n-значные матрицы для классической логики высказываний

Л. Ю. Девяткин

ABSTRACT. This paper is devoted to the mutiple-valued logical matrices in which the class of tautologies is one of a classical propositional logic. A class of such matrices with a classical consequence relation is described. Moreover several classes of multiple-valued matrices of the type in question with a non-classical consequence relation are considered.

Ключевые слова: многозначные логики, классическая логика высказываний, логические матрицы, отношение логического следования.

Существует множество примеров логических матриц с трехэлементным множеством-носителем, являющихся характеристическими для классической логики [2, 4]. Более того, матрицы для многих известных многозначных логик содержат такие матрицы в качестве фрагментов. Особый интерес представляет тот факт, что существуют многозначные логики, равные классической по классу тавтологий, но с неклассическим отношением логического следования [3]. В настоящей работе будут описаны несколько обширных классов матриц, обладающих интересующими нас свойствами.

При формулировке и доказательстве теорем мы использовали пропозициональный язык $L_{\supset\neg}$.

Алфавит языка $L_{\supset\neg}$ содержит в точности следующие символы:

- Пропозициональные переменные: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$, $\ldots$, $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}_n$, $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{s}_n$;
- пропозициональные связки: $\supset$, $\neg$;
- технические символы:), (.

Определение $L_{\supset\neg}$-формулы:

- Если **A** есть пропозициональная переменная, то **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула;
- если **A** и **B** есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $(\neg\mathbf{A})$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы;
- ничто иное не есть $L_{\supset\neg}$-формула.

Мы будем рассматривать матрицы вида $M =< U, \supset^*, \neg^*, D >$, где U – непустое множество истинностных значений, $\supset^*$ – бинарная операция на U, $\neg^*$ – унарная операция на U, D – множество значений, выделенных в M, причем $D \subset U$ и $\{0\} \notin D$.

В такой формулировке матрица для классической логики будет иметь следующий вид: $M_2 =< \{1, 0\}, \supset^2, \neg^2, \{1\} >$, где функции $\supset^2$ и $\neg^2$ – классические импликация и отрицание.

Оценку в матрице M определим как отображение множества пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в U.

Значение $L_{\supset\neg}$-формулы в матрице M при оценке v определяется индукцией по построению $L_{\supset\neg}$-формулы:

- $|\mathbf{p}|^M_v = v(\mathbf{p})$, если **p** есть пропозициональная переменная;
- если **B** и **C** есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $|(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})|^M_v = |\mathbf{B}|^M_v \supset^* |\mathbf{C}|^M_v$;
- если **B** есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $|(\neg\mathbf{B})|^M_v = \neg^*|\mathbf{B}|^M_v$.

Если существует оценка v в M такая, что $|\mathbf{A}|^M_v \in D$, будем говорить, что **A** выполнима в M.

Формула **A** называется общезначимой в M, е.т.е при всякой оценке v в M **A** принимает выделенное значение.

Классическое отношение логического следования определим следующим образом: в M из множества формул $\mathbf{\Gamma}$ логически следует формула **B** ($\mathbf{\Gamma} \vDash \mathbf{B}$), е.т.е не существует такой оценки v в M, что каждая формула **A** из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение и **B** не принимает выделенное значение. Будем говорить, что отношение логического следования в некоторой матрице является классическим, когда в этой матрице заключение логически следует из посылок в том и только том случае, когда оно логически следует из посылок в матрице для классической логики.

Под многозначным изоморфом классической пропозициональной логики будем понимать такую матрицу $M' =< U, \subset', \neg', D >$, что U' содержит не менее трех элементов и класс формул, общезначимых в M', равен классу формул, общезначимых в M_2. Изоморф M' называется нормальным, если отношение логического следования в M' является классическим. Изоморф называется C-расширяющим, если операции $\subset'$ и $\neg'$ совпадают с $\supset^2$ и $\neg^2$ соответственно на множестве $\{1, 0\}$.

При формулировке условий, которым должна отвечать матрица, чтобы являться изоморфом классической логики высказываний, и их доказательстве широко использовался подход, предложенный В.М. Поповым [1]. В его основе лежат понятия замещения оценки и отображения многоэлементного множества-носителя некоторой матрицы M на множество-носитель матрицы M_2 – $\{1, 0\}$.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в многоэлементное множество-носитель U некоторой матрицы $M' =< U, \subset', \neg', D >$ назовем k-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$, что для всякой пропозициональной переменной $\mathbf{p}$

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, \text{ если} v(\mathbf{p}) \in D; \\ 0, \text{ если} v(\mathbf{p}) \notin D. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в U существует единственное k-замещение этого отображения. Обозначим через $\tilde{v}$ k-замещение отображения v.

Определим φ_k как отображение множества U на множество $\{0, 1\}$ такое, что $\varphi_k(x) = 1$, если $x \in D$ и $\varphi_k(x) = 0$, если $x \notin D$.

