Аналитические таблицы для пропозициональной логики Роговского

Н. И. Стешенко

abstract. Formalization of Rogowski's logic is offered by simple and generalized analytical tableaus. Generalized tableaus are constructed in R. Hehnle's style. The theorem of completeness is proved by the Smallyan's method.

Ключевые слова: множество Хинтикки, помеченная формула, правила редукции, простые аналитические таблицы, обобщенные аналитические таблицы, табличное доказательство.

1 Простые аналитические таблицы

Построим формализацию логики $\mathbf{R}_4$ Роговского методом аналитических таблиц. Как в двухзначной, так и многозначных логиках, метод аналитических таблиц является опровергающей процедурой. Поиск обоснования общезначимости формулы осуществляется по определенным правилам и начинается с предположения, что формула не общезначима. Это предположение ведет к противоречию, если формула на самом деле общезначима.

Правила редукции создаются на основе следующей таблицы истинности для логических связок и операторов логики $\mathbf{R}_4$ Роговского.

A	$\sim$ A	TA	BA	ИA	УA	EA	A $\to$ B	3	2	1	0
3	0	3	1	2	3	3	3	3	2	1	0
2	1	0	3	0	3	0	2	3	2	1	1
1	2	0	0	3	0	3	1	3	2	2	2
0	3	0	2	1	0	0	0	3	3	3	3

Логические константы читаются так: «$\sim$ A» — не есть так, что A; «TA» — истинно, что A; «BA» — возникает так, что

А; «ИА» — исчезает так, что А; «УА» — уже есть так, что А; «ЕА» — еще есть так, что А; «А → В» — если А, то В.

Расширим наш язык операциями **3, 2, 1** и **0**, которые будут применяться к формулам. Выражения вида **3**А, **2**А, **1**А и **0**А называются помеченными формулами, и соответственно читаются «А истинно», «А подистинно», «А подложно» и «А ложно», где А непомеченная формула.

Семантические сущности, т.е. истинностные значения, превратились в синтаксические объекты **3, 2, 1** и **0**.

Простыми аналитическими таблицами называются аналитические таблицы для формул вида **1**А, **0**А, **2**А и **3**А.

Аналитические таблицы для логики Роговского даны в духе Р. Смальяна [6]. Отметим, что в отечественной литературе метод построения аналитических таблиц Р. Смальяна применялись к формализации многозначных логик, (см. [1][2, с. 265-324]).

Введем правила редукции для построения аналитических таблиц логики Роговского.

Правила для импликации

$$(\to_0)\quad \begin{array}{c} \mathbf{0}(A\to B) \\ \hline \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{0}\mathrm{B} \end{array} \qquad (\to_1)\quad \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\mathbf{1}(A\to B)} \\ \hline \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{0}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} \end{array}$$

$$(\to_2)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c} \multicolumn{5}{c}{\mathbf{2}(A\to B)} \\ \hline \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{0}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} \end{array} \qquad (\to_3)\quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{3}(A\to B)} \\ \hline \mathbf{0}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{B} \\ & \end{array}$$

Правила для оператора «В»

$$(B_0):\ \frac{\mathbf{0}\mathrm{BA}}{\mathbf{1}\mathrm{A}} \quad (B_1):\ \frac{\mathbf{1}\mathrm{BA}}{\mathbf{3}\mathrm{A}} \quad (B_2):\ \frac{\mathbf{2}\mathrm{BA}}{\mathbf{0}\mathrm{A}} \quad (B_3):\ \frac{\mathbf{3}\mathrm{BA}}{\mathbf{2}\mathrm{A}}$$

Правила для отрицания (слабого)

$$(\sim_0):\ \frac{\mathbf{0}\sim A}{\mathbf{3}\mathrm{A}} \quad (\sim_1):\ \frac{\mathbf{1}B\sim A}{\mathbf{2}\mathrm{A}} \quad (\sim_2):\ \frac{\sim A}{\mathbf{1}\mathrm{A}} \quad (\sim_3):\ \frac{\mathbf{3}\sim A}{\mathbf{0}\mathrm{A}}$$

Правила для оператора «И»

$$(\text{И}_0):\ \frac{\mathbf{0}\text{И}A}{\mathbf{1}A}\qquad (\text{И}_1):\ \frac{\mathbf{1}\text{И}A}{\mathbf{3}A}\qquad (\text{И}_2):\ \frac{\mathbf{2}\text{И}A}{\mathbf{0}A}\qquad (\text{И}_3):\ \frac{\mathbf{3}\text{И}A}{\mathbf{2}A}$$

Правила для оператора «T»

$$(\text{T}_0):\ \frac{\mathbf{0}\text{T}A}{\mathbf{0}A \mid \mathbf{1}A \mid \mathbf{2}A}\qquad (\text{T}_1):\ \frac{\mathbf{1}\text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{0}A\\ \mathbf{3}A\end{array}}\qquad (\text{T}_2):\ \frac{\mathbf{2}\text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{0}A\\ \mathbf{3}A\end{array}}\qquad (\text{T}_3):\ \frac{\mathbf{3}\text{T}A}{\mathbf{3}A}$$

Правила для отрицания (сильного) «$\sim$ T»

$$(\sim \text{T}_0):\ \frac{\mathbf{0} \sim \text{T}A}{\mathbf{3}A}\qquad (\sim \text{T}_1):\ \frac{\mathbf{1} \sim \text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}$$

$$(\sim \text{T}_2):\ \frac{\mathbf{2} \sim \text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}\qquad (\sim \text{T}_3):\ \frac{\mathbf{3} \sim \text{T}A}{\mathbf{0}A \mid \mathbf{1}A \mid \mathbf{2}A}$$

Правила для оператора «У»

$$(\text{У}_0):\ \frac{\mathbf{0}\text{У}A}{\mathbf{0}A \mid \mathbf{1}A}\qquad (\text{У}_1):\ \frac{\mathbf{1}\text{У}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}\qquad (\text{У}_2):\ \frac{\mathbf{2}\text{У}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}\qquad (\text{У}_3):\ \frac{\mathbf{3}\text{У}A}{\mathbf{2}A \mid \mathbf{3}A}$$

Правила для оператора «E»

$$(\text{E}_0):\ \frac{\mathbf{0}\text{E}A}{\mathbf{0}A \mid \mathbf{2}A}\qquad (\text{E}_1):\ \frac{\mathbf{1}\text{E}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}\qquad (\text{E}_2):\ \frac{\mathbf{2}\text{E}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}A\\ \mathbf{0}A\end{array}}\qquad (\text{E}_3):\ \frac{\mathbf{3}\text{E}A}{\mathbf{1}A \mid \mathbf{3}A}$$

Помеченную формулу над чертой назовем *посылкой* правила редукции. Все помеченные формулы под чертой правила редукции — заключением, которое состоит из помеченных подформул формулы, находящейся в посылке. Вертикальная черта «|» в заключении правил редукции означает «ветвление» результата применения правила.

В заключении правил (T_1), (T_2), ($\sim \text{T}_1$), ($\sim \text{T}_2$), (У_1), (У_2), (E_1) и (E_2) имеется пара помеченных формул (**0**A, **3**A), которая означает, что заключение дает противоречие. Это объясняется таблицами истинности для указанных операторов. Например, формула TA может принимать только два истинностных значения «3» и «0» из множества $\{3, 2, 1, 0\}$ (согласно таблице истинности для оператора T). И если мы приписываем TA истинностные значения «1» или «2», т.е. истинностные значения, которых TA не имеет, то это синтаксически означает, что помеченные формулы **1**TA и **2**TA дают в заключении противоречие. Это напоминает случай замкнутой ветви в классической логике, которая содержит константы «ложь» и «истина».

Сформулированные правила разбиваются на четыре группы α, β, γ и δ. К группе α относится правило, которое порождает 5 ветвей; к группе β принадлежат все те правила, которых порождают 3 ветви; к группе γ относятся правила, порождающие 2 ветви; и, наконец, группе δ принадлежат те правила редукции, применения которых дает одну ветвь. Такая классификация правил нужна для определения множества Хинттики и доказательства метатеорем об аналитических таблицах, чтобы избежать повторений в однотипных шагах доказательства.

α	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$\mathbf{2}(A \to B)$	**1**A **0**B	**1**A **1**B	**1**A **2**B	**2**A **2**B	**3**A **2**B

β	β_1	β_2	β_3
$\mathbf{1}(A \to B)$	**2**A **0**B	**2**A **1**B	**3**A **1**B
0TA	**0**A	**1**A	**2**A
$\mathbf{3} \sim TA$	**0**A	**1**A	**2**A

γ	γ_1	γ_2
$\mathbf{3}(A \to B)$	**0**A	**3**B
3УA	**3**A	**2**A
0УA	**1**A	**0**A
3EA	**3**A	**1**A
0EA	**2**A	**0**A

δ	δ_1
$\mathbf{0}(A \to B)$	**3**A **0**B
0ВA	**1**A
1ВA	**3**A
2ВA	**0**A
3ВA	**2**A
$\mathbf{0} \sim A$	**3**A
$\mathbf{1} \sim A$	**2**A
$\mathbf{2} \sim A$	**1**A
$\mathbf{3} \sim A$	**0**A
0ИA	**2**A
1ИA	**0**A
2ИA	**3**A
3ИA	**1**A
2TA	**3**A **0**A
3TA	**3**A
$\mathbf{2} \sim TA$	**3**A **0**A
$\mathbf{1} \sim TA$	**3**A **0**A
$\mathbf{0} \sim TA$	**3**A
2УA	**3**A **0**A
1УA	**3**A **0**A
2ЕA	**3**A **0**A
1ЕA	**3**A **0**A

Отметим то важное обстоятельство, что каждое правило редукции *структурно соответствует ДНФ* логики изменения и направленности Роговского. В посылке правила указана формула и ее истинностное значение на синтаксическом уровне, в заключение правила представлено разложение посылочной формулы в нормальную форму (ДНФ или СДНФ как частный случай ДНФ). Например, правило $\to_1$ соответствует фрагменту СДНФ импликации $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, а именно тем наборам истинностных значений «A» и «B», на которых формула $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ принимает истинностное значение «1». Для демонстрации этого используем обозначения нужных истинностных значений формулы и ее подформул верхними индексами:

$$(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^1 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^0)$$

Структурное соответствие между правилом редукции $\to_1$ и ДНФ определяется очевидными соглашениями: $\mathbf{1}\Phi \equiv \Phi^1$, вертикальная черта «|» заменяется знаком «$\vee$»; формулы, написанные одна под другой, соединяются знаком «$\wedge$».

