О двух предполных классах трехзначной логики Лукасевича

Н. Н. Преловский

abstract. Two submaximal classes of 3-valued functionally complete iterative system are characterized in the paper. These two classes are functionally precomplete classes of the famous Łukasiewicz's logic.

Keywords: Łukasiewicz logic, functional class, submaximal class, iterative system

Данная работа посвящена анализу вопросов, связанных с критерием функциональной полноты замкнутых классов функций, соответствующих различным трехзначным логикам. Известный критерий функциональной полноты был сформулирован А.В. Кузнецовым и приводится в [11]. Необходимым условием для применения данного критерия является перечисление всех предполных классов, содержащихся в исследуемом классе. Поиск предполных классов систем функций, соответствующих различным трехзначным логикам, приобретает в связи с этим немаловажное значение в решении вопроса о функциональной полноте.

В работе С.В. Яблонского [12] содержится описание восемнадцати предполных классов трехзначной логики Поста P_3, что позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие полноты в этой системе. М.Ф. Раца в [7] описал десять предполных классов трехзначной логики Гейтинга H_3 $S_0, \ldots, S_9$. В.К. Финн в [9] дал описание одиннадцати предполных классов трехзначной логики Бочвара B_3. Работы Раца и Финна также позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия полноты замкнутого класса функций в H_3 и B_3.

Однако для трехзначной логики Лукасевича L_3, являющейся, как H_3 и B_3, функционально неполной (т. е. $L_3 \subset \mathrm{P}_3$ и $\mathrm{P}_3 \not\subset L_3$), аналогичные результаты отсутствуют. Из теоремы 2 в [7] следует, что Н_3 предполна в L_3. Тем не менее, в известной литературе отсутствует описание предполных в L_3 классов функций, отличных от Н_3. Ниже будут рассмотрены два других предполных класса трехзначной логики Лукасевича, а также приведены доказательства их предполноты.

1 Основные понятия

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся используемой нотации, а также дадим определения основных понятий, встречающихся в настоящей работе.

В качестве переменных для аргументов функций используются латинские буквы x, y, z, возможно с индексами. Для обозначения значений переменных используются греческие буквы α, β и γ также возможно с индексами. Запись функций осуществляется с использованием известного понятия формулы логики высказываний [7]. Аргументы функций, как и сами функции, принимают значения из множества $\{1, 1/2, 0\}$. Значение $1/2$ будем называть промежуточным. В рассмотрении используются понятия операции суперпозиции, замыкания системы функций относительно операции суперпозиции, замкнутого класса, функционально полного и предполного классов, а также понятие базиса.

Дадим вначале определение операции суперпозиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если имеется система функций

$$\{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_r(x_1, ..., x_n)\},$$

то суперпозицией функций данной системы называется либо функция, полученная из уже имеющихся функций путем замены переменных, либо, если установлено, что функции $f_j^i(x_{1_{ij}}, ..., x_{n_{ij}}), ..., f_m^k(x_{1_{km}}, ..., x_{n_{km}})$, а также функция $f_t^s(x_{j_{st}}, ..., x_{m_{st}})$ являются суперпозициями исходной системы, то и функция

$$f_t^s(f_j^i(x_{1_{ij}}, ..., x_{n_{ij}}), ..., f_m^k(x_{1_{km}}, ..., x_{n_{km}}))$$

также является суперпозицией функций данной системы.

Говоря неформально, речь идет о всевозможных подстановках вместо аргументов исходной системы функций. Буквы F и G

будем в дальнейшем использовать для обозначения произвольных систем и классов функций.

В [4], [11], [12] содержится определение замыкания и замкнутого класса функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $[F]$ называется замыканием системы (класса) функций F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и не содержит никаких других функций.

Оператор замыкания $[\dots]$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

- $F \subseteq [F]$
- $[[F]] = [F]$
- $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$
- Множество функций F замкнуто, если $F = [F]$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему функций называем базисом данного класса функций, если она эквивалентна этому классу, но никакая ее собственная подсистема не эквивалентна ему. Система функций G, эквивалентная классу F, называется (функционально) полной в этом классе, т. е. G (функционально) полна в $F \Leftrightarrow_{def} [G] = F$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система функций G, функционально полная в классе $F = P_k$, где P_k есть k-значная логика Поста, называется функционально полной (о логиках Поста см. [5, с. 88–91]).

