Интуитивная семантика для релевантного следования

Д. В. Зайцев

ABSTRACT. In this paper I return an old but fruitful idea suggested independently by J.M. Dunn and E.K. Voishvillo of true (relevant) entailment as a relation between premisses and conclusion when an information contained in conclusion as a part of information contained in premisses. In so doing I consider Belnap's famous logical and approximation lattices that form bilattice FOUR and prove that informational semantics for first-degree entailment can be developed on the basis of approximation lattice taken alone.

Ключевые слова: релевантное следование первого уровня, бирешетка, интуитивная семантика.

Среди множества исследовательских программ в области релевантной логики выделяется оригинальный подход, развиваемый Е.К. Войшвилло. Отличительными особенностями этого подхода можно считать относительную простоту предпринимаемых построений и ясную содержательную интерпретацию семантических понятий. Е.К. Войшвилло исходит из понимания логического следования, предложенного В. Аккерманом: $A \models B \Leftrightarrow$ логическое содержание B составляет часть логического содержания A. При этом, с точки зрения Е.К. Войшвилло, «логическое содержание высказывания естественно трактовать как информацию, которую содержит высказывание в силу своей логической формы, т. е. независимо от значений входящих в него дескриптивных терминов» [1, с. 70], т. е. «$A \models B \Leftrightarrow$ если и только если информация B составляет часть информации A» [3, с. 299]. Не будет преувеличением сказать, что информационная трактовка релевантного следования представляет собой ключевой момент в развиваемом Е.К. Войшвилло понимании релевантной логики (см., например, [2]).

Другой патриарх релевантной логики Дж. Майкл Данн, также не обошел вниманием интуитивно-информационную трактовку логического следования. Хорошо известна «интуитивная семантика» для первоуровневого релевантного следования, предложенная Данном в [10] и [11]. Базовым семантическим понятием оказывается понятие ситуации, а вместо *функции* приписывания значений предлагается использовать трехместное *отношение* между множеством высказываний, множеством ситуаций и множеством истинностных значений $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. В результате получается, что для произвольного предложения существует четыре возможности: ему может быть приписано значение $\mathbf{t}$, ему может быть приписано значение $\mathbf{f}$, ему могут быть приписаны оба истинностных значения, и ему может быть не приписано ни одно из истинностных значений. Таким образом, абстрактные ситуации в интуитивной модели Данна могут быть противоречивыми и неполными.

В более ранней работе [9], представляющей собой докторскую диссертацию, Дж. Майкл Данн приходит к тому же результату, но другим способом. Для каждого высказывания вводится понятие «пропозиционального суррогата» как упорядоченной пары $< X, Y >$, компоненты которой представляют собой множества. Элементы X интуитивно трактуются как темы («topics»), относительно которых данное суждение (пропозиция) несет определенную информацию, соответственно, элементы Y — это темы, по которым определенную информацию несет отрицание данного суждения. Все эти темы образуют множество U, называемое «универсум рассуждений». Интерпретация в U — это функция I, приписывающая пропозициональный суррогат каждому высказыванию. Как замечают Шрамко и Ванзинг [18], введенное Данном понятие интерпретации представляет собой обобщение классического понятия функции приписывания истинностных значений.

Следующий шаг в развитии идей о связи релевантного следования и информации был сделан Нуэлем Д. Белнапом [7, 8], предложившим свою известную полезную логику для рассуждающего компьютера. Теперь возможные подмножества множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ рассматриваются как самостоятельные истинностные значения, что приводит, по мнению Шрамко и Ванзинга, к обобщению уже самого понятия истинностного значения. Как известно, результатом интуитивных рассуждений Белнапа стало множество значений $\mathbf{4} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}$, на котором достаточно естественным образом определяется функция приписывания значений и задается отношение логического следования. С алгебраической точки зрения полезной логике Белнапа соответствует решетка с двумя отношениями порядка: логическим (или упорядочение по истинности) и информационным.

Еще через несколько лет Метью Гинзберг в [16] и [17] ввел понятие бирешетки и показал, что значения Белнапа образуют наименьшую нетривиальную бирешетку (см. рис. 1).

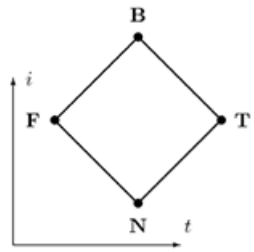

Рис. 1. Бирешетка $FOUR_2$.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести некоторые важные понятия, касающиеся бирешеток. Эти алгебраические структуры активно изучались А. Авроном и М. Фиттингом [4, 5, 6, 12, 13, 14, 15]. Для определения бирешетки удобнее, следуя М. Фиттингу, начать с понятия пред-бирешетки.