Это соответствие легко распространить на остальные правила редукции группы α, β и γ. Кроме того, будем считать, что правила группы δ соответствуют усеченным дизъюнкциям вида $\Phi \vee 0 = \Phi$, где 0 есть константа. Например, $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee 0 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0)$. Из таблицы истинности для импликации ясно, что $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^0$ представляет одну строчку, в которой импликация на указанных индексами истинностных наборах принимает значение «0».

Аналитические таблицы есть частный случай математического дерева. В описании дерева будем следовать статье [2, с. 281–282].

Под *неупорядоченным деревом Д* понимается множество Ω элементов, называемых точками, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) имеется функция φ, которая приписывает каждой точке натуральное число $\varphi(\mathrm{A})$, называемое уровнем точки A;

(2) на точках задано отношение $\mathrm{A}\mathbf{R}\mathrm{B}$, которое читается «A есть предшественник B» или «B есть сукцессор A», т.е. B есть точка, следующая за точкой A. Отношение $\mathbf{R}$ удовлетворяет таким условиям:

(2.1) имеется единственная точка А_1 уровня $\varphi(\text{А}_1) = 1$, называемая корнем дерева Д;

(2.2) каждая точка, отличная от корня, имеет единственного предшественника;

(2.3) для любых точек А и В, если В есть сукцессор А, то $\varphi(\text{B}) = \varphi(\text{A}) + 1$.

Точка А называется *концевой точкой*, если она не имеет сукцессоров.

Точка А называется *простой точкой*, если она имеет в точности один сукцессор. В противном случае она называется *юнктивной (сложной)* точкой.

Ветвью (путем) называется любая такая конечная или счетная последовательность точек, что: (а) она начинается с корня дерева, и (б) каждый член последовательности, кроме последнего (если такой имеется), является предшественником следующего члена.

Максимальной ветвью (путем) называется ветвь такая, что ее последний член есть либо концевая точка дерева, либо бесконечная ветвь.

Упорядоченным деревом Д называется дерево, на котором задана функция ξ такая, что она приписывает каждой юнктивной точке N последовательность $\xi(N)$, не содержащую повторяющихся точек и состоящую из всех сукцессоров точки N.

Дерево Д называется *конечно порожденным*, если каждая точка имеет конечное число сукцессоров.

Дерево Д называется *m-адическим*, если каждая юнктивная точка имеет не более m сукцессоров ($m = 2,\ 3, \dots$).

Аналитической таблицей для формулы А логики изменения и направленности Роговского называется *5-адическое* дерево Д (точками которого являются формулы), удовлетворяющее таким условиям.

Пусть Д_1 и Д_2 два упорядоченных *5-адических дерева*. Д_2 называется *непосредственным расширением* Д_1, если Д_2 получено из Д_1 применением одного из правил типа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ или δ. Тогда Д есть *аналитическая таблица* для формулы А тогда и только тогда, когда имеется конечная последовательность $\text{Д}_1,\ \text{Д}_2, \dots \text{Д}_n$, где $Д_n = Д$ такая, что $Д_1$ одноточечное дерево, чей корень есть формула А, и $Д_{i+1}$ есть непосредственное расширение $Д_i$ для каждого $i < n$.

Назовем ветвь θ таблицы помеченной формулы А *замкнутой (закрытой)*, если она содержит хотя бы одну пару помеченных формул из множества (**0**А, **1**А, **2**А, **3**А). Эти пары формул будем также называть *противоречивыми.* В противном случае ветвь называется *открытой (непротиворечивой).* Более формально: на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1ф_1$, $j_2ф_2, \ldots,$ $j_nф_n$ такие, что $ф_2 = ф_3 = \cdots = ф_m$ и $\{j_1\} \cap \{j_2\} \cap \cdots \cap \{j_m\} = \emptyset$, где $j \in \{\mathbf{3,\ 2,\ 1,\ 0}\}$ и $1 < m \leq n$. В противном случае, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Таблица называется *замкнутой*, если все ее ветви замкнуты.

Табличное доказательство непомеченной формулы А есть тройка замкнутых таблиц для формул **0**А, **1**А и **2**А.

Отметим, что по сравнению с двухзначной логикой надо строить не одну, а три таблицы.

Ветвь θ таблицы Д называется *полной*, если для всякой формулы вида $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ ветвь θ удовлетворяет следующим условиям (предполагается, что каждая $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ имеет конечное число вхождений логических связок и операторов):

(у.1) если $\alpha \in \theta$, то $\alpha_1 \in \theta$, или $\alpha_2 \in \theta$, или $\alpha_3 \in \theta$, или $\alpha_4 \in \theta$, или $\alpha_5 \in \theta$;

(у.2) если $\beta \in \theta$, то $\beta_1 \in \theta$ или $\beta_2 \in \theta$, или $\beta_3 \in \theta$;

(у.3) если $\gamma \in \theta$, то $\gamma_1 \in \theta$ или $\gamma_2 \in \theta$;

(у.4) если $\delta \in \theta$, то $\delta_1 \in \theta$.

Другими словами, ветвь называется полной, если она редуцирована посредством указанных правил до помеченных атомарных подформул исходной формулы.

Таблица Д называется *завершенной*, если каждая ветвь таблицы или замкнута, или полная.

Для того чтобы получить понятия выполнимости, общезначимости и другие семантические характеристики формул логики Роговского, надо дать определение $\mathbf{R}_4$-оценки.

Функция ν, отображающая множество A^+ всех формул логики Роговского на множество истинностных значений $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, называется $\mathbf{R}_4$-оценкой, если она удовлетворяет следующим условиям.

$$(1)\ \nu(A \to B) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 0 \text{ или } \nu(B) = 3 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 1 \text{ и } \nu(B) \neq 3 \text{ или } \nu(B) = 2 \text{ и} \\ \quad \nu(A) \neq 0; \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ и } \nu(B) = 2 \text{ или } \nu(A) = 2 \text{ и} \\ \quad [\nu(B) = 1 \text{ или } \nu(B) = 0]; \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ и } \nu(B) = 0. \end{array} \right.$$

$$(2)\ \nu(BA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 2 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 1 \end{array} \right. \qquad (3)\ \nu(\sim A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 1 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 2 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 0 \end{array} \right.$$

$$(4)\ \nu(\text{ИА}) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 1 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 2 \end{array} \right.$$

$$(5)\ \nu(\sim TA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) \neq 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \end{array} \right. \qquad (6)\ \nu(TA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) \neq 3 \end{array} \right.$$

$$(7)\ \nu(\text{У}A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 2 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 0 \text{ или } \nu(A) = 0 \end{array} \right.$$

$$(8)\ \nu(\text{Е}A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 1 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 2 \end{array} \right.$$

Если использовать понятие матрицы (т.е. системы, состоящей: (1) из непустого множества истинностных значений; (2) множества операций, определенных на множестве истинностных значений, и (3) множества выделенных значений, являющимся подмножеством множества истинностных значений), то можно показать, что функция оценки ν есть гомоморфизм, отображающий множество формул логики Роговского в матрицу.

Интерпретацией произвольной формулы A называется приписывание истинностных значений всем атомарным подформулам, из которых построена формула A.

Любая данная интерпретация формулы A расширяется единственным образом до некоторой $\mathbf{R}_4$-оценки, так как для каждой сложной подформулы формулы A можем однозначно определить истинностное значение, руководствуясь условиями (1)–(8).

Формула A называется *выполнимой*, если и только если (дальше пишем — е!) она истинна по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, т.е $\nu(\mathrm{A}) = 3$.

Множество формул A* называется *одновременно выполнимым* (или, другими словами, *совместным*), е! имеется R_4-оценка, при которой каждая формула множества A* выполнима.

В противном случае, т.е. когда не имеется такой $\mathbf{R}_4$-оценки, оно *не является одновременно выполнимым.*

Формула A называется *общезначимой*, е! для любой R_4-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 3$, т.е. A общезначима е! она выполнима в каждой $\mathbf{R}_4$-оценке.

Формула A называется *тождественно ложной*, е! для любой $\mathbf{R}_4$-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Формула A *не общезначима*, е! она не является общезначимой, т.е. имеется хотя бы одна $\mathbf{R}_4$-оценка, в которой $\nu(\mathrm{A}) = 2$, или $\nu(\mathrm{A}) = 1$, или $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Формула A называется *невыполнимой*, е! она не является выполнимой, т.е. нет ни одной $\mathbf{R}_4$-оценки, в которой $\nu(\mathrm{A}) = 3$. Отметим, что в классической логике понятия «быть тождественно ложной» и «быть невыполнимой» равнообъемные понятия. В рассматриваемой логике отношение между указанными понятиями иное: если формула тождественно ложная, то она является невыполнимой, но не наоборот.

Мы дали общее определение выполнимости в том смысле, что не учитывались разные виды формул A — $\mathbf{0}$A, $\mathbf{1}$A, $\mathbf{2}$A, $\mathbf{3}$A. Детализируем определение выполнимости относительно этих видов формул.

Для этого установим отношение между выполнимостью помеченной формулы $\mathbf{i}$A, где $\mathbf{i} \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ и $\mathbf{R}_4$-оценкой непомеченной формулы A. Тот факт, что произвольная помеченная формула $\mathbf{i}$A выполнима, будем обозначать через $\exists\nu(\nu(\mathbf{i}A) \in \{3\})$.

$$(df.1).\exists\nu(\nu(\mathbf{0}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 0$$

$$(df.2).\exists\nu(\nu(\mathbf{1}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 1$$

$$(df.3).\exists\nu(\nu(\mathbf{2}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 2$$

$$(df.4).\exists\nu(\nu(\mathbf{3}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 3$$

Известно, что в классической логике высказываний формуле, помеченной знаком «ложь», можем поставить в соответствие формулу с оператором отрицания, а формуле, помеченной знаком «истина», — саму формулу (т.е. $\mathbf{f}\mathrm{A} \Leftrightarrow\sim \mathrm{A}$, $\mathbf{t}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$, где «f» и «t» — знаки, обозначающие соответственно ложь и истину). Установим аналогичное соответствие для логики Роговского:

$$\mathbf{0}\mathrm{A} \Leftrightarrow\sim \mathrm{A},\ \mathbf{1}\mathrm{A} \Leftrightarrow \text{И}\mathrm{A},\ \mathbf{2}\mathrm{A} \Leftrightarrow \text{В}\mathrm{A},\ \mathbf{3}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}.$$

Однако использовать в логике Роговского вместо помеченных формул формулы с указанными операторами возможно, но практически неудобно. В этой логике имеются различные типы отрицания (слабое и сильное, а также их комбинации), разные типы утверждений (слабое и сильное), а потому появятся сложности с итерацией операторов «И», «В» и «Т» и некоторые другие. Помеченные же формулы дают единообразие в обозначениях, исключают любую неоднозначность в правилах редукции, минимизируют число правил редукции.

