Шалак В.И. «О скрытых математических структурах языка» // Полигнозис. 2008, №3. С. 31-36.

Шалак В.И.

О скрытых математических структурах языка[1]

В истории науки, с точки зрения логики, существует «белое пятно», объяснить и заполнить которое мало кто пытался.

Две с лишним тысячи лет назад появился знаменитый труд Евклида «Начала», в котором были изложены все основные математические достижения того времени. Развитие математики на этом не остановилось, а было продолжено в работах ученых александрийской школы, арабских алгебраистов и др. Загадка заключается в том, что подавляющая часть научных достижений, полученных вплоть до конца XIX века, не могла быть выражена в языке господствовавшей тогда логики Аристотеля, которая является всего лишь фрагментом одноместного исчисления предикатов. На это обращает внимание Н.Бурбаки в «Очерках по истории математики»:

«Труды Аристотеля и его преемников, по-видимому, не оказали заметного влияния на математику. Греческие математики в своих исследованиях шли по пути, проложенному пифагорейцами и их последователями в IV в. (Теодором, Тэететом, Евдоксом), и мало интересовались формальной логикой при изложении своих результатов. Это не должно вызывать удивления; достаточно сравнить гибкость и точность изложения математических рассуждений, которое имело место начиная с этого периода, с весьма рудиментарным состоянием аристотелевской логики»[2].

Возникает закономерный вопрос, как же в этом случае рассуждали ученые при получении и изложении своих результатов? Можно не интересоваться формальной логикой, но в любом случае приходится придерживаться каких-то общепринятых способов аргументации, чтобы убеждать коллег в своей правоте, передавать знания в учебных классах и пр. Невозможно для решения каждой новой задачи одновременно изобретать еще и новые способы рассуждений, которые в свою очередь потребуют объяснения и обоснования. В то же время никакой другой систематизированной теории рассуждений, кроме включенной в систему школьного и университетского преподавания логики Аристотеля, просто не существовало. Она преподносилась как вполне законченный канон научной аргументации.

*«…со времен Аристотеля ей [*логике*] не приходилось делать ни шага назад, если не считать улучшением устранение некоторых ненужных тонкостей и более ясное изложение, относящееся скорее к изящности, нежели к достоверности, науки. Примечательно в ней также и то, что она до сих пор не могла сделать ни шага вперед и, судя по всему, она кажется наукой вполне законченной и завершенной»*[3].

Неспособность дать рациональное объяснение заставляет искать его в терминах интуиции. Именно к этому прибегает Х. Карри, рассуждая о природе математики и о том, как понималась математическая строгость в конце XIX века. Он приводит конкретный пример «строго логического» доказательства и задается вопросом:

«Но в терминах какой логики можно было бы описать такое доказательство? Конечно, это должна была быть не традиционная логика, так как в традиционной логике не выразимы рассуждения, использующие отношения (например, неравенство), играющие центральную роль в таком доказательстве. На самом деле математики

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 08-03-00173а

[2] Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963. - С.14.

[3] Кант И. Предисловие ко второму изданию. Критика чистого разума. – М.: Мысль, 1994. - С.14.

того времени проводили, по-видимому, свои рассуждения, опираясь на логическую интуицию, которая никогда не формулировалась в виде явных принципов. Очевидно, молчаливо предполагалось, что эта интуиция имеет универсальный характер и обеспечивает абсолютно надежный критерий строгости»[4].

Можно привести еще много свидетельств в пользу того, что развитие математики происходило в отрыве и опережающими темпами по сравнению с развитием логики. Но как это было возможным? Откуда брались математические истины?

Ответ следует искать в таких способах построения рассуждений, которые, в силу своей очевидности, не только не требуют специальных оговорок, но и кажутся не заслуживающими особого внимания. В этой связи мы хотели бы обратить внимание на операцию введения определений и их использование в ходе построения дедуктивных выводов. Прежде всего, напомним, что такое определение.

«В логике определением (дефиницией) называют логическую процедуру придания строго фиксированного смысла языковым выражениям (терминам языка)»[5].