Пред-бирешетка — это структура $B =< B, \leqslant_t, \leqslant_i >$, где B — непустое множество, а $\leqslant_t, \leqslant_i$ — отношения частичного порядка такие, что $< B, \leqslant_t >$ и $< B, \leqslant_i >$, представляют собой решетки. Пред-бирешетка является полной, если для каждого упорядочивания существуют объединение и пересечение.

Понятие пред-бирешетки не предполагает каких-либо дополнительных связей или отношений между двумя заданными на ней порядками. Соответственно, под *бирешеткой* (в широком смысле) Фиттинг понимает пред-бирешетку, на которой два отношения порядка каким-либо образом связаны. В исходном (узком) определении Гинзбурга, во-первых, рассматривались два не обязательно совпадающих множества, на которых были заданы отношения порядка, а во-вторых, указанная связь осуществлялась через отрицание, представляющее собой решеточный гомоморфизм. Полезно привести еще несколько связанных понятий.

Бирешетка является чередующейся (interlaced), если порождаемые каждым порядком операции объединения и пересечения являются монотонными по отношению к обоим порядкам (свойство чередования).

Бирешетка является дистрибутивной, если все возможные законы дистрибутивности (для четырех операций их оказывается двенадцать) выполняются. Всякая дистрибутивная решетка является чередующейся.

Операция отрицания (дополнения) на бирешетке предполагает, во-первых, сохранение i-порядка, во-вторых, обращение t-порядка, и в-третьих, выполнение свойства «двойного отрицания». В принципе это представляется вполне естественным, если интуитивно понимать i-порядок как порядок приращения знания. При такой интерпретации, если знание об A включается в знание о B, то знание об отрицании A не превышает знание об отрицании B.

Кроме того, на бирешетке может быть задана двойственная операция, сохраняющая t-порядок, «оборачивающая» i-порядок и также обладающая свойством «двойного дуального отрицания». Введем эти понятия строго.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $B =< B, \leqslant_t, \leqslant_i, - >$ бирешетка, тогда унарная операция $-$ обладает следующими свойствами:

b1. если $a \leqslant_t b$, то $-a \leqslant_t -b$;

b2. если $a \leqslant_i b$, то $-a \leqslant_i -b$;

b3. $- - a = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Унарный оператор $\perp$ на бирешетке обладает следующими свойствами:

c1. если $a \leqslant_t b$, то $\perp a \leqslant_t \perp b$;

c2. если $a \leqslant_t b$, то $\perp a \leqslant_t \perp b$;

c3. $\perp\perp a = a$;

c4. $\perp -a = - \perp a$.

Задача данной статьи состоит в том, чтобы показать, что определенное стандартным образом в семантике Белнапа отношение логического следования соответствует информационной трактовке следования Е.К. Войшвилло, т. е. $A \models B$, если и только если $I(B) \subseteq I(A)$.

Будем исходить из понятия стандартного языка релевантной логики первого уровня со связками $\wedge, \vee, \neg$. Рассмотрим бирешетку $FOUR_2 =< \mathbf{4}, \leqslant_t, \cap, \cup, -, \leqslant_i, \prod, \coprod, * >$, где $\cap, \cup, -$ представляют собой пересечение, объединение и дополнение на решетке $< \mathbf{4}, \leqslant_t >$, а $\prod, \coprod, *$ — те же операции на решетке $< \mathbf{4}, \leqslant_i >$ Легко заметить, что унарная операция $*$ представляет собой, во-первых, охарактеризованный выше опреатор «двойственного отрицания» $\perp$, а во-вторых, представляет собой алгебраический анализ небезызвестной функции звезды («star-function» — $*$). Пусть данная бирешетка выступает в качестве модельной структуры. Зададим на ней две функции ν и i, понимаемые как функция приписывания значений и функция «информатизации», ставящая каждой формуле в соответствие ее информацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть ν представляет собой отображение из множества пропозициональных переменных в множество $\mathbf{4}$, обладающее следующими свойствами:

$$\nu(A \wedge B) = \nu(A) \cap \nu(B);$$

$$\nu(A \vee B) = \nu(A) \cup \nu(B);$$

$$\nu(\neg A) = -\nu(A).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для произвольных формул A и B $A \models B iff \forall \nu (\nu(A) \leqslant \nu(B))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть i представляет собой отображение из множества пропозициональных переменных в множество $\mathbf{4}$, обладающее следующими свойствами:

$$i(A \wedge B) = i(A) \prod i(B);$$

$$i(A \vee B) = i(A) \coprod i(B);$$

$$i(\neg A) = *i(A).$$

Легко показать, что для произвольных формул A и B $i(A) \leqslant_i i(B) iff \forall i(i(A) \leqslant i(B))$.