Введем понятие множества Хинтикки для помеченных формул (как множества формул истинных относительно некоторой $\mathbf{R}_4$-оценки). Назовем множество помеченных формул $\mathbf{H}$ множеством Хинтикки, если и только если для любых формул вида α, β, γ, δ оно удовлетворяет таким условиям:

($\mathbf{H}_0$). Для любой атомарной формулы p только одна произвольная формула из множества помеченных формул $\{\mathbf{0}$p, $\mathbf{1}$p, $\mathbf{2}$p, $\mathbf{3}$p$\}$ принадлежит $\mathbf{H}$, т.е. множество $\mathbf{H}$ непротиворечиво.

($\mathbf{H}_1$). Если $\alpha \in \theta$, то $\alpha_1 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_2 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_3 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_4 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_5 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_2$) — если $\beta \in \mathbf{H}$, то $\beta_1 \in \mathbf{H}$ или $\beta_2 \in \mathbf{H}$, или $\beta_3 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_3$) — если $\gamma \in \mathbf{H}$, то $\gamma_1 \in \mathbf{H}$ или $\gamma_2 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_4$) — если $\delta \in \mathbf{H}$, то $\delta_1 \in \mathbf{H}$.

Дальше докажем методом Р. Смальяна [5] теорему о полноте аналитических таблиц для логики Роговского. Покажем, что если A есть общезначимая формула логики R_4, то все полные таблицы для $\mathbf{0}$A, $\mathbf{1}$A и $\mathbf{2}$A являются замкнутыми.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая полная открытая ветвь таблицы одновременно выполнима.*

Пусть θ полная открытая ветвь таблицы Д и пусть A^+ есть множество всех помеченных формул, принадлежащих θ. Тогда по определению полной таблицы условия $(i_1) - (i_4)$ совпадают с условиями $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ определения множества Хинтикки, а по определению открытой ветви оказывается, что открытая ветвь есть множество непротиворечивых формул, что равносильно условию $(\mathbf{H}_0)$ определения множества Хинтикки. Заключаем, что полная открытая ветвь θ есть множество Хинтикки. Для продолжения доказательства теоремы нам нужна лемма.

ЛЕММА 2. *Каждое множество Хинтикки для $\boldsymbol{R}_4$ является одновременно выполнимым.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{H}$ — множество Хинтикки. Построим $\mathbf{R}_4$-оценку, в которой каждая формула $A \in \mathbf{H}$ истинна. Припишем всем атомарным подформулам, из которых построены формулы из $\mathbf{H}$, истинностные значения следующим образом:

$$(1)\ \nu^*(p) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \mathbf{3}p \in \mathbf{H} \\ 2, \text{ если } \mathbf{2}p \in \mathbf{H} \\ 1, \text{ если } \mathbf{1}p \in \mathbf{H} \\ 0, \text{ если } \mathbf{0}p \in \mathbf{H} \end{array} \right.$$

(2). Если помеченная атомарная подформула не принадлежит $\mathbf{H}$, то p можно приписать произвольное истинностное значение, для определенности будем считать, что $\nu^*(\mathrm{p}) = 3$.

В силу $(\mathbf{H}_0)$ условие (1) не может давать противоречивого подмножества формул.

Покажем индукцией по строению формулы A, что каждая $A \in \mathbf{H}$ при подходящей (без нарушения условия $(\mathbf{H}_0)$) интерпретации ее атомарных подформул истинна по меньшей мере в одной $\mathbf{R}_4 - \nu^*$-оценке. Для доказательства используем понятие степени (ранга) формулы $d(\mathrm{A})$ как числа вхождений логических операторов в формулу А, более точно:

(с.1): каждая атомарная формула р имеет нулевую степень, т.е. $d(\mathrm{p}) = 0$;

(с.2): $d(s\mathrm{A}) = d(\mathrm{A}) + 1$, где $s \in \{\mathrm{В}, \sim, \text{ И}, \text{ Т}, \text{ У}, \text{ Е}\}$;

(с.3): $d(\mathrm{A} \to B) = d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B}) + 1$.

Базис индукции. Каждая помеченная атомарная формула, задаваемая условием (1), может быть истинной относительно указанной оценки ν^*.

Пусть $d(\mathrm{A}) > 0$, $\mathrm{A} \in \mathbf{H}$. Предположим, что для любой С такой, что $d(\mathrm{C}) < d(\mathrm{A})$ имеет место $\nu^*(\mathrm{C}) = 3$ по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, где С есть помеченная подфомула помеченной формулы А. Надо показать, что $\nu^*(\mathrm{A}) = 3$. Так как $d(\mathrm{A}) > 0$, то формула А есть либо α, либо β, либо γ, либо δ.

Пусть А есть формула вида α. Тогда, по условию $(\mathbf{H}_1)$ $\alpha_1 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_2 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_3 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_4 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_5 \in \mathbf{H}$. Но $d(\alpha_i) < d(\alpha)$, $1 \leq i \leq 5$. По предположению дано $\nu^*(\alpha_i) = 3$ по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, значит и $\nu^*(\alpha) = 3$.

Случаи, когда А есть либо β, либо γ, доказываются сходным образом. Последний случай, когда А есть δ, доказывается аналогично, кроме применения правил (T_1), (T_2), $(\ \mathrm{T}_1)$, $(\ \mathrm{T}_2)$, $(\mathrm{У}_1)$, $(\mathrm{У}_2)$, (E_1) и (E_2), принадлежащих группе δ. Эти правила дают в заключении противоречие ($\mathbf{0}$A, $\mathbf{3}$A), а потому они не могут участвовать в построении множества Н. Случай указанных правил соответствует случаю замкнутых ветвей в классических логиках, в которых используются константы «ложь» и «истина». Лемма доказана, тем самым доказана и теорема 1.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. *(a) Если А есть общезначимая формула, то все завершенные таблицы для помеченных формул* ***0****A,* ***1****A,* ***2****A являются замкнутыми; (b) Если А общезначима, то А таблично доказуема.*

Доказательство. Доказательство (a) проведем рассуждением от противного, т.е. допустим, что таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A не являются замкнутыми.

Рассмотрим случай **0**A. Пусть Д есть открытая таблица, построение которой начато с формулы **0**A, т.е. **0**A ∈Д. Если Д открытая таблица, то в ней имеется, по крайней мере, одна открытая ветвь θ. Тогда по теореме 1 эта ветвь одновременно выполнима. Это значит, что и формула **0**A выполнима, тогда $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$, (где A непомеченная формула), так как **0**A∈Д. Но это противоречит условию теоремы, так как $\nu(\mathrm{A}) = 3 \neq \nu^*(\mathrm{A}) = 0$ (т.е. для любой $\mathbf{R}_4$-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 3$, так как по условию теоремы формула A — общезначима, и в то же время имеется $\mathbf{R}_4$-оценка ν^*, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$). Значит, таблица для **0**A замкнута.

Случай формулы **1**A. Пусть Д открытая таблица, начинающаяся с формулы **1**A, т.е. **1**A∈Д. Продолжая рассуждения так, как и в случае **0**A, придем к заключению, что $\nu(\mathrm{A}) = 3 \neq \nu^*(\mathrm{A}) = 1$. Значит, таблица для **1**A замкнута. Доказательство случая **2**A копирует два предыдущих случая.

(b). По пункту (a) теоремы 2 общезначимая формула A имеет замкнутые таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A. Так как по определению табличное доказательство непомеченной формулы A есть тройка замкнутых таблиц для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A, то непосредственно получаем, что A таблично доказуема. Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если имеется хотя бы одна незамкнутая таблица из тройки построенных таблиц для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A, то формула A не является общезначимой.*

Допустим, что формула A общезначима. Тогда по теореме 3 пункт (a), все таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A являются замкнутыми. Последнее находится в противоречии с условием формулировки Следствия 4. Значит, формула A на самом деле не является общезначимой.

ЛЕММА 5. *Если имеется замкнутая таблица для формулы A, то множество формул, расположенных на каждой замкнутой ветви таблицы, не являются одновременно выполнимым.*

Пусть имеется замкнутая таблица для формулы A, например **1**A, но формулы, принадлежащие любой из ветвей этой таблицы, одновременно выполнимы. Тогда получим противоречие. По определению одновременной выполнимости множества формул, существует $\mathbf{R}_4$-оценка, в которой все эти формулы истинны. Но это значит, что ветвь непротиворечива, т.е. таблица для формулы A не является замкнутой, что противоречит условию леммы.

ТЕОРЕМА 6. *Если А имеет табличное доказательство, то А общезначима.*

По определению табличное доказательство непомеченной формулы А есть тройка замкнутых таблиц для формул **0**А, **1**А, **2**А. По лемме 5 все множества формул, расположенных на ветвях таблиц для формул **0**А, **1**А, **2**А, не являются одновременно выполнимыми. При построении аналитических таблиц для помеченных формул **0**А, **1**А, **2**А предполагалось, что имеется, соответственно, хотя бы одна оценка, в которой непомеченная формула А принимает значение «0», «1» или «2». Но во всех трех случаях эти предположения ведут к противоречию. Это означает, что нет ни одной оценки, в которой непомеченная формула принимает значения «0», «1» и «2». Тогда непомеченная формула А выполнима в каждой R_4-оценке, т.е. формула А общезначима.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Можно видеть, что правила редукции $(\rightarrow_0)$, $(\rightarrow_3)$ и $(\sim_0)$, $(\sim_3)$ одинаковы для логики Роговского и классической логики высказываний. Это значит, что аналитические таблицы логики Роговского содержат изоморф аналитических таблиц классической логики высказываний. Но это также значит, что доказанная теорема о полноте для логики Роговского является обобщением этой теоремы, доказанной Смальяном для двузначной логики.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Эту же теорему можно доказать в стиле М. Фиттинга [3]. Так поступает, например, Р. Хенл [4] в доказательстве полноты для произвольной конечнозначной логики.