Может сложиться впечатление, что процедура определения - это всего лишь технический прием уточнения и приведения в систему используемой терминологии, что ничего принципиально нового она нам не дает и дать не может. Тем не менее, в процессе познания определения играют очень важную роль. Простая логическая процедура позволяет строить сложные структуры, обладающие своими особыми свойствами, уже не сводимыми к свойствам отдельных предметов. Вспомним платоновского Сократа, устами которого излагается теория идей. В беседах он постоянно ищет определения различным явлениям окружающего мира - что значит быть *красивым кувшином*, *красивой лошадью*, *красивой девушкой?* Это нужно Сократу для того, чтобы сформулировать идею *красоты вообще*. Поскольку в теории Платона идеи существуют объективно, он относится к этой процедуре как к познавательной.

Одними из самых простых и распространенных являются так называемые *явные* определения. Они имеют следующую лингвистическую форму:

$$\mathbf{A} \equiv_{\mathrm{def}} \mathbf{B}$$

Левая часть этого выражения, обозначенная буквой **A**, называется *определяемым* (дефиниендумом), а правая часть, обозначенная буквой **B**, - *определяющим* (дефиниенсом). Символ $\equiv_{\mathrm{def}}$ «*указывает, что принята конвенция считать, что выражение **A** означает то же самое, что и выражение **B***»[6].

Более всего нас будет интересовать следующее свойство этих определений:

«*Явные определения обладают одним замечательным свойством – определяемые и определяющие части могут в любом контексте замещаться друг на друга, то есть для них верно следующее правило:*

$$\frac{\mathbf{C} =_{\mathrm{def}} \mathbf{D}, \quad \mathbf{K[C]}}{\mathbf{K[D/C]}}$$

[4] Карри Х. Основания математической логики. - М.: Мир, 1969. – С.20.
[5] Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. – С. 197.
[6] Там же. – С. 201.

называемое правилом замены по дефиниции. ... Это правило позволяет использовать явные определения в процессах дедуктивного вывода»[7].

Обоснование данного правила кажется настолько очевидным, что обычно его даже не приводят. Это правило даже не включают в определение вывода, хотя пользуются им регулярно. Действительно, если мы ввели в свой язык выражение **C** как означающее то же самое, что и выражение **D**, то в любом контексте **K** мы имеем полное право заменить **C** на **D**. Каждая из тринадцати книг евклидовых «Начал» открывается списком принимаемых определений, которые впоследствии используются при построении доказательств. С использованием этого правила - замены определяемого на определяющее, и наоборот, - часто строят свои рассуждения люди, даже не знакомые с тем, что такое логика.

Одна из причин, почему мы относимся к явным определениям как всего лишь к чему-то вспомогательному, кроется в том, что обычно мы рассматриваем их чисто экстенсионально, т.е. лишь с точки зрения значений левой и правой части. В этом случае правило замены – это всего лишь замена равного равным. Но помимо значений обе части явных определений обладают еще и структурой. В левой части всегда присутствует так называемый *определяемый термин*, который вводится в язык новым определением. Правая часть обычно имеет более сложную структуру, чем левая, и определяемый термин в некотором смысле является кодом построения этой структуры. Заменяя в ходе рассуждения определяемое на определяющее, мы оперируем не со значениями, а со сложными языковыми структурами. При экстенсиональном понимании определений это теряется из вида.

Чтобы проанализировать структурную составляющую явных определений, возьмем язык, который изначально вообще не содержит констант. В современной логике принято использовать константы в качестве имен отдельных предметов, для представления в языке конкретных функций, свойств и отношений, для обозначения логических связок, с помощью которых строятся сложные предложения, и пр. Поэтому язык без констант – это язык *tabula rasa*, *протоязык* субъекта, который пока ничего не знает об окружающем мире. Он пока не приступил к познанию и потому ничего не поименовал. Такой протоязык является логически неотъемлемой частью любого из существующих языков, но глубоко скрыт под позднейшими наслоениями.

В качестве исходных символов протоязык содержит лишь никак не интерпретированные переменные. В будущем, когда он разовьется и обогатится, вместо этих переменных можно будет подставлять имена конкретных предметов, свойств, функциональных отношений и пр. А пока что логический субъект способен лишь к построению из этих переменных более сложных выражений. Он может написать на песке или листе бумаги выражение X, рядом написать другое выражение Y и заключить их в скобки (X Y), получив тем самым более сложное выражение своего языка. Так как X и Y представляют из себя всего лишь комбинации переменных и скобок, то на начальном этапе все выражения протоязыка – это просто *структуры*. На это мы специально обращаем внимание.