Самым важным для дальнейшего рассмотрения является следующее понятие ***предполного в F класса***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если G и F — замкнутые классы функций и $G \subset F$, но $F \not\subset G$, то G называется предполным в F, если и только если замыкание объединения класса G и функции $f(x_1, \dots, x_n)$ такой, что $f(x_1, \dots, x_n) \in F$ и $f(x_1, \dots, x_n) \notin G$, совпадает с F, т. е. G предполон в $F \Leftrightarrow_{def} f(x_1, \dots, x_n) \in F \& f(x_1, \dots, x_n) \notin G \Rightarrow [G \cup f(x_1, \dots, x_n)] = F$, где $[G \cup f(x_1, \dots, x_n)]$ есть замыкание теоретико-множественного объединения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество функций k-значной логики Поста P_k, где $k \in \{2, 3, \dots\}$, есть множество $\{f(x_1, \dots, x_n) : \{0, 1, \dots,$

$k - 1\}^n \longmapsto \{0,1,\ldots,k - 1\}\}$, где $\{0,1,\ldots,k - 1\}^n$ есть декартова n-ая степень множества $\{0,1,\ldots,k - 1\}$. В частности, множество функций P_3 содержит все функции, аргументы которых, как и сами функции, принимают значения из множества $\{0,\ 1,\ 2\}$. В настоящей работе приняты иные обозначения для элементов множества значений функций и их аргументов: значение 0 остается без изменений; вместо значения 1 пишем 1/2; вместо значения 2, используем 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С понятием предполноты непосредственно связано определяемое индуктивно понятие глубины.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.

- Класс функций, соответствующий k-значной логике Поста P_k, имеет глубину $d(P_k)$, равную нулю;

- Если класс $F \subseteq P_k$ имеет глубину $d(F)$, равную n, и класс G предполон в F, то $d(G) = n + 1$.

В частности, любой предполный в P_k класс имеет глубину $d(F) = 1$.

2 Класс функций, соответствующий трехзначной логике Лукасевича

Самой известной и исторически первой неклассической многозначной логикой является трехзначная логика Лукасевича L_3. Дальнейшие результаты имеют отношение к данной логике, поэтому имеет смысл рассмотреть ее специально. В данном разделе будет также доказано утверждение о том, что множество функций логики Лукасевича является предполным в трехзначной логике Поста и совпадает с множеством функций, сохраняющих неравенство промежуточного значения в P_3, а именно: $L_3 = \{f(x_1,\ldots,x_n) \in P_3 : \forall \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle\, (\neg\exists i \in \{1,2,\ldots,n\}(\alpha_i = 1/2) \Rightarrow f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq 1/2)\}$. Множество функций логики Лукасевича может быть определено как замыкание системы функций $\{\neg_L x, \mathrm{x} \to y\}$, где $\neg_L x = 1 - \mathrm{x}$, а функция $\mathrm{x} \to y$, называемая импликацией Лукасевича, определятся таблично:

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

Заметим, что существуют и другие системы функций, полные в L_3. В частности, в дальнейшем будут использоваться следующие полные в L_3 системы функций: $\{\neg_L x, \Box\mathrm{x}, x \vee y\}$, $\{\neg_L x, \Diamond\mathrm{x}, x \vee y\}$ и $\{\neg_L x, \nabla\mathrm{x}, x \vee y\}$, — где функция $\Box$x называется оператором необходимости, функция $\Diamond$x называется оператором возможности, а функция ∇x называется оператором случайности (см. [6, разд. 2.1.2]). Функция $x \vee y$ есть $\max(x, y)$. Дадим табличные определения операторов необходимости, возможности и случайности:

x	$\Box$x	$\Diamond$x	∇x
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

Очевидно, что все вышеприведенные функции удовлетворяют условию сохранения неравенства промежуточного значения, а операция суперпозиции сохраняет свойство удовлетворения данному условию. Покажем теперь, что добавление к полной в L_3 системе функций функции из P_3, не сохраняющей неравенства промежуточного значения, дает систему, полную в P_3.