Основная особенность этого способа доказательства теоремы о полноте состоит в том, что используется *абстрактное свойство непротиворечивости.* В большинстве доказательств теорем о полноте явно используется понятие непротиворечивости (любое непротиворечивое множество формул имеет модель (выполнимо)). М. Фиттинг называет использование понятия непротиворечивости в доказательствах теоремы о полноте «стандартным аргументом полноты». Он выделяет существенные черты этого аргумента, т.е. черты, независимые от специфики той или иной конкретной дедуктивной системы и ее семантики. Он указывает две существенные черты. Во-первых, произвольное множество формул является непротиворечивым, если из него нельзя получить противоречия. Во-вторых, с семантической точки зрения все формулы непротиворечивого множества должны быть истинными, и понятие непротиворечивости руководит подбором значений пропозициональных переменных (из которых построены все формулы непротиворечивого множества), конструированием истинностной оценки, при которой формулы, входящие в непротиворечивое множество, оказываются истинными. Абстрактное свойство непротиворечивости допускает возможность уточнения для различных логик: классической, модальной, многозначной. Оно представляет собой не отдельное множество формул, как множество Хинтикки, а совокупность (собрание) множеств формул. Вся совокупность и каждое множество из этой совокупности непротиворечиво, т.е. из него невозможно по сформулированным условиям вывести противоречие. Каждое множество формул, если оно принадлежит этому собранию множеств формул, формально (структурно) удовлетворяет тем же условиям, что и множество Хинтикки, но содержательно речь идет о непротиворечивости.

Если применить эти содержательные соображения к помеченным формулам логики Роговского, то абстрактное свойство непротиворечивости уточняется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть Δ есть собрание множеств помеченных формул логики Роговского. Назовем Δ свойством непротиворечивости помеченных формул, если для каждого $S \in \Delta$ оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для всех атомарных формул p, если j_1p, j_2p $\in S$, то $\{j_1\} \cap \{j_2\} \neq \emptyset$, где $j \in \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$;
2. $\mathbf{0}$(A $\to$ B), $\mathbf{1}$TA, $\mathbf{2}$TA, $\mathbf{1}\sim$ TA, $\mathbf{2}\sim$ TA, $\mathbf{1}$УA, $\mathbf{2}$УA, $\mathbf{1}$EA, $\mathbf{2}$EA $\notin S$;
3. Если $\alpha \in S$, то $S \cup \{\alpha_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\alpha_2\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_3\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_4\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_5\} \in \Delta$;
4. Если $\beta \in S$, то $S \cup \{\beta_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\beta_2\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\beta_3\} \in \Delta$;
5. Если $\gamma \in S$, то $S \cup \{\gamma_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\gamma_2\} \in \Delta$;

6. Если $\delta \in S$, то $S \cup \{\delta_1\} \in \Delta$, причем из δ исключены формулы, указанные в пункте 2.

Например, пункт 5 определения означает, что если $\gamma \in S$, то удлинение S посредством γ_1 или γ_2 непротиворечиво. Основная идея доказательства теоремы о полноте состоит в том, чтобы показать, что удлинение S является множеством Хинтикки. Множество Хинтикки выполнимо. Если S конечно, то доказательство очевидно. Но если S бесконечно, то надо использовать теорему Линденбаума (всякое непротиворечивое множество предложений S может быть расширено до максимального непротиворечивого множества), и показать, что максимальное непротиворечивое множество предложений есть множество Хинтикки.

Приведем несколько примеров проверки общезначимости формул.

ПРИМЕР 10. $\mathrm{T}p \to (g \to p)$. Проверим, является ли эта формула общезначимой. Надо построить три аналитические таблицы $\mathbf{0}(\mathrm{T}p \to (g \to p))$, $\mathbf{1}(\mathrm{T}p \to (g \to p))$, $\mathbf{2}(\mathrm{T}p \to (g \to p))$.

(1). $\mathbf{0}(\mathrm{T}p\to (g \to p))$
(2). $\mathbf{3}\mathrm{T}p$
(3). $\mathbf{0}(g \to p)$
(4). $\mathbf{3}$p(2)
(5). $\mathbf{3}$g
(6). $\mathbf{0}$p(3)
пр. 4, 6

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{0}(\mathrm{T}p\to (g \to p))$ замкнута, на что указывает знак «пр.» после строчки (6), который читается «противоречие». Вторая и третья строчки получены из (1), но во второй строчке это не отмечается. Пятая и шестая строчки получены из строчки (3), но в пятой строчке указание на это опускается. Мы также опускаем указание на то, что вторая и третья строчки получены из (1), а пятая и шестая из (3) по одному и тому же правилу редукции ($\to_0$). По знаку помеченной формулы, из которой получаем другие строчки, и расположению скобок, выделяющих в формуле (или подформуле) главную логическую связку или оператор, однозначно определяется используемое правило редукции. Такие сокращения оправданы для лучшего обозрения весьма громоздких таблиц (см. Приложение 1).

Все ветви для помеченной формулы **2**(Тр → ($g \to p$)) замкнуты. Все таблицы для помеченных формул **0**(Тр → ($g \to p$)), **1**(Тр → ($g \to p$)) и **2**(Тр → ($g \to p$)) замкнуты. А потому формула (Тр → ($g \to p$)) общезначима.

ПРИМЕР 11. р → ($g \to p$). Проверим, является ли эта формула общезначимой. Надо построить три аналитические таблицы **0**(р → ($g \to p$)), **1**(р → ($g \to p$)), **2**(р → ($g \to p$)).

(1). **0**(р → ($g \to p$))
(2). **3**р
(3). **0**($g \to p$) (1)
(4). **3**g
(5). **0**р
пр. 2, 5

Таблица для помеченной формулы **0**(р → ($g \to p$)) замкнута.

Таблица для помеченной формулы **1**(р → ($g \to p$)) замкнута (см. Приложение 2).

Проверять построение ветвей, порождаемых формулами (c_1), (d_1) и (e_1), — лишняя работа, так как часть ветвей (три), полученные на основании формулы b_1, оказались полными, но не замкнутыми. Значит, таблица для помеченной формулы **2**(р → ($g \to p$)) не замкнута (см. Приложение 3.), и формула (р → ($g \to p$)) не является общезначимой.

ПРИМЕР 12. Проверить общезначимость формулы У($p \to g$) → (Уp → Уg). Надо построить три аналитических таблицы **0**(У($p \to g$) → (Уp → Уg)), **1**(У($p \to g$) → (Уp → Уg)), **2**(У($p \to g$) → (Уp → Уg)) и выяснить являются ли они замкнутыми.

(1). **0**(У($p \to g$) → (Уp → Уg))
(2). **3**(У($p \to g$))
(3). **0**((Уp → Уg)) (1)

(4). **3**(($p \to g$) (2)		(5). **2**(($p \to g$)) (2)
(4.1). **0**р (4)	(4.2). **3**g (4)	
(4.1.1). **3**Ур (3)	(4.2.1). **3**Ур (3)	
(4.1.2). **0**Уg (3)	(4.2.2). **0**Уg (3)	

(5).

(a). **3**р	(b). **2**р	(c). **1**р	(d). **1**р	(e). **1**р
(a_1). **2**g (5)	(b_1). **2**g (5)	(c_1). **2**g (5)	(d_1). **1**g (5)	(e_1). **0**g (5)
(a_2). **3**Ур (3)	(b_2). **3**Ур (3)	(c_2). **3**Ур (3)	(d_2). **3**Ур (3)	(e_2). **3**Ур (3)
(a_3). **0**Уg (3)	(b_3). **0**Уg (3)	(c_3). **0**Уg (3)	(d_3). **0**Уg (3)	(e_3). **0**Уg (3)

(6).		(7).	
(6.1). **3**р(4.1.1)	(6.2). **2**р(4.1.1)	(7.1). **0**g(4.2.2)	(7.2). **1**g(4.2.2)
пр. 4.1,6.1	**пр.** 4.1,6.2	**пр.** 4.2,7.1	**пр.** 4.2,7.2

(8).		(9).	
(d_{21}). **3**р(d_2)	(d_{22}). **2**р(d_2)	(e_{21}). **3**р(e_2)	(e_{22}). **2**р(e_2)
пр. d, d_{21}	**пр.** d, d_{22}	**пр.** e, e_{21}	**пр.** e, e_{22}

(10).		(11).		(12).	
(a_{31}). **1**g(a_3)	(a_{32}). **0**g(a_3)	(в$_{31}$). **1**g(в$_3$)	(в$_{32}$). **0**g(в$_3$)	(c_{21}). **3**р(c_2)	(c_{22}). **2**р(c_2)
пр. a_1, a_{31}	**пр.** a_1, a_{32}	**пр.** в$_1$, в$_{31}$	**пр.** в$_1$, в$_{32}$	**пр.** с, с$_{21}$	**пр.** с, с$_{22}$

Все ветви помеченной формулы $\mathbf{0}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$ замкнуты. Однако ветви не являются завершенными: помеченные формулы (4.1.2) и (4.2.2) не редуцированы к помеченным подформулам.

$\mathbf{1}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$

(a).$\mathbf{2}\text{У}(p \to g)$	(b).$\mathbf{2}\text{У}(p \to g)$	(c).$\mathbf{3}\text{У}(p \to g)$		
$(a_1)\mathbf{0}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(b_1)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(c_1)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$		
пр. (a)	**пр.** (b)			
		$(c_{11}).\mathbf{3}$Уp	$(c_{13}).\mathbf{2}$Уp	$(c_{15}).\mathbf{2}$Уp
		$(c_{12}).\mathbf{1}$Уg(c_1)	$(c_{14}).\mathbf{1}$Уg(c_1)	$(c_{16}).\mathbf{0}$Уg(c_1)
		пр.(c_{12})	**пр.**(c_{14})	**пр.**(c_{15})

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{1}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$ замкнута, хотя и не является полной. К помеченным формулам, например, строки (c).$\mathbf{3}\text{У}(p \to g)$ и строки $(a_1)\mathbf{0}(\text{У}p \to \text{У}g)$ правила редукции не применялись.

Все ветви помеченной формулы $\mathbf{2}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$ замкнуты (см. Приложение 4). Непомеченная формула $\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g)$ общезначима.

Кроме указанных примеров, были проверены на общезначимость все аксиомы (третий пример — это аксиома), правило вывода и ряд других формул аксиоматической системы Роговского, т.е. тестирование правил редукции, на мой взгляд, было достаточным. Множество правил редукции логики Роговского удовлетворяет методологическим требованиям полноты (Теорема 3) и корректности (Теорема 6).

2 Обобщенные аналитические таблицы

Практика построения аналитических таблиц даже для сравнительно простых формул, т.е. формул, имеющих небольшое число логических связок и операторов, показывает их громоздкость, сложность по сравнению с аналитическими таблицами классической логики. Эта сложность объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, максимальное число новых ветвей, порождаемых правилом ($\rightarrow_2$), равно пяти, тогда как в классической логике это число равно двум. Во-вторых, для каждой формулы логики Роговского строятся три аналитические таблицы, в классическом случае одна. Назовем на время эту вторую сложность *«проблемой большого числа аналитических таблиц»*. Проблематичность имеет место не с теоретической точки зрения (система правил редукции полна и корректна), а с практической: в конце концов табличный способ формализации логики Роговского должен быть удобным инструментом для проверки общезначимости более или менее сложных формул.