Будем называть выражения языка термами. Поскольку при нашем определении сложных термов они могут содержать много скобок, для облегчения восприятия будем опускать лишние внутренние скобки, предполагая их ассоциацию влево. Например, терм (((X Y) Z) U) после опускания некоторых скобок может быть записан просто как (X Y Z U), а терм ((X (Y Z)) U) примет вид (X (Y Z) U).

Исследуем те свойства языка, которые скрыты в нем самом и не зависят от наполнения его конкретными дескриптивными терминами. Единственной доступной операцией саморасширения языка является операция определения.

---

[7] Там же. – С. 207.

Допустим, имеется некоторый сложный терм T, являющийся комбинацией скобок и переменных. Субъект хочет запомнить его структуру путем введения в язык новой константы D. Эта константа будет представлять для него код построения терма T из соответствующих переменных. Пусть все переменные, из которых был построен терм T, содержатся среди $\{x_1,\ldots, x_n\}$. Тогда явное определение новой константы D будет иметь вид:

$$(D\ x_1\ldots x_n) =_{def} T$$

В левой и правой частях определения стоят термы языка. Терм в левой части имеет простую структуру. После опускания лишних внутренних скобок, это просто цепочка простых термов языка, первым элементом которой является новая константа D, за которой в произвольно выбранном, но фиксированном порядке, следуют переменные. Среди этих переменных могут содержаться и такие, которые не входят в T, т.е. являются фиктивными.

Поскольку после принятия этого определения константа D становится новым выражением языка, то с этого момента ее саму можно использовать при построении термов. В частности, константа D, даже взятая отдельно, также является термом языка.

После введения первого определения в протоязыке появляется первая константа. Она представляет первое примитивное знание субъекта. Это знание относится не к свойствам внешнего мира, а к самому субъекту – его способности строить в языке термы определенной структуры. Каким бы ни было будущее наполнение языка, эта способность и это первое знание всегда будут принадлежать субъекту. Они не зависимы от свойств окружающей реальности.

Вместе с введением в язык первой константы субъект открывает у себя способность к элементарной дедукции, единственным правилом построения которой является замена термов языка в соответствии с принятым определением $(D\ x_1\ldots x_n) =_{def} T$.

Если есть некоторое выражение **K**, в которое входит терм $(D\ x_1\ldots x_n)$, то он может быть заменен на определяющую часть, т.е. на выражение T. Это можно записать в виде правила следующим образом:

$$\frac{(D\ x_1\ldots x_n) =_{def} T,\quad \mathbf{K}[(D\ x_1\ldots x_n)]}{\mathbf{K}[T]}$$

Поскольку переменные $x_1,\ldots, x_n$ в определении играют всего лишь вспомогательную роль, вместо них могут подставляться произвольные термы языка $Y_1, \ldots, Y_n$. Как было отмечено выше, константа D кодирует способ построения терма T из переменных $x_1,\ldots, x_n$. Эта же способ построения может быть применен к термам $Y_1, \ldots, Y_n$, и тогда вместо T мы получим некоторое выражение T^Y. Оно будет отличаться от выражения T лишь тем, что везде, где в T стоит переменная x_1, в выражении T^Y стоит терм Y_1, везде, где в T стоит переменная x_2, в выражении T^Y стоит Y_2, и т.д. Это позволяет переписать правило замены в более общем виде:

$$\frac{(D\ x_1\ldots x_n) =_{def} T,\quad \mathbf{K}[(D\ Y_1\ldots Y_n)]}{\mathbf{K}[T^Y]}$$

Насколько сильно расширяет это правило познавательные возможности субъекта, пользующегося протоязыком? Чтобы дальнейшее изложение не показалось простым фокусом, напомним, что математику часто понимают как науку, изучающую специальные структуры. Правило же введения определений в протоязыке в первую очередь кодирует структуру определяющего выражения, дефиниенса, а не его значение.

В качестве иллюстрации покажем, как субъект, познающий свои способности оперирования языком, может определить в нем функции двузначной булевой алгебры, одним из примеров которой является хорошо известная алгебра *Истины* и *Лжи*.

Поскольку изначально в протоязыке нет никаких констант, которые можно было бы проинтерпретировать *Истиной* и *Ложью*, субъект должен сам ввести их в свой язык. Как это сделать? Для этого необходимо взять два терма с различной структурой и посредством определений закодировать их двумя константами. Примем следующие определения:

Def.1 $(\mathbf{T}\ x\ y) =_{def} x$
Def.2 $(\mathbf{F}\ x\ y) =_{def} y$

Посредством константы **T** мы закодировали свою способность из двух термов (предметов мысли) выбрать первый. Аналогичным образом, посредством константы **F** мы закодировали свою способность из двух термов выбрать второй. Будем считать, что константа **T** представляет элемент *Истина*, а константа **F** – *Ложь*.