Для этого используем утверждение, содержащееся в [5], а именно: добавление к функциям из L_3 функции T(x), принимающей значение 1/2 на всех значениях x, дает систему, полную в P_3. Функция T(x) называется оператором Слупецкого.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{P}_3$, такую, что:

$$\exists \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle\, (\neg \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}(\alpha_i = 1/2) \& f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1/2).$$

Поскольку L_3 содержит константы 1 и 0, может быть осуществлена подстановка соответствующих констант вместо переменных x_i $(1 \leq i \leq n)$ в $f(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от того, чему равны соответствующие значения α_i в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. В результате получим функцию, тождественно равную промежуточному значению. Следовательно, $[L_3 \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = \mathrm{P}_3$, что и требовалось доказать.

3 Класс K_3^D диагональных функций

Докажем теперь предполноту класса диагональных функций K_3^D в L_3. Для доказательства потребуется использовать функции сильной логики Клини K_3. Базовыми в K_3 являются функции $\{\neg_L x, x \vee y\}$, где, как и прежде, $x \vee y = \max(x, y)$, а $\neg_L x = 1 - \mathrm{x}$.

Класс K_3^D определяется следующим образом:

$K_3^D = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$
$((\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}(\alpha_i = 1/2) \Rightarrow (f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1 \Rightarrow$
$\forall \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle (f(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 1))) \;\&\; (\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}(\beta_j = 1/2) \Rightarrow$
$(f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0 \Rightarrow \forall \langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle (f(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) = 0))))\}$,
где $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle$ есть результаты произвольных замен всех вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ и $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, соответственно, на единицы и нули.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предыдущее определение означает, что каждый из наборов значений $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ порождает, возможно, пустой класс подстановок $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle$ единиц и нулей в исходные наборы. Эти подстановки могут быть просто и естественно описаны при помощи введенного Ю.В. Ивлевым в [4] понятия квазифункции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под квазифункцией будем понимать соответсвие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же самого множества.

Дадим табличное определение одноместной квазифункции $\varphi(x)$:

x	$\varphi(x)$
1	1
1/2	1/0
0	0

Здесь запись $1/0$ означает, что значению $1/2$ ставится в соответствие 1 или 0. С использованием данной квазифункции определение класса K_3^D может быть записано в следующем виде:

$K_3^D = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle ((\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(\alpha_i = 1/2)) \Rightarrow ((f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, 0\}) \Rightarrow (f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)))))\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Классу K_3^D принадлежат все функции сильной регулярной логики Клини K_3, а также константы 1 и 0, т. е. $[K_3 \cup \{1, 0\}] \subset \mathrm{K}_3^D$. Однако K_3^D не принадлежит ни одна из функций $\Box$x, $\Diamond$x, ∇x, а также импликация Лукасевича $x \to y$. Следовательно, класс диагональных функций не совпадает с классом функций логики Лукасевича. Данный класс содержит и функции, не являющиеся регулярными, по Клини. Примером такой функции является $\psi(x, y)$, определяемая следующей таблицей:

ψ	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1	1/2
0	1	1/2	1

Докажем, что K_3^D является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат K_3^D, то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$ также принадлежит K_3^D. Поскольку функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$, $\ldots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат L_3, то на всех наборах $\langle \alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{ns} \rangle$ и $\langle \beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}, \beta_{12}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{n2}, \ldots, \beta_{1s}, \beta_{2s}, \ldots, \beta_{ns} \rangle$ значений переменных $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \ldots, x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}$, не содержащих вхождений промежуточного значения, функция Φ, очевидно, удовлетворяет определению K_3^D.

Если же в наборе значений переменных функции Φ имеются вхождения промежуточного значения, то Φ либо принимает промежуточное значение, либо значение Φ принадлежит множеству $\{1, 0\}$. В первом случае функция Φ удовлетворяет условиям определения класса K_3^D. Во втором случае данная функция также удовлетворяет условиям определения, поскольку для каждой из функций f_j $(1 \leq j \leq s)$ будет иметь место один из следующих случаев:

1. Если значение функции f_j на некотором наборе значений переменных равняется $1/2$, то на любых соответствующих поднаборах $\left\langle \alpha'_{1j}, \ldots, \alpha'_{nj} \right\rangle$ и $\left\langle \beta'_{1j}, \ldots, \beta'_{nj} \right\rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ значение f_j принадлежит $\{1,\ 0\}$.