Первый недостаток частично устраним, при условии если формулы или подформулы имеют структуру вида: $\mathbf{2}(\text{ТА} \rightarrow \text{В})$, $\mathbf{2}(\text{А} \rightarrow \text{ТВ}), \mathbf{2}(\text{ТА} \rightarrow \text{ТВ}), \mathbf{1}(\text{ТА} \rightarrow \text{В}), \mathbf{1}(\text{А} \rightarrow \text{ТВ}), \mathbf{1}(\text{ТА} \rightarrow \text{ТВ}), \mathbf{2}(\text{УА} \rightarrow \text{В}), \mathbf{2}(\text{А} \rightarrow \text{УВ}), \mathbf{2}(\text{УА} \rightarrow \text{УВ})$ и некоторую другую. Но в этом случае нам нужны производные правила, которые несложно получить. Например, можно получить такое производное правило (производное правило определяется стандартно).

$$\frac{\mathbf{2}(\text{ТА} \rightarrow \text{В})}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{ТА} \\ \mathbf{2}\text{В}\end{array}}$$

(+).$\mathbf{2}(\text{ТА} \rightarrow \text{В})$

(a). $\mathbf{3}$ТА	(b). $\mathbf{2}$ТА	(c). $\mathbf{1}$ТА	(d). $\mathbf{1}$ТА	(e). $\mathbf{1}$ТА
(a_1). $\mathbf{2}$В (+)	(b_1). $\mathbf{2}$В (+)	(c_1). $\mathbf{2}$В (+)	(d_1). $\mathbf{1}$В (+)	$\mathbf{1}$В (+)
	(b_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(b)$	(c_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(c)$	(d_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(d)$	$\mathbf{3}$А, $\mathbf{0}$А (e)
	пр. (b_2)	**пр.** (c_2)	**пр.** (d_2)	**пр.** (e_2)

В данном производном правиле сокращение числа ветвей произошло за счет отсечения заведомо противоречивых ветвей.

Если бы мы применили это производное правило к примеру 10 при построении аналитической таблицы для помеченной формулы $\mathbf{2}(\text{Т}p \rightarrow (g \rightarrow p))$, то ветви (в) (c), (d) и (e) отсутствовали бы. Несложно указать и обосновать другие производные правила.

Производные правила сокращают число ветвей при построении аналитических таблиц, но в отдельных, подходящих случаях, когда структура исследуемой формулы разрешает применять производные правила. Но они не являются применимыми во всех возможных случаях; легко указать в принципе потенциально бесконечный список формул, структура которых не допускает применения производных правил.

В итоге можно утверждать, что появление большого числа ветвей при построении аналитических таблиц неизбежно, так как правила ($\to_1$) и ($\to_2$) отображают табличную семантику импликации. Неизбежно до тех пор, пока не произойдет некоторое обобщение на уровне табличной семантики импликации. Это станет возможным, если будет решена вторая проблема.

Что касается проблемы большого числа аналитических таблиц, то она также вполне объяснима.

Из множества $\Gamma_4 = \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$ истинностных значений, допускаемых логикой Роговского, в качестве выделенного принимается значение $\{3\}$. Остальные истинностные значения $\{0\}$, $\{1\}$ и $\{2\}$ не являются значимыми, выделенными. Тогда, чтобы получить доказательство общезначимости формулы A в табличном построении логики Роговского, надо порознь сделать три предположения о необщезначимости формулы. (1) Имеется хотя бы одна возможность (т.е. открытая ветвь), в которой формула A принимает значение «0», т.е. $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$; (2) Имеется хотя бы одна возможность, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 1$; (3) Имеется хотя бы одна возможность, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 2$.

Синтаксически эти три предположения означают, что построения аналитических таблиц соответственно начинаются с помеченных формул **0**A, **1**A и **2**A. Опровержение же состоит в том (если, конечно, все аналитические таблицы замкнуты), что мы получаем противоречие в каждой ветви этих таблиц. Противоречие означает, что на ветви встречается, по меньшей мере дважды, одна и та же формула (в случае полной таблицы — атомарная формула), но она имеет различные помеченные значения. В более точной записи: на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1\phi_1,\ j_2\phi_2, \ldots,\ j_n\phi_n$ такие, что $\phi_2 = \phi_3 = \cdots = \phi_m$ и $\{j_1\}\cap\{j_2\}\cap\cdots\cap\{j_m\} = \emptyset$, где $j \in \{\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0}\}$ и $1 < m \leq n$. Иначе, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Три *порознь* сделанных предположения о необщезначимости формулы и является подлинной причиной появления трех аналитических таблиц (или, в другой терминологии, трех подтаблиц данной таблицы) для одной и той же исследуемой формулы.

Если обобщить этот подход на произвольную конечнозначную логику, то число аналитических таблиц для любой, исследуемой на общезначимость формулы равно $|N|\backslash|b|$, где $|N|$ — мощность множества истинностных значений, $|b|$ — это мощность выделенных значений истинности. Обобщения табличного способа формализации на произвольную конечнозначную логику, начатое Сурмой (Surma Stanislaw) [7] и продолженное Карниелли (Carnielli Walter) [8], безупречны с точки зрения методологических требований полноты и корректности, предъявляемых к табличным системам. К сожалению, при этом подходе не решается проблема неизбежности построения большого числа аналитических таблиц ($|N|\backslash|b|$) для одной и той же формулы. Поэтому с практической точки зрения они малопригодны. Задача, таким образом, формулируется так: как сократить число аналитических таблиц для одной и той же формулы?

Систематическое решение этой задачи впервые было предложено Хенлем [4]. Основная идея этого решения, если применить ее к четырехзначной логике Роговского, состоит в следующем. Надо предполагать в рассуждении от противного, свойственного для аналитических таблиц, не три изолированных друг от друга случая предположения: «$\nu^*(\mathrm{A}) = 0$», «$\nu^*(\mathrm{A}) = 1$» и «$\nu^*(\mathrm{A}) = 2$», но следует реализовать в этом рассуждении единое условие, а именно: «$\nu^*(\mathrm{A}) = 0$, или $\nu * (\mathrm{A}) = 1$, или $\nu^*(\mathrm{A}) = 2$». Но тогда надо изменить трактовку помеченной формулы. Он назвал это новое понимание помеченной формулы «множества как знаки» (sets as signs). «Множества как знаки» — это синтаксические операторы, которым ставятся в соответствие определенные подмножества $\mathrm{г} \subset \Gamma_4$ истинностных значений из $\Gamma_4 = \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$. Из всех возможных подмножеств множества Γ_4 будут использованы следующие подмножества:

$\{\{0,1,2\},\ \{0,1\},\ \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\}\}$ и $\{3\}$.

Все подмножества, кроме последнего, являются подмножествами множества $\{0,1,2\}$, последнее подмножество является выделенным множеством логики Роговского.

Такой выбор не является случайным. Чтобы доказать в табличной системе логики Роговского общезначимость формулы, надо показать, что помеченная формула, соответствующая множеству $\{0, 1, 2\}$, не является выполнимой, т.е. все ветви этой помеченной формулы замкнуты. Все остальные подмножества $\{0, 1, 2\}$, используемые в качестве знаков помеченных формул, появляются в ходе разложения исходной помеченной подформулы на подформулы, т.е. в процессе построения аналитической таблицы. Если мы превратим само множество $\{0, 1, 2\}$ и его подмножества в синтаксические объекты, т.е. в знаки помеченных формул, то возможны такие виды помеченных формул: **012**:A, **01**:A, **02**:A, **12**:A, **0**A, **1**A, **2**A и, кроме этого, имеется еще одна помеченная формула **3**A, где A — произвольная формула. Тогда, например, формула **012**:A читается «A ложно или A подложно, или A подистинно».

Дальше будем называть *обобщенной помеченной формулой* любую формулу вида **012**:A, **01**:A, **02**:A, **12**:A.

Обобщенным правилом редукции называется любое правило, в котором в посылке или заключении имеется хотя бы одна обобщенная помеченная формула.

Обобщенной аналитической таблицей называется аналитическая таблица, построение которой начинается из формулы **012**:A. Отметим, что в построении обобщенных аналитических таблиц применяются не только обобщенные правила редукции, но и некоторые прежние правила редукции. Сначала модифицируем правила редукции **1**(A→B), **2**(A→B), **0**TA, **3**∼TA, **0**УA и **0**EA так, чтобы в заключении этих правил имелись обобщенные подформулы. Затем укажем новые (обобщенные) правила редукции для формул **012**:A, **01**:A, **02**:A и **12**:A, где A произвольная формула, возможно с оператором. И после этого дадим обоснование этих правил.

Модифицированные правила

$(\to_1)$, $(\to_2)$, (T0), $(\sim$ T3), (У0), (E0).

$$
(\to_1)^+ : \ \dfrac{\mathbf{1}(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{01{:}}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} \end{array}}
\qquad
(\to_2)^+ : \ \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \end{array}
\dfrac{\mathbf{2}(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{12{:}}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \end{array}}
\qquad
(\mathrm{T}_0)^+ : \ \dfrac{\mathbf{0}\mathrm{TA}}{\mathbf{012{:}}\mathrm{A}}
$$

$$(\sim T_3)^+ : \ \dfrac{\mathbf{3}{\sim}\mathrm{TA}}{\mathbf{012:}\mathrm{A}} \qquad (\text{У}_0)^+ : \ \dfrac{\mathbf{0}\text{УА}}{\mathbf{01:}\mathrm{A}} \qquad (E_0)^+ : \ \dfrac{\mathbf{0}\mathrm{EA}}{\mathbf{02:}\mathrm{A}}$$

Обобщенные правила: $(\to_{01})$, $(\to_{02})$, $(\to_{12})$, $(\to_{012})$ и др.

Правила для импликации

$$(\to_{01}) \ \dfrac{\mathbf{01}:(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{01:}\mathrm{B} \end{array}} \qquad (\to_{02}) \ \dfrac{\mathbf{02}:(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{B} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{02:}\mathrm{B} \end{array}}$$

$$(\to_{12}) \ \dfrac{\mathbf{12}:(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} & \mathbf{12:}\mathrm{A} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{12:}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} \end{array}} \qquad (\to_{012}) \ \dfrac{\mathbf{012}:(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{012:}\mathrm{B} & \mathbf{012:}\mathrm{B} \end{array}}$$

Отметим, что правила для импликации: $(\to_0)$ и $(\to_3)$ сохраняются без изменений.

