К проблеме выразимости операций характеристических матриц паранепротиворечивых и параполных логик

Н. А. Знаменская

abstract. The following expressibilities are constructed: (1) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{LPF}$, (2) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, (3) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Also it's proven that the implications of the logical matrices $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ are not expressible in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$.

Keywords: matrix, operation, implication, valuation, expressibilitiy, paraconsistent logic, paracomplete logic

В [1] построена трехзначная характеристическая матрица для паранепротиворечивой логики PCont (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont}$), в [2] — трехзначная характеристическая матрица для параполной логики LPF[1] (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{LPF}$), в [3] — трехзначные характеристические матрицы для паранепротиворечивой логики PCont(1) (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont(1)}$) и параполной логики PComp(1) (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PComp(1)}$). В предлагаемой работе конструируются тождества, выражающие: 1) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$, 2) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, 3) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Кроме того, доказывается, что импликации

[1] В [4] и [5] логика LPF обозначена посредством PComp.

логических матриц $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ не являются выразимыми через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$.

Следуя [1], [2] и [3], воспроизведем (с точностью до обозначения элементов носителей матриц и матричных операций) определения этих логических матриц.

Характеристическая матрица из [1] для PCont есть логическая матрица
$\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}\}\rangle$, где

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\&$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\supset_{\boldsymbol{PCont}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Характеристическая матрица из [2] для LPF есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{LPF}}\}\rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PCont(1) есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}$, $\{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}\}\rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PComp(1) есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee,$ $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\}\rangle$. Операции $\supset_{\boldsymbol{LPF}}, \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ задаются следующими таблицами:

$\supset_{\boldsymbol{LPF}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

$\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

$\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

Существуют различные определения выразимости операций через операции. Здесь мы придерживаемся определений 1–3, предлагаемых В. М. Поповым. Условимся использовать символы $p_1, p_2, p_3, \ldots$ в качестве переменных, а символы $(,)$ и **,** в качестве технических символов. Определения 1 и 2, а также формулируемые далее условия предполагают, что $F_1, \ldots, F_k$ (k — целое положительное число) есть операции на непустом множестве M, а $s_1, \ldots, s_k$ есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов $(,)$,**,**$p_1, p_2, p_3, \ldots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формулы:

(1) для всякого целого положительного числа n p_n есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формула,

(2) если $i \in \{1, \dots, k\}$ и ранг операции F_i есть 0, то s_i есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формула,

(3) если $i \in \{1, \dots, k\}$ и ранг операции F_i отличен от 0 и равен l, а $A_1, \dots, A_l$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формулы, то $s_i(A_1, \dots, A_l)$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формула,

(4) ничто другое не есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценки:

$F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценкой называем отображение множества всех переменных во множество M.

Можно доказать, что существует единственное отображение, обозначим его через $||^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $|\ |^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}$ есть отображение в M декартова произведения множества всех $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формул на множество всех $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценок,

(2) если n есть целое положительное число и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценка, то $|p_n, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = v(p_n)$,

(3) если $i \in \{1, \dots, k\}$, ранг операции F_i есть 0 и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценка, то $|s_i, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = F_i$,

(4) если $i \in \{1, \dots, k\}$, ранг операции F_i отличен от 0 и равен l, $A_1, \dots, A_l$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формулы и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-оценка, то $|s_i(A_1, \dots, A_l), v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = F_i(|A_1, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}, \dots, |A_l, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Операция g выразима через операции $f_1, \dots, f_k$ (k — целое положительное число), если операции g, $f_1, \dots, f_k$ являются операциями на одном и том же непустом множестве, существуют попарно различные символы $s_1, \dots, s_k$, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \dots$ и существует такая $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$-формула Φ, что выполняются следующие условия:

(1) если ранг операции g равен 0, то для всякой $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$-оценки v $g = |\Phi, v|^{f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k}$,

(2) если ранг операции g есть целое положительное число n, то для всякой $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$-оценки v верно, что $g(v(p_1), \dots, v(p_n)) = |\Phi, v|^{f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k}$.

Очевидны следующие утверждения (1)–(4).