Однако поскольку $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит K_3^D, то и функция Φ не изменит в этом случае своего значения.

2. Если f_j принадлежит множеству $\{1,\ 0\}$, то так как $f_j \in \mathrm{K}_3^D$, значение данной функции не изменится на любых соответствующих поднаборах $\left\langle \alpha'_{1j}, \dots, \alpha'_{nj} \right\rangle$ и $\left\langle \beta'_{1j}, \dots, \beta'_{nj} \right\rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$, а следовательно, значение функции Φ не изменится и в этом случае.

Следовательно, функция Φ также принадлежит K_3^D, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1. *Класс диагональных функций* K_3^D *является предполным в* L_3.

Доказательство. Добавим к функциям K_3^D функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$, такую что $f(x_1, \dots, x_n) \notin \mathrm{K}_3^D$. Поскольку $f(x_1, \dots, x_n) \notin \mathrm{K}_3^D$, возможны случаи:

1. Существует набор $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ такой, что в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. А также существует набор $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \neq 1$. Так как $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \neq 1/2$, поскольку в $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех α_i $(1 \leq i \leq n)$, принадлежащих множеству $\{1,\ 0\}$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, в функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \dots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L$x в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L$x.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 1$ и $f'(1) \neq 1$ или $f'(0) \neq 1$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f_1'(x)$
1	0
1/2	1
0	1

x	$f_2'(x)$
1	1
1/2	1
0	0

x	$f_3'(x)$
1	0
1/2	1
0	0

Функции f_2'(x) и f_3'(x) совпадают с операторами $\Diamond$x и ∇x, соответственно. Функция $\neg_L f_1'$(x) эквивалентна оператору $\Box$x. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L$x и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L$x, $\Box$x,
$x \vee y\}$, $\{\neg_L$x, $\Diamond$x, $x \vee y\}$ и $\{\neg_L$x, ∇x, $x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 1 завершено.

2. Существует набор $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ такой, что в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$. А также существует набор $\langle\beta_1', \ldots, \beta_n'\rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\beta_1', \ldots, \beta_n') \neq 0$. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\beta_1', \ldots, \beta_n') \neq 1/2$, поскольку в $\langle\beta_1', \ldots, \beta_n'\rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\beta_1', \ldots, \beta_n') = 1$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех β_j $(1 \leq j \leq n)$, принадлежащих множеству $\{1,\ 0\}$ в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$, в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \ldots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L$x в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle\beta_1', \ldots, \beta_n'\rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L$x.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 0$ и $f'(1) \neq 0$ или $f'(0) \neq 0$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f_1'(x)$
1	1
1/2	0
0	0

x	$f_2'(x)$
1	0
1/2	0
0	1

x	$f_3'(x)$
1	1
1/2	0
0	1

Функция f_1'(x) эквивалентна оператору $\Box$x. А функции $\neg_L f_2'$(x) и $\neg_L f'_3(\mathrm{x})$ совпадают с операторами $\Diamond \mathrm{x}$ и $\nabla \mathrm{x}$ соответственно. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L \mathrm{x}$ и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L \mathrm{x}, \Box \mathrm{x}, x \vee y\}$, $\{\neg_L \mathrm{x}, \Diamond \mathrm{x}, x \vee y\}$ и $\{\neg_L \mathrm{x}, \nabla \mathrm{x}, x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 2 завершено.

Доказательство теоремы завершено. Q.E.D.

Таким образом, установлено, что класс диагональных функций является предполным в классе функций трехзначной логики Лукасевича.

