.A., Mikenberg I.F., Schwarze M.G.* Algebraization of paraconsistent logic P1 // The Journal of Non-Classical Logic. 1990. Vol. 7. No. 2. P. 79–88.

[*Lewin, Mikenberg,* 2006] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[*Lewin, Mikenberg,* 2010] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* First order theory for literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2010. Vol. 56. No. 4. P. 425–433.

[*Loparic, da Costa,* 1986] *Loparic A. and N.C.A. da Costa.* Paraconsistency, paracompleteness and induction // Logique et Analyse. 1986. Vol. 113. P. 73–80.

[*Łukasiewicz,* 1920] *Łukasiewicz J.* (1920). On three-valued logic // J. Łukasiewicz, Selected Works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam, North-Holland, 1970. P. 87–88.

[*Łukasiewicz,* 1930] *Łukasiewicz J.* (1930). Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic // J. Łukasiewicz, Selected Works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam, North-Holland, 1970. P. 153–178.

[*Łukasiewicz, Tarski,* 1930] *Łukasiewicz J., Tarski A.* (1930). Investigations into the sentential calculus // J. Łukasiewicz, Selected Works, North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970. P. 131–152.

[*Maduch,* 1978] *Maduch M.* On three-valued implicative systems // Studia logica. 1978. Vol. XXXVII. No. 4. P. 351–385.

[*Marcos,* 2004] *Marcos J.* Possible translations semantics // Proceedings of CombLog'04, Workshop on Combination of Logics: Theory and Applications / Eds. by W.A. Carnielli, F.M. Dionísio and P. Mateus. Lisboa, 2004. P. 119–128.

[*Marcos,* 2005a] *Marcos J.* On a problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic 2 / Ed. by G. Sica. Polimetrica, 2005. P. 53–69.

[*Marcos,* 2005b] *Marcos J.* Possible translations semantics. Preprint. 2005. URL: http://sqig.math.ist.utl.pt/pub/MarcosJ/04-M-pts.pdf (дата обращения — 21.10.2016).

[*Mortensen,* 1989] *Mortensen C.* Paraconsistency and C1 // Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsisent / Eds. by G. Priest, R. Routley and J. Norman. Munich: Philosophia Verlag, 1989. P. 289–305.

[*Piróg-Rzepecka,* 1973] *Piróg-Rzepecka K.* A predicate calculus with formulas which lose sense and the corresponding propositional calculus // Bulletin of the Section of Logic. 1973. Vol. 2. No. 1. P. 22–29.

[*Popov,* 1999] *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

[*Post,* 1921] *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.

[*Post,* 1941] *Post E.L.* Two-valued iterative systems. Annals of Mathematical Studies. Vol. 5. Princeton; L., 1941. 122 p.

[*Prelovskiy,* 2013] *Prelovskiy N.N.* Cardinality of sets of closed functional classes in weak 3-valued logics // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 334–343.

[*Priest,* 1979] *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

[*Priest,* 1984] *Priest G.* The logic of paradox, revisited // Ibid. 1984. Vol. 13. P. 153–179.

[*Priest, Tanaka, Weber,* 2013] *Priest G., Tanaka K., Weber Z.* Paraconsistent logic, Stanford Encyclohdia of Philosophy. 2013. URL: http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent (дата обращения — 21.10.2016).

[*Puga, Da Costa,* 1988] *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N. A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

[*Pynko,* 1995a] *Pynko A.P.* On Priest's logic of paradox // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1995. Vol. 5. P. 219–225.

[*Pynko,* 1995] *Pynko A.P.* Algebraic study of Sette's maximal paraconsistent logic // Studia Logica. 1995. Vol. 54(1). P. 89–128.

[*Rescher,* 1969] *Rescher N.* Many-Valued Logic. N. Y.: McGraw Hill, 1969. 288 p.

[*Segerberg,* 1965] *Segerberg K.* A contribution to nonsense-logic // Theoria. 1965. Vol. 31(3). P. 199–217.

[*Sette,* 1973] *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. P. 173–180.

[*Sette, Carnielli,* 1995] *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

[*Sette, Alves,* 1996] *Sette A.M., Alves E.H.* On the equivalence between some systems of non-classical logic // Bulletin of the Section of Logic. 1996. Vol. 25. P. 68–72.

[*Słupecki, Bryll, Prucnal,* 1967] *Słupecki J., Bryll J., Prucnal T.* Some remarks on the three-valued logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica. 1967. Vol. 21. P. 45–70.

[*Tomova,* 2012] *Tomova N.E.* A Lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics // Report on Mathematical Logic. 2012. Vol. 47. P. 173–182.

[*Tomova,* 2013] *Tomova N.E.* Natural three-valued logics and classical logic // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 344–352.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

BOCHVAR'S THREE-VALUED LOGIC AND LITERAL PARALOGICS

Alexander Karpenko, Natalya Tomova

Alexander Karpenko – D.Sc., professor, head of the department of logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Science

Natalya Tomova – Ph.D., senior research fellow at the department of logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Science

Paraconsistent and paracomplete logics are areas where interest continues to grow. One reason for this may be due to their simplicity and to the wide range of their applications (in computer science, artificial intelligence, and other areas). One crucial factor behind the development of paraconsistent logic is the belief that in certain circumstances we may find ourselves in a situation where our theory is inconsistent and yet we are required to draw inferences in a sensible fashion.

The monograph is devoted to the study of the class of propositional literal paralogics. Literal paralogics are logics in which the paraproperties such as paraconsistence, paracompleteness and paranormality, occur only at the level of literals; that is, formulas that are propositional letters or their iterated negations.

We examine the functional properties of logics, such as the functional inclusion of one logic into another, and the functional equivalence of logics. Analysis of logics based on these properties can lead to surprising results concerning the functional equivalence of logics having different axiomatizations and different meta-logical properties, as shown in the case of paraconsistent logic $\mathbf{P^1}$ and paracomplete logic $\mathbf{I^1}$.

We begin by analyzing Bochvar's three-valued nonsense logic $\mathbf{B_3}$. Its functional properties are determined by the union of different types of connectives – internal and external – and this fact accounts for $\mathbf{B_3}$ being "emergent" within a huge variety of

three-valued logics. And this logic includes two isomorphs of the propositional classical logic $\mathbf{C_2}$. The combination of these two isomorphs leads to the construction of two famous paralogics $\mathbf{P^1}$ and $\mathbf{I^1}$, which are functionally equivalent. Moreover, each of these logics is functionally equivalent to the fragment of logic $\mathbf{B_3}$ consisting of external formulas only.

A four-element lattice of three-valued paralogics with respect to the possession of paraproperties is presented at the end of the second chapter. In the closing chapter, we consider generalizations and hierarchies of literal paralogics and construct a semilattice of four-valued literal paralogics with respect to the relation of functional inclusion one paralogic to another.

Keywords: Bochvar's logic $\mathbf{B_3}$, isomorphs, extended formulas, paraconsistent logics $\mathbf{P}^1$ and $\mathbf{P}^1_2$, paracomplete logics $\mathbf{I}^1$ and $\mathbf{I}^1_2$, paranormal logic $\mathbf{TK}^1$, strong and weak modus ponens, lattice of paralogics, functional properties of paralogics

Научное издание

Карпенко Александр Степанович
Томова Наталья Евгеньевна

Трехзначная логика Бочвара
и литеральные паралогики

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректор *А.А. Гусева*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 22.11.16.
Формат 64x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 7 Уч.-изд. л. 4,8 Тираж 500 экз. Заказ № 31.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/arhive.htm