Для решения поставленной задачи необходимо показать, что $A \models B \Leftrightarrow \forall i(i(B) \leqslant i(A))$, т. е. $\forall \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B)) \Leftrightarrow \forall i(i(B) \leqslant i(A))$.

Начнем с формулировки двух лемм. Для упрощения дальнейших доказательств удобно рассматривать элементы $\mathbf{4}$ как элементы множества-степени $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}\}$, $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\mathbf{N} = \emptyset$.

ЛЕММА 6. $\forall i \exists \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$

Прежде чем осуществить доказательство леммы, покажем, что по функции ν можно задать оценку i, обладающую искомыми свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\vec{\nu}$ такова, что

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{F} iff i(p) = \mathbf{B};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{B} iff i(p) = \mathbf{T};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{T} iff i(p) = \mathbf{N};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{N} iff i(p) = \mathbf{F};$$

Распространим функцию $\vec{\nu}$ на произвольную формулу языка стандартным образом по аналогии с определением 3. Покажем, что новая оценка $\vec{\nu}$ действительно является оценкой и для произвольной формулы языка выполняется условие, сформулированное в определении 7.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Для произвольной формулы A покажем, что*

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{F} iff i(A) = \mathbf{B};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{B} iff i(A) = \mathbf{T};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{T} iff i(A) = \mathbf{N};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{N} iff i(A) = \mathbf{F};$$

Доказательство.

Доказательство данного утверждения достаточно тривиально. Рассмотрим схемы доказательства только для случаев, когда формула A имеет вид конъюнкции и отрицания. Здесь и далее для упрощения процедуры доказательства будем иметь в виду симметричность связок языка.

1. A есть $B \wedge C$.

1.1. Пусть $i(B \wedge C) = \mathbf{B}$. $i(B \wedge C) = \mathbf{B} \Leftrightarrow i(A) \coprod i(B) = \mathbf{B}$. Фактически это означает, что необходимо рассмотреть два случая: (1.1.1), когда одному из конъюнктов (пусть это будет $\mathbf{B}$) приписано значение $\mathbf{F}$, а другому $\mathbf{T}$, и (1.1.2), когда по крайней мере одному члену конъюнкции (опять $\mathbf{B}$) приписано значение $\mathbf{N}$, а значение другого члена конъюнкции выбирается произвольно.

1.1.1. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(B) = \mathbf{N}$, а $\vec{\nu}(C) = \mathbf{B}$, это равносильно $\vec{\nu}(B \wedge C) = \mathbf{F}$, по определению $\vec{\nu}$.

1.1.2. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(B) = \mathbf{F}$, тогда $\vec{\nu}(B \wedge C) = \mathbf{F}$, по определению $\vec{\nu}$.

Доказательство для случаев 1.2.–1.4. осуществляется аналогично.

2. A есть $\neg B$.

2.1. Пусть $i(\neg C) = \mathbf{B}$. $i(\neg C) = \mathbf{B} \Leftrightarrow *i(C) = \mathbf{B}$, следовательно $i(C) = \mathbf{N}$, по определению i. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(C) = \mathbf{T}$. Следовательно, $\vec{\nu}(\neg C) = \mathbf{F}$.

Остальные случаи могут быть опущены, поскольку рассуждения ничем принципиально не отличаются от приведенных здесь.

Таким образом, утверждение 8 доказано. Q.E.D.

Докажем лемму 6.

Доказательство. Пусть $\vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B)$. Для произвольной формулы A здесь также возможны четыре случая, соответствующие четырем исходным значениям. Рассмотрим только два из них.

1. $\vec{\nu}(A) = \mathbf{F}$, тогда $\vec{\nu}(B)$ может быть любым. На основании утверждения 8 в этом случае $\vec{\nu}(A) = \mathbf{B}$. Следовательно, каким бы ни было значение $i(B)$, будет иметь место $i(B) \subseteq i(A)$.

2. $\vec{\nu}(A) = \mathbf{B}$, тогда $\vec{\nu}(B)$ равно $\mathbf{B}$ или $\mathbf{T}$. На основании утверждения 8 $i(A) = \mathbf{T}$.

2.1. Пусть $\vec{\nu}(B) = \mathbf{B}$, тогда $i(B) = \mathbf{T}$ — тривиальный случай.