Теперь необходимо определить операции, которые должны удовлетворять известным соотношениям булевой алгебры. Так, например, операция отрицания должна сопоставлять константе **T** константу **F**, а константе **F** - константу **T**. Примем следующее определение.

Def.3 $(\mathbf{Not}\ x) =_{def} (x\ \mathbf{F}\ \mathbf{T})$

Легко проверить, что константа **Not** действительно представляет операцию отрицания. Достаточно всего двух применений правила замены определений, чтобы из (**Not T**) получить **F**.

$$\frac{(\mathbf{Not}\ x) =_{def} (x\ \mathbf{F}\ \mathbf{T}),\quad (\mathbf{Not}\ \mathbf{T})}{(\mathbf{T}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T})}$$

$$\frac{(\mathbf{T}\ x\ y) =_{def} x,\quad (\mathbf{T}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T})}{\mathbf{F}}$$

В сокращенной записи это можно записать в виде дедуктивной цепочки:

$$(\mathbf{Not}\ \mathbf{T}) \text{ -> } (\mathbf{T}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T}) \text{ -> } \mathbf{F}$$

Аналогично проверяется второй случай:

$$(\mathbf{Not}\ \mathbf{F}) \text{ -> } (\mathbf{F}\ \mathbf{F}\ \mathbf{T}) \text{ -> } \mathbf{T}$$

Из теории булевой алгебры известно, что если мы сумеем определить операцию **And**, являющуюся аналогом естественноязыкового союза «и», то набор булевых операций был полным, т.е. все другие будут выразимы через **Not** и **And**.

Определение операции **And** также имеет простой вид.

Def.4 $(\mathbf{And}\ x\ y) =_{def} (x\ y\ \mathbf{F})$

Пользуясь этим определением, легко получить требуемые дедуктивные цепочки:

$$(\mathbf{And}\ \mathbf{T}\ \mathbf{T}) \text{ -> } (\mathbf{T}\ \mathbf{T}\ \mathbf{F}) \text{ -> } \mathbf{T}$$

(And T F) -> **(T F F)** -> **F**
(And F T) -> **(F T F)** -> **F**
(And F F) -> **(F F F)** -> **F**

Поскольку операции булевой алгебры *определены* в протоязыке, а не постулированы, они имеют универсальную значимость и сохранятся при любом возможном будущем его расширении за счет конкретных дескриптивных терминов с конкретной интерпретацией.

Данный пример очень прост, но подобным образом можно показать и *строго доказать*, что в протоязыке легко определить число ноль, функцию прибавления единицы и вообще все вычислимые функции арифметики. Это уже поистине удивительный результат, так как позволяет в протоязыке, который изначально не содержит ничего, кроме переменных, доказать, например, **арифметическую истину, что *2+3 равно 5***.

Чтобы лучше осознать удивительность данного результата, необходимо вспомнить суть традиционного подхода к построению арифметики. Для этого, прежде всего, *постулируют* существование идеального объекта под названием *ноль*. Затем постулируют существование специальной операции «*следует за…*», с помощью которой порождаются натуральные числа. И уже после этого определяют или опять же постулируют существование функций, требуемых для развития теории.

В нашем случае мы ничего не постулируем, а развиваем арифметику с чистого листа, с языка, который не содержит ничего, кроме неинтерпретированных переменных. Этот язык изначально не предполагает существования никаких объектов и потому приложим к любой области действительности, к любому возможному опыту. Субъект обладает всего лишь способностью строить и запоминать структуры языка. Этой способности оказывается достаточно, чтобы развить арифметику, на основе которой, как хорошо известно, можно построить и другие разделы математики.

Мы не знаем и вряд ли когда-нибудь узнаем, как рассуждали древние математики времен Египта и Вавилона. Но есть веские основания предположить, что одним из секретов, объясняющих их достижения, являлась конструирующая способность человеческого разума, выраженная в языке. Математические структуры столь успешно приложимы к внешнему миру не потому, что они имеют какое-то объективное существование, а потому что всего лишь производны от этой способности и языка.