4 Класс H_3^*, двойственный трехзначной логике Гейтинга

В [7] было показано, что класс функций трехзначной логики Гейтинга H_3 является предполным в L_3. В этом разделе будет доказана теорема о том, что и класс H_3^*, двойственный H_3, также предполон в L_3. В доказательстве предполноты H_3 существенным образом используется тот факт, что множество функций данного класса совпадает с множеством функций, дистрибутивных относительно функции $\neg\neg\mathrm{x}$, где $\neg x$ эквивалентно функции $\neg_L \Diamond x$ логики Лукасевича. А именно: $\mathrm{H}_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \neg\neg f(x_1, \ldots, x_n) = f(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)\}$. Достаточно заметить, что $\neg\neg\mathrm{x} = \neg_L \Diamond \neg_L \Diamond x = \Box \Diamond x = \Diamond x$. Тогда приведенное определение можно заменить эквивалентным ему:

$$\mathrm{H}_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \Diamond f(x_1, \ldots, x_n) = f(\Diamond x_1, \ldots, \Diamond x_n)\}$$

Таким образом, ***двойственный к*** H_3 ***класс*** может быть определен следующим способом[1]:

$$\mathrm{H}_3^* = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \Box f(x_1, \ldots, x_n) = f(\Box x_1, \ldots, \Box x_n)\}$$

Докажем, что класс H_3^* является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$, $\ldots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат H_3^*, то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$ также принадлежит H_3^*.

[1] Заметим, что класс H_3^*, по всей видимости, совпадает с классом функций логики G_3^*, впервые рассмотренной А. С. Карпенко в [5] под названием трехзначной логики Брауэра.

Так как функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит H_3^*, то $\Box\Phi = f(\Box f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}),\ \Box f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots,\ \Box f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$. Поскольку каждая из функций f_j $(1 \le j \le s)$ принадлежит H_3^*, то для них выполняются равенства $\Box f_j(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) = f_j(\Box x_{1j}, \Box x_{2j}, \ldots, \Box x_{nj})$. Следовательно, $\Box\Phi = f(f_1(\Box x_{11}, \Box x_{21}, \ldots, \Box x_{n1}), f_2(\Box x_{12}, \Box x_{22}, \ldots, \Box x_{n2}), \ldots, f_s(\Box x_{1s}, \Box x_{2s}, \ldots, \Box x_{ns}))$.

Значит, функция Φ также принадлежит H_3^*, что и требовалось доказать.

Для доказательства предполноты H_3^* потребуется использовать функции трехзначной логики Брауэра G_3^*. Исходными в логике Брауэра являются функции $\{\neg_{G_3^*} x, x \& y, x \vee y, x \Leftarrow y\}$, где $x \& y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, а функции $\neg_{G_3^*} x$ и $x \Leftarrow y$ определяются следующими таблицами:

x	$\neg_{G_3^*} x$
1	0
1/2	1
0	1

$\Leftarrow$	1	1/2	0
1	0	0	0
1/2	1	0	0
0	1	1/2	0

H_3^* содержит функцию $\Box$x, в силу очевидного равенства $\Box\Box$x $=$ $\Box\Box$x. Покажем, что все исходные функции G_3^* принадлежат H_3^*, то есть $G_3^* \subset \mathrm{H}_3^*$. Для этого построим истинностные таблицы для каждой из функций, входящих в следующие пары:

1. $\Box\neg_{G_3^*} x$, $\neg_{G_3^*} \Box x$;
2. $\Box(x \& y)$, $\Box x \& \Box y$;
3. $\Box(x \vee y)$, $\Box x \vee \Box y$;
4. $\Box(x \Leftarrow y)$, $\Box x \Leftarrow \Box y$

Приведем здесь в качестве примера таблицы всех пар функций.

1.

$\Box$	$\neg_{G_3^*}$	x
0	0	1
1	1	1/2
1	1	0

$\neg_{G_3^*}$	$\Box$	x
0	1	1
1	0	1/2
1	0	0

2.

$\Box$	$(x$	&	$y)$
1	1	1	1
0	1	1/2	1/2
0	1	0	0
0	1/2	1/2	1
0	1/2	1/2	1/2
0	1/2	0	0
0	0	0	1
0	0	0	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	&	$\Box$	y
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1/2
1	1	0	0	0
0	1/2	0	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

3.

$\Box$	$(x$	$\vee$	$y)$
1	1	1	1
1	1	1	1/2
1	1	1	0
1	1/2	1	1
0	1/2	1/2	1/2
0	1/2	1/2	0
1	0	1	1
0	0	1/2	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	$\vee$	$\Box$	y
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1/2
1	1	1	0	0
0	1/2	1	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

4.