2.2. Пусть $\vec{\nu}(B) = \mathbf{T}$, тогда $i(B) = \mathbf{N}$, т. е. пустому множеству. Очевидно, что $i(B) \subseteq i(A)$.

Таким образом, исходное допущение $\vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B)$ приводит к $i(B) \subseteq i(A)$. Отсюда введением импликации с последующим навешиванием кванторов существования и общности завершается доказательство леммы 6. Q.E.D.

ЛЕММА 9. $\forall \nu \exists i(i(A) \subseteq i(B) \Rightarrow \vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B))$.

Доказательство. Для этой леммы доказательство основывается на свойствах бирешетки и является значительно более простым.

Зададим функцию $i^\bullet$ следующим образом. $i^\bullet(p) = - * \nu(p)$.

Пусть $i^\bullet(B) \subseteq i^\bullet(A)$, т. е. $i^\bullet(A) \leqslant_t i^\bullet(B)$. Это значит, что $- * \nu(B) \leqslant_i - * \nu(A)$. По определению 2(c2), последнее влечет $* - *\nu(A) \leqslant_i * - *\nu(B)$. Используя определение 1(b2), получаем $- * - * \nu(A) \leqslant_t - * - * \nu(B)$. Теперь на основании определения 2 сначала по c4 к правой и левой частям равенства, а затем также симметрично применяя c3 и b3, приходим к искомому $\nu(A) \leqslant_t \nu(B)$. Дальнейшие шаги доказательства леммы тривиальны. Q.E.D.

Теперь можно перейти к доказательству основной метатеоремы.

МЕТАТЕОРЕМА. Для произвольных формул A и B $\forall \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B)) \Leftrightarrow \forall i(i(B) \subseteq i(A))$.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть (1) $\forall\nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B))$ и (2) неверно, что $\forall i(i(B) \subseteq i(A))$. Последнее означает, что (3) существует такая функция информатизации, для которой неверно, что $i(B) \subseteq i(A)$. По лемме 6 $\forall i\exists\nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$. Удалив кванторы, получаем (4) $(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$. Снятием квантора общности из (1) получаем (5) $(\nu(A) \leqslant_t \nu(B))$. По modus ponens из (4) и (5) приходим к $(i(B) \subseteq i(A))$. В то же время из (3) удалением квантора существования получаем неверно, что $(i(B) \subseteq i(A))$. Противоречие. В одну сторону утверждение метатеоремы доказано.

В другую сторону доказательство метатеоремы строится аналогично с использованием леммы 9. Q.E.D.

Литература

[1] *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. Труды международного франко-советского коллоквиума. Лилль, 26-29 апреля 1978 г. М., 1983.

[2] *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.

[3] *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс), Кн. I. М., 1994.

[4] *Arieli O. and Avron A.* Logical bilattices and inconsistent data // Proceedings 9th IEEE Annual Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Press, 1994. P. 468–476.

[5] *Arieli O. and Avron A.* Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25–63.

[6] *Avron A.* The structure of interlaced bilattices // Mathematical Structures in Computer Science. 1996. Vol. 6. P. 287–299.

[7] *Belnap N. D.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1977.

[8] *Belnap N. D.* How a computer should think // G. Ryle (ed.), Contemporary Aspects of Philosophy, Oriel Press Ltd., Stocksfield, 1977. P. 30–55.

[9] *Dunn J. M.* The algebra of intensional logics, Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh, Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).

[10] *Dunn J.M.* An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 36. P. 362–363.

[11] *Dunn J. M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and ‘coupled trees’ // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29.

[12] *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic.1989. Vol. 18. P. 225–256.

[13] *Fitting M.* Bilattices in logic programming // in G. Epstein (ed.), The Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, IEEE Press, 1990. P. 238–246.

[14] *Fitting M.* Bilattices and the semantics of logic programming // Journal of Logic Programming. 1991. Vol. 11. P. 91–116.

[15] *Fitting M.* Bilattices are nice things // in V. F. Hendricks, S. A. Pedersen and T. Bolander (eds.), Self-Reference, CSLI Publications, Cambridge University Press, 2004.

[16] *Ginsberg M.* Multi-valued logics, in Proceedings of AAAI-86 // Fifth National Conference on Artificial Intellegence, Morgan Kaufman Publishers, Los Altos, 1986. P. 243–247.

[17] *Ginsberg M.* Multivalued logics: A uniform approach to reasoning // AI, Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256–316.

[18] *Shramko Y., and Wansing H.* Some useful sixteen-valued logics: How a computer network should think // Journal of Philosophical Logic. 2005. Vol. 34.