Правила для оператора «В»

$$(B_{01}) : \ \dfrac{\mathbf{01:}\mathrm{BA}}{\mathbf{1}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}} \qquad (B_{02}) : \ \dfrac{\mathbf{02:}\mathrm{BA}}{\mathbf{01:}\mathrm{A}}$$

$$(B_{12}) : \ \dfrac{\mathbf{12:}\mathrm{BA}}{\mathbf{0}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}} \qquad (B_{012}) : \ \dfrac{\mathbf{012:}\mathrm{BA}}{\mathbf{01}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}}$$

Правила для отрицания (слабого)

$$(\sim_{01}) : \ \dfrac{\mathbf{01} : \sim A}{\mathbf{2}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}} \qquad (\sim_{02}) : \ \dfrac{\mathbf{02} : \sim A}{\mathbf{1}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}}$$

$$(\sim_{12}) : \ \dfrac{\mathbf{12} : \sim A}{\mathbf{12:}\mathrm{A}} \qquad (\sim_{012}) : \ \dfrac{\mathbf{012} : \sim A}{\mathbf{12:}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}}$$

Правила для оператора «И»

$$(\text{И}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ИА}}{\mathbf{02:}\text{А}} \qquad (\text{И}_{02}):\ \frac{\mathbf{02:}\text{ИА}}{\mathbf{2}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}}$$

$$\frac{\mathbf{12:}\text{ИА}}{\mathbf{0}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}} \qquad (\text{И}_{012}):\ \frac{\mathbf{012:}\text{ИА}}{\mathbf{02:}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «Т»

$(\text{Т}_{01}) = (\text{Т}_{02}) = (\text{Т}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(\text{Т}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ТА}}{\mathbf{012:}\text{А}} \qquad (\text{Т}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{ТА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для отрицания (сильного) «$\sim$ Т»

$\sim(\text{Т}_{01}) =\sim(\text{Т}_{02}) =\sim(\text{Т}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$\sim(\text{Т}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\sim \text{Т}A}{\mathbf{3}\text{А}} \qquad \sim(\text{Т}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\sim \text{Т}A}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «У»

$(\text{У}_{01}) = (\text{У}_{02}) = (\text{У}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(\text{У}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{УА}}{\mathbf{01:}\text{А}} \qquad (\text{У}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{УА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «Е»

$(E_{01}) = (E_{02}) = (E_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(E_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ЕА}}{\mathbf{02:}\text{А}} \qquad (E_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{ЕА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Разобьем эти правила на три группы : $(\beta)^*$, $(\gamma)^*$ и $(\delta)^*$

$(\beta)^*$	β_1^*	β_2^*	β_3^*
2$(A \to B)$	**1**A **01:**B	**12:**A **2**B	**3**A **2**B
02:$(A \to B)$	**1**A **01:**B	**12:**A **2**B	**3**A **02:**B
12:$(A \to B)$	**12:**A **01:**B	**3**A **12:**B	**12:**A **2**B

$(\gamma)^*$	γ_1^*	γ_2^*
1$(A \to B)$	**2**A **01:**B	**3**A **1**B
01:$(A \to B)$	**2**A **12:**A	**3**A **01:**B
012:$(A \to B)$	**12:**A **012:**B	**3**A **012:**B
01:BA	**1**A	**3**A
12:BA	**0**A	**3**A
012:BA	**01:**A	**3**A
01:$\sim A$	**2**A	**3**A
02:$\sim A$	**1**A	**3**A
012:$\sim A$	**12:**A	**3**A
02:ИA	**2**A	**3**A
12:ИA	**0**A	**3**A
012:ИA	**02:**A	**3**A
12:TA	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:$\sim T$A	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:УA	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:EA	**0**A **3**A	**0**A **3**A

$(\delta)^*$	δ_1^*
0ТА	**012:**А
3$\sim TA$	**012:**А
0УА	**01:**А
0ЕА	**02:**А
02:ВА	**01:**А
12:$\sim A$	**12:**А
01:ИА	**02:**А
01:ТА	**012:**А
01:$\sim TA$	**3:**А
01:УА	**01:**А
01:УА	**02:**А

Прежде чем дать обоснование модифицированных и обобщенных правил, укажем на очевидные факты. В модифицированных правилах число столбцов в заключении, как можно видеть, уменьшилось по сравнению со старыми правилами. Кроме того, во всех указанных правилах максимальное число столбцов (ветвей) в заключении равно трем. Последнее очень важно для практики построения аналитических таблиц, так как это означает, что число ветвей в ходе построения аналитической таблицы для определенной формулы сокращается. Хотя, с другой стороны, число правил редукции увеличивается, но это неудобство скорее психологического характера. И, наконец, вместо трех аналитических таблиц, что особенно важно, строится одна.

Модифицированные и новые правила получаем из старых правил посредством некоторых эквивалентных преобразований ДНФ: переходим от правил редукции к соответствующим им ДНФ, затем проводим эквивалентные преобразования ДНФ, и, наконец, от преобразованной ДНФ переходим к модифицированным или новым правилам редукции.

Прежде отмечалось, что правилам редукции соответствует ДНФ. Надо более точно описать это соответствие. Введем два определения.

(д.1). $\Phi^{\mathbf{i}} \equiv_{Df} \mathbf{i}\Phi$,

где $\mathbf{i} \in \{\mathbf{012},\ \mathbf{01},\ \mathbf{02},\ \mathbf{12},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$, если $\mathbf{i}$ есть оператор формулы, т.е. знак помеченной формулы, и $i \in \{\{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\},\ \{1,\ 2\},\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$, если **i** есть знак истинностного значения формулы. В последнем случае **i** используется в качестве верхнего индекса, т.е. $\Phi^{\mathbf{i}}$. $\Phi^{\mathbf{i}}$ читается «Ф имеет истинностное значение i». Определение (д.1) позволяет переходить от операторов формулы к истинностным значениям формулы, и обратно.

(д.2). $\Phi^{\mathbf{ij}} \equiv_{Df} \Phi^{\mathbf{i}} \vee \Phi^{\mathbf{j}}$,

где **i**, **j** — одинаковые или различные истинностные значения одной и той же формулы Ф. Это определение позволяет объединить отдельные истинностные значение формулы Ф в множество, и наоборот, разбить множество истинностных значений на отдельные истинностные значения фиксированной формулы. Например. $\mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^0 = A^{\{1,0\}} = A^{10}$, т.е. ради краткости скобки и запятую мы опускаем.

Эти два определения и соглашения о замене конъюнкции запятой (в правилах редукции на самом деле используется не запятая, а запись в виде написанных одна под другой формул) и обратно; а также замены дизъюнкции вертикальной чертой, и обратно, позволяют описать соответствие между ДНФ и правилами редукции.

Дадим *обоснование правила* $(\to_1)^+$.

$\mathbf{1}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^1 =_{(\text{по таблице истинности для} \to)} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^0)) =_{(\text{дистр.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1)) =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д.1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{1}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соответствие})}$ $\mathbf{3}\mathrm{A},\ \mathbf{1}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{A},\ \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Обоснование правила $(\to_2)^+$.

$\mathbf{2}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^2 =_{(\text{по таблице истинности для} \to)} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^2)) \vee ((\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^0)) =_{(\text{дистр.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge (\mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^2) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1) =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge \mathrm{A}^{12}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{2}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{B} \wedge \mathbf{12{:}}\mathrm{A}) \vee (\mathbf{1}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соответствие})} \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{B}, \mathbf{12{:}}\mathrm{A} \mid \mathbf{1}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Дальше будем использовать термин *обобщенные таблицы истинности* для обозначения факта объединенных истинностных значений, выраженных верхними индексами формул. Например, формула $(\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge \mathrm{A}^{12}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01})$ представляет обобщенные таблицы истинности, так как в ней использованы вхождения подформул A^{12}, B^{01}.

Отметим, что после второго знака равенства мы имеем СДНФ импликации, принимающей истинностное значение «2», где верхние индексы формул A и B указывают те построчные истинностные наборы, на которых импликация принимает значение «2». После третьего знака равенства дана одна из возможных ДНФ, полученная из СКНФ, поэтому в принципе возможна различная формулировка правил редукции. В этом случае для формулы $\mathbf{2}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$ мы могли бы получить еще один вариант правила редукции, а именно: $\mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}A, \mathbf{2}B \mid \mathbf{1}\mathrm{A}, \mathbf{012{:}}\mathrm{B}$. И первый вариант правила редукции, и второй (я его не использовал) порождают в аналитических таблицах одинаковое число ветвей (три ветви), но в первом варианте имеется две ветви с обобщенными помеченными формулами, тогда как во второй — одна. В первом варианте будем иметь две ветви меньшей длины, во втором одну. Однако формулы, выражающей точные количественные оценки длины ветвей, мы не имеем.

Дальше приведем обоснование некоторых новых правил. Все эти новые правила есть результат старых правил ($\mathbf{0}$A ,$\mathbf{1}$A, $\mathbf{2}$A, $\mathbf{3}$A) и модифицированных правил.

Обоснование правила $\mathbf{01{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$.

$\mathbf{01{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{01}} =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{0}} \vee (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{1}} = \; =_{(\text{таб. ист., обобщ. таб. ист.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) = \; =_{(\text{коммутат., ассоц.})} ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01})(\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) = \; =_{(\text{дистр.})} ((\mathrm{A}^3 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1)) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д.2})} ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соотв}-\text{е})} \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Обоснование правила $\mathbf{12{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$

$12 : (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{12}} =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{1}} \vee (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{2}} =_{(\text{об. таб. ист.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) \vee ((\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2)) =_{(\text{коммутат., ассоц.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01})) \vee ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2)) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{дистр.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{A}^1) \vee \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge (\mathrm{B}^1 \vee \mathrm{B}^2)) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{коммутат., д.2})} (\mathrm{A}^{12} \vee \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^{12}) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{д1})} (\mathbf{12{:}}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{12{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{12{:}}\mathrm{A} \wedge \mathbf{2}\mathrm{B}) =_{(\text{соотв.})} \mathbf{12{:}}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{12{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{12{:}}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B}$

Остальные правила для импликации обосновываются сходным образом.

Дадим обоснование правила $\mathbf{012{:}}$BA и некоторых других.

$\mathbf{012{:}}\mathrm{BA} =_{(\text{д.1, д.2})} \mathrm{BA}^0 \vee \mathrm{BA}^1 \vee \mathrm{BA}^2 =_{(\text{табл.истин.})} \mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^3 \vee \mathrm{A}^0 =_{(\text{коммут.})} (\mathrm{A}^0 \vee \mathrm{A}^1) \vee \mathrm{A}^3 =_{(\text{д.2})} \mathrm{A}^{01} \vee \mathrm{A}^3 =_{(\text{соответст.})} \mathbf{01{:}}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}.$

Применение определения (д.1) перед последним знаком «=» опускается.

Обоснуем **12:**ТА.