(1) Символы $\neg, \&, \vee, \supset$ попарно различны и каждый из них отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$

(2) Операции $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ являются операциями на одном и том же множестве (на множестве $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$).

(3) $\neg p_1, p_1 \& p_2, p_1 \vee p_2$ и $p_1 \supset p_2$ есть $\boldsymbol{\neg\,\&\,\vee\,\supset_{LPF}}\ \neg\&\vee\ \supset$-формулы, $\boldsymbol{\neg\&\vee\ \supset_{PCont(1)}}\ \neg\&\vee\ \supset$-формулы и $\boldsymbol{\neg\&\vee\ \supset_{PComp(1)}}\ \neg\&\vee\ \supset$-формулы[2] (внешние скобки опускаем, как это принято).

(4) Если $f_1, \dots, f_k$ (k — целое положительное число) суть операции на некотором непустом множестве, то для всякого i (i есть целое положительное число, меньшее или равное k) операция f_i выразима через операции $f_1, \dots, f_k$.

ТЕОРЕМА 1 (о выразимости, операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$).

Всякая операция $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ *выразима через операции* $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 1 достаточно доказать утверждение (5).

(5) Для всякой $\boldsymbol{\neg\&\vee\ \supset_{LPF}}\ \neg\&\vee\ \supset$-оценки v: $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}} v(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}} v(p_2) = |\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}} v(p_2) = |\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$.

[2] Автор надеется, что естественное для данного контекста использование инфиксной, а не префиксной, записи не создаст трудности для читателя.

Докажем утверждение (5).

(5.1) v_0 есть $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}$ $\neg\&\vee\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (5.1) и определение отображения $||^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (5.2) $|(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = (\boldsymbol{\neg} v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)$, $|\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = \boldsymbol{\neg}((\boldsymbol{\neg} v_0(p_2) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg} v_0(p_1)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$, $|\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = \boldsymbol{\neg}((v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$.

Опираясь на табличные определения операций $\boldsymbol{\supset_{PCont}}$, $\boldsymbol{\supset_{PCont(1)}}$, $\boldsymbol{\supset_{PComp(1)}}$, $\boldsymbol{\neg}$ и $\boldsymbol{\supset_{LPF}}$, получаем, что

(5.3) $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v_0(p_2) = (\boldsymbol{\neg} v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}} v_0(p_2) = \boldsymbol{\neg}((\boldsymbol{\neg} v_0(p_2) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \neg v_0(p_1)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v_0(p_2) = \boldsymbol{\neg}((v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$.

(5.4) $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v_0(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}} v_0(p_2) = |\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v_0(p_2) = |\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$ (из (5.2) и (5.3)).

Снимая допущение (5.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (5). Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$).

Всякая операция $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset_{PCont}}, \boldsymbol{\supset_{LPF}}, \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}}$ *выразима через операции* $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 2 достаточно доказать утверждение (6).

(6) Для всякой $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}$ $\neg\&\vee\supset$-оценки v: $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$.

Докажем утверждение (6).

(6.1) v_0 есть $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}$ $\neg\&\vee\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (6.1) и определение отображения $||^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (6.2) $|(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2)$, $|(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $|\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{PCont}$,$\supset_{LPF}$, $\supset_{PComp(1)}$, $\neg$, $\vee$ и $\supset_{PCont(1)}$, получаем, что

(6.3) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)$.

(6.4) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$ (из (6.2) и (6.3)).

Снимая допущение (6.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (6).

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$).

Всякая операция $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PCont(1)}$ *выразима через операции* $\neg, \&, \vee, \supset_{PComp(1)}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 3 достаточно доказать утверждение (7).

(7) Для всякой $\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}$ $\neg\&\vee$ $\supset$-оценки v: $v(p_1) \supset_{PCont} v(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \supset_{PCont(1)} v(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$.

Докажем утверждение (7).