$\Box$	$(x$	$\Leftarrow$	$y)$
0	1	0	1
0	1	0	1/2
0	1	0	0
1	1/2	1	1
0	1/2	0	1/2
0	1/2	0	0
1	0	1	1
0	0	1/2	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$\Box$	y
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1/2
1	1	0	0	0
0	1/2	1	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы этого раздела.

ТЕОРЕМА 2. *Класс* H_3^* *является предполным в* L_3.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$ такую, что $f(x_1, \dots, x_n) \notin \mathrm{H}_3^*$. Заметим, что H_3^* содержит функции $\{\Box x, x \vee y\}$. Следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что $\neg_L x \in [\mathrm{H}_3^* \cup f(x_1, \dots, x_n)]$, так как система функций $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$ является полной в L_3. Поскольку $f(x_1, \dots, x_n) \notin \mathrm{H}_3^*$, то существует набор $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$, такой, что $\Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\Box\alpha_1, \dots, \Box\alpha_n)$. Так как $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$, и $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$, то в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения. Осуществим подстановку переменной x, вместо всех вхождений промежуточного значения в $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. На место переменных, не затронутых предыдущей подстановкой в $f(x_1, \dots, x_n)$, подставим константы 1 или 0 в зависимости от того, чему равны соответствующие $\alpha_j \in \{1, 0\}$ $(1 \leq j \leq n)$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку константы 1 и 0 принадлежат классу H_3^*. В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что: а) $f'(1/2) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; и б) $f'(0) = f(\Box\alpha_1, \dots, \Box\alpha_n)$ (так как $\Box 1/2 = 0$, а $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$). Поскольку функция $\Box$x удовлетворяет условию $\forall x, y(x = y \Rightarrow \Box x = \Box y)$, то из а) следует, что $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Таким образом, получаем $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\Box\alpha_1, \dots, \Box\alpha_n) = f'(0)$, и отсюда $\Box f'(1/2) \neq f'(0)$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из шести функций $f'_1(x), \dots, f'_6(x)$:

x	$f'_1(x)$	$f'_2(x)$	$f'_3(x)$	$f'_4(x)$	$f'_5(x)$	$f'_6(x)$
1	1	0	0	1	1	0
1/2	1/2	1/2	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1

Покажем теперь, что функция $\neg_L x$ может быть получена с использованием каждой из функций $f'_1(x), \dots, f'_6(x)$ и, быть может, других функций из H_3^*. А именно покажем, что $\neg_L x = \Box x \Leftarrow f'_1(x) = f'_2(x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f'_3(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f'_4(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f'_5(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f'_6(x) \vee x)$. Приведем таблицы полученных функций:

$\Box$	x	$\Leftarrow$	f'_1	(x)
1	1	0	1	1
0	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(\neg_{G_3^*}$	f_3'	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	1	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(\neg_{G_3^*}$	f_4'	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(f_5'$	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(f_6'$	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

Таким образом, теорема о предполноте класса H_3^*, двойственного трехзначной логике Гейтинга, в L_3 доказана. Q.E.D.

Литература

[1] *Гаврилов Г. П.* О мощности множеств замкнутых классов конечной высоты в PA0 // ДАН. 1964. Т. 158. № 3. С. 503–506.

[2] *Гаврилов Г. П., Яблонский С. В.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[3] *Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В.* О предполных классах в k-значных логиках // ДАН. 1969. Т. 186. № 3. С. 509–512.

[4] *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.

[5] *Карпенко А. С.,* Логики Лукасевича и простые числа, М.: URSS, 2007.

[6] *Карпенко А. С.* Многозначные логики / Сер. Логика и компьютер. М.: Наука, 1997.

[7] *Раца М. Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского. Кишинев. С. 185–213.

[8] *Раца М. Ф.* О классе функций логики, соответствующей первой матрице Яськовского // Исследования по общей алгебре. Кишинев. 1965. С. 99–110.

[9] *Финн В. К.* О критерии функциональной полноты в B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[10] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН. 1954. Т. 95. № 6. С. 1153–1155.

[11] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[12] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.