$\mathbf{12:}\mathrm{TA} =_{(\text{д.1, д.2})} \mathrm{TA}^{\mathbf{1}} \vee \mathrm{TA}^{\mathbf{2}} =_{(\text{д.1})} \mathbf{1}\mathrm{TA} \vee \mathbf{2}\mathrm{TA} =_{(\text{по прав. }\mathbf{1}\mathrm{TA},\ \mathbf{2}\mathrm{TA})}$ $\mathbf{0}\mathrm{A}, \mathbf{3}\mathrm{A} \vee \mathbf{0}\mathrm{A}, \mathbf{3}\mathrm{A} =_{(\text{идемп.})} \mathbf{0}\mathrm{A}, \mathbf{3}\mathrm{A}$.

Обратим внимание, что после второго равенства мы отступили от прежнего порядка обоснования правил, т.е. не указали для $\mathrm{TA}^{\mathbf{1}}$ и $\mathrm{TA}^{\mathbf{2}}$ соответствующих им ДНФ. Вместо этого свели правило **12:**ТА к двум старым правилам: **1**ТА и **2**ТА. Это объясняется тем, что ТА, согласно таблице истинности, не имеет истинностных значений «1» и «2» при любом истинностном значении формулы А. В этих случаях, когда формула с каким-то оператором («Т» « У» и др.) не имеет истинностного значения, мы приписываем им противоречие.

Обоснования остальных правил осуществляются аналогично вышеприведенным обоснованиям.

Часть прежних понятий, описывающих аналитическую таблицу, надо модифицировать.

Аналитической таблицей для формулы А логики изменения и направленности Роговского называется 3-*адическим* деревом Д (точками которого являются формулы), удовлетворяющее таким условиям.

Пусть Д_1 и Д_2 два упорядоченных 3-*адических* дерева. Д_2 называется *непосредственным расширением* Д_1, если Д_2 получено из Д_1 применением одного из правил типа $(\beta)^*$, $(\gamma)^*$ или $(\delta)^*$.

Тогда Д есть *аналитическая таблица* для формулы А тогда и только тогда, когда имеется конечная последовательность $\text{Д}_1,\ \text{Д}_2, \ldots \text{Д}_n$, где $\text{Д}_n = \text{Д}$ такая, что Д_1 одноточечное дерево, чей корень есть формула А и Д_{i+1} есть непосредственное расширение Д_i для каждого $i < n$.

Прежде у нас имелось 5-*адическое* дерево Д, теперь 3-*адическое* дерево Д. Это объясняется тем, что максимальное число ветвей, которые порождаются обобщенными правилами редукции, равно трем.

Понятие ветви остается без изменений. Но понятие замкнутой ветви несколько изменяется.

Назовем ветвь θ таблицы формулы А *замкнутой (закрытой)*, если она содержит хотя бы одну пару противоречивых формул.

Противоречие по-прежнему означает, что на ветви встречается, по меньшей мере дважды, одна и та же формула (в случае полной таблицы — атомарная формула), но она имеет непересекающиеся «множества-знаки», т.е. на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1\text{ф}_1,\ j_2\text{ф}_2, \ldots,\ j_n\text{ф}_n$ такие, что $\text{ф}_2 = \text{ф}_3 = \cdots = \text{ф}_m$ и $\{j_1\}\cap\{j_2\}\cap\cdots\cap\{j_m\} = \varnothing$, где $j \in \{\mathbf{3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 01,\ 02,\ 12,\ 012}\}$ и $1 < m \leq n$. В противном случае, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Таблица называется *замкнутой*, если все ее ветви замкнуты. Естественно модифицируется понятие полной ветви.

Ветвь θ таблицы Д называется полной, если для всякой формулы вида $(\beta)^+,\ (\gamma)^+,\ (\delta)^+$ ветвь θ удовлетворяет следующим условиям (предполагается, что каждая формула вида $(\beta)^+, (\gamma)^+, (\delta)^+$ имеет конечное число вхождений логических связок и операторов):

(у.1)$^+$ — если $(\beta)^+ \in \theta,$ то $\beta_1^+ \in \theta$ или $\beta_2^+ \in \theta,$ или $\beta_3^+ \in \theta;$

(у.2)$^+$ — если $(\gamma)^+ \in \theta,$ то $\gamma_1^+ \in \theta$ или $\gamma_2^+ \in \theta;$

(у.3)$^+$ — если $(\delta)^+ \in \theta,$ то $\delta_1^+ \in \theta.$

Табличное доказательство непомеченной формулы А есть замкнутая таблица для формулы **012**А.

Проверим работу этих правил на старых примерах: Т$p \to (g \to p),\ p \to (g \to p)$ и У$(p \to g) \to ($У$p \to$ У$g)$.

ПРИМЕР 13. Т$p \to (g \to p)$. Проверить, является ли эта формула общезначимой.

Согласно новому взгляду на аналитические таблицы для логики Роговского мы можем строить не три аналитические таблицы, а одну.

(1). **012:**Т$p \to (g \to p)$		
(2).		
(a).**12:**Тp	(b).**3**Тp	
(a_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	(b_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	
(a_2).**0**p, **3**$p(a)$	(b_2) **3**p (b)	
пр. a	(b_3). **3**p	(b_4). **3**g
	(b_{31}).**012:**p (b_1)	(b_{41}).**012:**p (b_1)
	пр. $b_{31},\ b_2$	**пр.** $b_{41},\ b_2$

Все ветви таблицы замкнуты. Формула Т$p \to (g \to p)$ общезначима. Очевидно, если сравнить Пример 10 и Пример 13, то новые правила по сравнению со старыми являются более эффективным средством проверки общезначимости исследуемой формулы.

(1). **012:**Т$p \to (g \to p)$			
(2).			
(a).**12:**Тp		(b).**3**Тp	
(a_1).**012:**$(g \to p)$ (1)		(b_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	
(a_{11}).**12:**g	(a_{13}).**3**g	(b_{11}).**12:**g	(b_{13}).**3**g
(a_{12}).**012:**p (a_1)	(a_{14}).**012:**p (a_1)	(b_{12}).**012:**p (b_1)	(b_{14}).**012:**p (b_1)

Таблица полная, ни одна ветвь не является замкнутой. Формула не является общезначимой.

ПРИМЕР 14. Проверить общезначимость формулы У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg).

(1).**012:**У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg)				
(2)				
(a). **12:** У$(p \to g)$	(b). **3**У$(p \to g)$			
(a_1). **012:**(У$p \to$ Уg) (1)	(b_1). **012:**(У$p \to$ Уg) (1)			
(a_2). **3**У$(p \to g)$ (a)	(b_2). **12:**Уp	(b_5).**3**Уp		
(a3). **0**У$(p \to g)$ (a)	(b_3).**012:**Уg (b_1)	(b_6).**012:**У$g(b_1)$		
пр. (a_2), (a_3)	(b_4). **3**p, **0**p (b_2)	(b_7).**01:**$g(b_6)$		
	пр. (b_4)	(c). **3**$(p \to g)$(b)		(e). **2**$(p \to g)$ (b)
		(c_1). **0**p (c)	(c_2).**3**g (c)	
			пр. b_7, c_2	
(c_{11}).**3**p (b_5)	(c_{12}).**2**p (b_5)			
пр. c_{11}, c_1	**пр.** c_{12}, c_1			
	(e_1). **1**p		(e_2). **12:**p	(e_3). **3**p
	(e_{11}).**01:**g(e)		(e_{21}).**2**g(e)	(e_{31}).**2:**g(e)
	(e_{12}). **2**p (b_5)	(e_{13}).**3**p(b_5)	**пр.**e_{21}, b_7	**пр.**(e_{31}), (b_7)
	пр. e_{12}, e_1	**пр.** e_{13}, e_1		

Все ветви замкнуты для **012:**((У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg)). Формула У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg) общезначима.

Для того чтобы доказать теорему о полноте и корректности для формализованной логики Роговского посредством обобщенных аналитических таблиц, надо продолжить уточнения понятий.

К определениям $(d_1) - (d_4)$, связывающим выполнимость помеченной формулы и оценку непомеченной формулы, добавим следующие определения:

$$(d_5).\exists\nu(\nu(\mathbf{01}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\text{A}) = 0 \text{ или } \nu(\text{A}) = 1;$$

$$(d_6).\exists\nu(\nu(\mathbf{02}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\text{A}) = 0 \text{ или } \nu(\text{A}) = 2;$$

$$(d_7).\exists\nu(\nu(\mathbf{12}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\text{A}) = 1 \text{ или } \nu(\text{A}) = 1;$$

$$(d_8).\exists\nu(\nu(\mathbf{012}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\text{A}) = 1 \text{ или } \nu(\text{A}) = 2;$$

Понятия *выполнимой* формулы, *общезначимой, тождественно ложной, необщезначимой*, и *невыполнимой* формулы остаются прежними.

Уточняется понятие хинтикковского множества.

Назовем множество обобщенно помеченных формул $\mathbf{H}^+$ множеством Хинтикки, если и только если для любых формул вида $(\beta)^+$, $(\gamma)^+$ и $(\delta)^+$ оно удовлетворяет таким условиям:

$(\mathbf{H}_0)^+$. Для всех атомарных формул p, если j_1p, j_2p $\in \mathbf{H}^+$, то $\{j_1\} \cap \{j_2\} \neq \emptyset$, где$j \in \{\mathbf{3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 01,\ 02,\ 12,\ 012}\}$;

$(\mathbf{H}_1)^+$. Если $\beta \in \mathbf{H}^+$, то $\beta_1 \in \mathbf{H}+$ или $\beta_2 \in \mathbf{H}^+$, или $\beta_3 \in \mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_2)^+$. Если $\gamma \in \mathbf{H}^+$, то $\gamma_1 \in \mathbf{H}^+$ или $\gamma_2 \in \mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_3)^+$. Если $\delta \in \mathbf{H}^+$, то $\delta_1 \in \mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_{3.1})^+$. $\mathbf{0}(\text{A} \to \text{B})$, $\mathbf{12:}$TA, $\mathbf{12:} \sim$ TA, $\mathbf{12:}$УA, $\mathbf{12:}$EA $\notin \mathbf{H}^+$.

Последний пункт определения выделяет то множество правил (точнее посылок правил) из группы δ, которые ведут к противоречию.