(7.1) v_0 есть $\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}$ $\neg\&\vee$ $\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (7.1) и определение отображения $||^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (7.2) $|((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset} = ((v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)) \supset_{PComp(1)}$

$\neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $|(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} v_0(p_2)) \vee v_0(p_2)$, $|\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\neg\&\vee\supset} = \neg v_0(p_2) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} \neg v_0(p_1)$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{\boldsymbol{PCont}}$,$\supset_{\boldsymbol{LPF}}$, $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$, $\neg$, $\vee$ и $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$, получаем, что

(7.3) $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PCont}} v_0(p_2) = ((v_0(p_2) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} v_0(p_1)) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} v_0(p_2)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}} v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}} \neg v_0(p_1)$.

(7.4) $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PCont}} v_0(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v_0(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}} v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\neg\&\vee\supset}$ (из (7.2) и (7.3)).

Снимая допущение (7.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (7).

Q.E.D.

ЛЕММА. Пусть s_1, s_2, s_3 и s_4 есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$, а v есть такая $\neg\&\vee \supset_{\boldsymbol{PCont}}\ s_1s_2s_3s_4$-оценка, что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

Для всякой $\neg\&\vee \supset_{\boldsymbol{PCont}}\ s_1s_2s_3s_4$-формулы A верно, что $|A, v|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}s_1s_2s_3s_4} = \frac{1}{2}$.

Лемма доказывается индукцией по построению $\neg\&\vee \supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1s_2s_3s_4$-формулы.

ТЕОРЕМА 4 (о невыразимости $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$, $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ и $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$).

Операции $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$, $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ *и* $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ *не являются выразимыми через операции* $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Доказательство. Доказажем, что $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Доказательство проводим от противного.

(1) $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ выразима через $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$ (допущение).

(2) Существуют попарно различные символы s_1, s_2, s_3, s_4, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ и существует такая $\neg\&\vee \supset_{\boldsymbol{PCont}}\ s_1s_2s_3s_4$-формула Φ, что для

всякой $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1s_2s_3s_4$-оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v(p_2) = |\Phi, v|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s_1s_2s_3s_4}$ (из (1), по определению 3).

Пусть (3)s_1', s_2', s_3', s_4' есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$, а Φ' есть такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1's_2's_3's_4'$-формула, что для всякой $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1's_2's_3's_4'$-оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v(p_2) = |\Phi', v|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s_1's_2's_3's_4'}$.

Очевидно, что (4) существует такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1's_2's_3's_4'$-оценка v, что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

Пусть (5) v' есть такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1's_2's_3's_4'$-оценка, что $v'(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

(6) $|\Phi', v'|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s_1's_2's_3's_4'} = \frac{1}{2}$ (из (3) и (5), по Лемме).

(7) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) = |\Phi', v'|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s_1's_2's_3's_4'}$ (из (3) и (5)).

Опираясь на утверждения (6) и (7), получаем, что

(8) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) \neq 1$.

(9) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) = 1$ (из того, что $v'(p_1) = v'(p_2) = \frac{1}{2}$, по определению $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$).

Утверждение (9) противоречит утверждению (8). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ не является выразимой через $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Доказательство того, что $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$, и доказательство того, что $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee$, $\supset_{\boldsymbol{PCont}}$, аналогичны данному выше доказательству того, что $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Q.E.D.

Автор выражает благодарность В. М. Попову за постановку проблемы и сделанные им исправления в черновом варианте статьи и А. С. Карпенко, прорецензировавшему статью и сообщившему, что уже в работе [6] приведены те же, что и в настоящей статье, тождества, выражающие импликацию $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ и импликацию $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ (в целях сохранения целостности изложения мы не стали опускать здесь обоснование указанных тождеств).

Литература

[1] *Розоноэр Л. И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. 1 // Автоматика и телемеханика, № 6, 1983. С. 113–124.

[2] *Avron A.* Natural 3-valued Logics: Characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. 1991. P. 276–294

[3] *Попов В. М.* Между Par(1) и множеством всех формул // Объединенный научный журнал. № 7–8 (254-255). М., 2011. С. 35–39.

[4] *Попов В. М.* Между Par и множеством всех формул // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С. 93–95.

[5] *Знаменская Н. А., Попов В. М.* Паранормальная логика PContPComp как пересечение паранепротиворечивой логики PCont и параполной логики PComp // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С.63–65.

[6] *Томова Н. Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М.-СПб., 2010. С.63–65.