Для доказательства леммы о том, что обобщенно помеченные формулы множества Хинтикки одновременно выполнимы, надо построить оценку ν^*, в которой все формулы этого множества истинны. Для этого припишем всем атомам, из которых построены формулы, принадлежащие H^+, истинностные значения согласно следующим условиям:

$$(1)^{+}.\nu^{*}(p) = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, \text{ если } \mathbf{01{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 0 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{02{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 1 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{12{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 0 \text{ или } 1 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{012{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \end{cases}$$

$(2)^{+}$. Если помеченная атомарная подфомула $\mathbf{j}p$ не принадлежит $\mathbf{H}^{+}$, то для определенности будем считать, что $\nu^{*}(\mathrm{p}) = 3$, где $\mathbf{j} \in \{\mathbf{01, 02, 12, 012}\}$.

Поскольку среди помеченных формул из $\mathbf{H}^{+}$ встречаются и атомарные формулы вида **0**p, **1**p, **2**p, **3**p, то условия $(1)^{+}$ и $(2)^{+}$ добавляются к условиям (1) и (2), которые были сформулированы выше при доказательстве выполнимости множества Хинтикки, содержащее формулы вида **0**A, **1**A, **2**A и **3**A.

Имея уточнения нужных понятий, сформулируем следующие утверждения об обобщенных аналитических таблицах логики Роговского.

ТЕОРЕМА 15. *Каждая полная открытая ветвь обобщенной таблицы одновременно выполнима.*

ЛЕММА 16. *Каждое множество Хинтикки, содержащее обобщенно помеченные формулы для R_4, является одновременно выполнимым.*

ТЕОРЕМА 17. *Если A есть общезначимая формула, то завершенная таблица для обобщенно помеченной формулы **012:**A является замкнутой* $(\text{в})^{+}$. *Если A общезначима, то A таблично доказуема.*

СЛЕДСТВИЕ 18. *Если имеется хотя бы одна незамкнутая ветвь таблицы обобщенно помеченной формулы **012:**A, то формула A не является общезначимой.*

ЛЕММА 19. *Если имеется замкнутая таблица для формулы A, то множество формул, расположенных на каждой замкнутой ветви таблицы, не являются одновременно выполнимым.*

ТЕОРЕМА 20. *Если A имеет обобщенное табличное доказательство, то A общезначима.*

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству соответствующих доказательств для случая простых аналитических таблиц логики Роговского.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Обобщенные аналитические таблицы более эффективны в проверке общезначимости формул логики Роговского. Но это не значит, что простые аналитические таблицы стали лишними. Обобщенные аналитические таблицы есть скрытая дизъюнкция простых аналитических таблиц. Не имея табличной семантики первых, семантика вторых была бы неясной. Обратим внимание также на то, что, увеличивая число выделенных значений, число простых аналитических таблиц для одной и той же формулы уменьшается: $|N|\backslash|b|$, где $|N|$ — фиксированная мощность множества истинностных значений, $|b|$ — это мощность выделенных значений истинности. В четырехзначной логике Роговского, руководствуясь теми или иными содержательными соображениями, число выделенных значений может колебаться от одного до трех. В этом случае простые аналитически таблицы вовсе не лишние. Автор благодарен В. А. Бочарову за полезные замечания.

Литература

[1] *Аншаков О. М.* О некоторых конструктивизациях пропозициональных логик Д. А. Бочвара и С. Холдена // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 335–359.

[2] *Бочвар Д. А., Финн В. К.* Некоторые дополнения к статьям о многозначных логиках // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976.

[3] *Fitting M.* First — order Logic and Automated Theorem Proving. Springer-Verlag, New York. 1990. Pp. 51-55.

[4] *Hähnle R.* Towards an efficient tableau proof procedure for multiple- valued logics // Proceedings Workshop on Computer Science Logics. P.248-260. Heidelberg. Springer, LNCS 533, 1990.

[5] *Rogowski L.S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprecznośścizmiany/ Toruń. 1969.

[6] *Smullyan R. M.* First — order logic. N.Y., 1968.

[7] *Surma S. J.* An algorithm for axiomatizing every finite logic // Computer Science and Multiple-Valued Logics. P. 143-149. North-Holland. Amsterdam. 1984.

[8] *Carnielli W. A.* Systematization of finite many - valued logics through the method of tableaux // Journal of Symbolic Logic.52(2): 473-493. June 1987.

Приложение 1.

(1)			$\mathbf{1}(\text{Тр} \to (g \to p))$						
(2)									
(a)	**3**Тр					(b)	**2**Тр	(c)	**2**Тр
(a_1)	$\mathbf{1}(g \to p)$ (1)					(b_1)	$\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(c_1)	$\mathbf{0}(g \to p)$ (1)
(a_2)	**3**р (a)					(b_2)	**3**р (b)	(c_2)	**3**р (c)
(3)							**0**р (b)		**0**р (c)
(a_{11})	**3**g		**2**g		**2**g		**пр.**(b)		**пр.**(c)
(a_{12})	**1**р (a_1)	(a_{13})	**1**р (a_1)	(a_{15})	**0**р (a_1)				
	пр. a_2, a_{12}	(a_{14})	**пр.** a_2, a_{14}	(a_{16})	**пр.** a_2, a_{16}				

(1)					$\mathbf{2}(\text{Тр} \to (g \to p))$				
(2)									
(a)	**3**Тр	(b)	**2**Тр	(c)	**1**Тр	(d)	**1**Тр	(e)	**1**Тр
(a_1)	$\mathbf{2}(g \to p)$ (1)	(b_1)	$\mathbf{2}(g \to p)$ (1)	(c_1)	$\mathbf{2}(g \to p)$ (1)	(d_1)	$\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(e_1)	$\mathbf{0}(g \to p)$ (1)
(a_2)	**3**р (a)	(b_2)	**3**р, **0**р (в)	(c_2)	**3**р, **0**р (c)	(d_2)	**3**р, **0**р (d)	(e_2)	**3**р (e)
			пр. в$_2$		**пр.** c_2		**пр.** d_2		**пр.** e_2
(3).									
(a_{11})	**3**g	(a_{13})	**2**g	(a_{15})	**1**g	(a_{17})	**1**g	(a_{19})	**1**g
(a_{12})	**2**р (a_1)	(a_{14})	**2**р (a_1)	(a_{16})	**2**р (a_1)	(a_{18})	**1**р (a_1)	(a_{10})	**0**р (a_1)
	пр. a_2, a_{12}		**пр.** a_2, a_{14}		**пр.** a_2, a_{16}		**пр.** a_2, a_{18}		**пр.** a_2, a_{10}

Приложение 2.

(1)			$\mathbf{1}(\mathrm{p} \to (g \to p))$		
(2) (a)**3**p $(a_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)			(b) **2**p $(b_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)		(c) **2**p $(c_1)\mathbf{0}(g \to p)$ (1) $(c_2)\mathbf{3}$g $c_3\mathbf{0}$p (c) **пр.** c, c_3
(3.1) (a_{11}). **3**g (a_{12}).$\mathbf{1}p(a_1)$ **пр.** a, a_{12}	(a_{13}). **2**g (a_{14}).$\mathbf{1}p(a_1)$ **пр.** a, a_{14}	(a_{15}). **2**g (a_{16}).$\mathbf{0}p(a_1)$ **пр.** a, a_{16}	(3.2) (b_{11}). **3**g (b_{12}). **1**p (b_1) **пр.** b, b_{12}	(b_{13}). **2**g (b_{14}). **0**p **пр.** b, b_{14}	(b_{15}). **2**g $(b_{16}$. **1**p (в$_1$) **пр.** b, b_{16}

Приложение 3.

(1)			$\mathbf{2}(\mathrm{p} \to (g \to p))$				
(2) (a)**3**p $(a_1)\mathbf{2}(g \to p)$(1)	(b)**2**p $(b_1)\mathbf{2}(g \to p)$ (1)		(c)**1**p $(c_1)\mathbf{2}(g \to p)$ (1)		(d)**1**p $(d_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(e)**1**p $(e_1)\mathbf{0}(g \to p)$ (1)	
(3.1) $(a_{11})\mathbf{3}$g $(a_{12})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**$a,\ a_{12}$	$(a_{13})\mathbf{2}$g $(a_{14})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**$a,\ a_{14}$	$(a_{15})\mathbf{1}$g $(a_{16})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**$a,\ a_{16}$	$(a_{17})\mathbf{1}$g $(a_{18})\mathbf{1}p$ (a_1) **пр.**$a,\ a_{18}$	$(a_{19})\mathbf{1}$g $(a_{110})\mathbf{0}p(a_1)$ **пр.**$a, a_{1.10}$			
			$(b_{11})\mathbf{3}$g (b_{12}) **2**p (b_1)	$(b_{13})\mathbf{2}$g (b_{14}) **2**p (b_1)	(3.2) $(b_{15})\mathbf{1}$g (b_{16}) **2**p (b_1)	$(b_{17})\mathbf{1}$g (b_{18}) **1**p (b_1) **пр.**$b,\ b_{18}$	$(b_{19})\mathbf{1}$g (b_{110}) **1**p (b_1) **пр.**$b,\ b_{10}$

Приложение 4.

(1). $\mathbf{2}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$

(2).

$(a_1)\mathbf{3}\text{У}(p \to g)$	$(b_1)\mathbf{2}\text{У}(p \to g)$	$(c_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$	$(d_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$	$(e_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$
$(a_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(b_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(c_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(d_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(e_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$
	$(b_3)\mathbf{3}(p \to g)$	$(c_3)\mathbf{3}(p \to g)$	$(d_3)\mathbf{3}(p \to g)$	$(e_3)\mathbf{3}(p \to g)$
	$(b_4)\mathbf{0}(p \to g)(b_1)$	$(c_4)\mathbf{0}(p \to g)(c_1)$	$(d_4)\mathbf{0}(p \to g)(d_1)$	$(e_4)\mathbf{0}(p \to g)(e_1)$
	пр. $b_3,\ b$	**пр.** $c_3,\ c_4$	**пр.** $d_3,\ d_4$	**пр.** $e_3,\ e_4$

(3)

$(a_{21}).\mathbf{3}\text{У}\mathrm{p}$	$(a_{24}).\mathbf{2}\text{У}\mathrm{p}$	$(a_{27}).\mathbf{2}\text{У}\mathrm{p}$
$(a_{22}).\mathbf{2}\text{У}\mathrm{g}\ (a_2)$	$(a_{25}).\mathbf{2}\text{У}\mathrm{g}\ (a_2)$	$(a_{28}).\mathbf{2}\text{У}\mathrm{g}\ (a_2)$
$(a_{23}).\mathbf{3}\mathrm{g}\mathbf{0}\mathrm{g}(a_{22})$	$(a_{26}).\mathbf{3}\mathrm{p}\mathbf{0}\mathrm{p}(a_{24})$	$(a_{29}).\mathbf{3}\mathrm{p}\mathbf{0}\mathrm{p}(a_{27})$
пр. a_{23}	**пр.** a_{26}	**пр.** a_{29}