ЛЕММА 1. *Пусть $M_n^m =< U, \supset_n, \neg_n, D >$ - n-элементная матрица с m выделенных значений, а $\supset_n$ и $\neg_n$ отвечают условиям:*

- *$x \supset_n y \in D$, е.т.е $x \notin D$ или $y \in D$;*
- *$\neg_n x \in D$, е.т.е $x \notin D$.*

Тогда $\forall \boldsymbol{A} \forall v$: если $\boldsymbol{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k |\boldsymbol{A}|_v^{M_n^m} = |\boldsymbol{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$.

Доказательство. Докажем Лемму индукцией по построению формулы.

Базис. Пусть $\mathbf{A}$ – пропозициональная переменная.

1. Неверно, что $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} = |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).

2. $\exists\mathbf{A}\exists v$: $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).

3. Пусть $\mathbf{A}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).

4. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).

5. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).

6. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).

7. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).

8. $|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (7), по определению φ_k).

9. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (8), того факта, что A есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и определения $\tilde{v}$).

10. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (6)).

11. Неверно, что (6) (из (9), (10)).

12. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (5), (11)).

13. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (12)).

14. $|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (13), того факта, что A есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и определения $\tilde{v}$).

15. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (14), по определению φ_k).

16. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (12)).

17. Неверно, что (1) (из (15), (16)).

Базис индукции доказан.

Пусть $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} = |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ имеет место для формул, которые содержат менее, чем n связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение Леммы верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\neg\mathbf{C})$ либо $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\neg\mathbf{C})$.

1. Неверно, что $\forall(\neg\mathbf{C})\forall v$: если $(\neg\mathbf{C})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|(\neg\mathbf{C})|_v^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).
2. $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $(\neg\mathbf{C})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\neg\mathbf{C})|_v^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).
3. Пусть $(\neg\mathbf{C}^*)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).
4. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).
5. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).
6. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).
7. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = \neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).
8. $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (6), (7)).
9. $|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (8), по определению $\neg_2$).
10. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу индуктивного допущения).
11. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (9), (10)).
12. $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (11), по определению φ_k).
13. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (12), по определению $\neg_n$).

14. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы)).

15. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (13), (14)).

16. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (15), по определению φ_k).

17. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).

18. Неверно, что (6) (из (16), (17)).

19. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (5), (18)).

20. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (19)).

21. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = \neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

22. $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (20), (21)).

23. $|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (22), по определению $\neg_2$).

24. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу индуктивного допущения).

25. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (23), (24)).

26. $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (25), по определению φ_k).

27. $\neg_n|\mathbf{C}^*| \notin D$ (из (26), по определению $\neg_n$).

28. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы)).

29. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (27), (28)).

30. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (29), по определению φ_k).

31. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (19)).

32. Неверно, что (1) (из (30), (31)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$.

1. Неверно, что $\forall(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\forall v$: если $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_n^m} = |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).
2. $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).
3. Пусть $(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).
4. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).
5. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).
6. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).
7. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).
8. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (7), по определению φ_k)
9. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \supset_n |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).
10. $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \supset_n |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (8), (9)).
11. $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (10), по определению $\supset_n$).
12. $\varphi_k|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (11), по определению φ_k).
13. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (12), в силу индуктивного допущения).
14. $\varphi_k|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (11), по определению φ_k).
15. $|\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (14), в силу индуктивного допущения).
16. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (13), (15), по определению $\supset_2$).
17. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

18. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (16), (17)).

19. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ (из (6)).

20. Неверно, что (6) (из (18), (19)).

21. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (5), (20)).

22. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (21)).

23. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = |\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

24. $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (22), (23)).

25. $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (24), по определению $\supset_2$).

26. $\varphi_k|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (25), в силу индуктивного допущения).

27. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \in D$ (из (26), по определению φ_k).

28. $\varphi_k|\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} = 0$ (из (25), в силу индуктивного допущения).

29. $|\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (28), по определению φ_k).

30. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \supset_n |\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (27), (29), по определению $\supset_n$).

31. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \supset_n |\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} = |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

32. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (30), (31)).

33. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 0$ (из (32), по определению φ_k).

34. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (21)).

35. Неверно, что (1).

Таким образом, $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M^m_n, то $\varphi_k|\mathbf{A}|^{M^m_n}_v = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\tilde{v}}$. Q.E.D.

ЛЕММА 2. *$\forall v$: если v – оценка в M_2, то $v = \tilde{v}$.*

Доказательство.

В силу определения v есть отображение множества пропозициональных переменных на множество $\{1, 0\}$. По определению класса выделенных в M_2 значений $\{1\}$ всегда принадлежит D и $\{0\}$ никогда не принадлежит D. Следовательно, по определению k-замещения $\tilde{v}(\mathbf{p}) = 1$ если $v(\mathbf{p}) = 1$, и $\tilde{v}(\mathbf{p}) = 0$, если $v(\mathbf{p}) = 0$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $M_n^m =< U, \supset_n, \neg_n, D >$ - *n-элементная матрица с m выделенных значений и* $\supset_n$, *и* $\neg_n$ *отвечают условиям:*

- $x \supset_n y \in D$, *е.т.е* $x \notin D$ *или* $y \in D$;
- $\neg_n x \in D$, *е.т.е* $x \notin D$.

Тогда отношение логического следования в M_n^m *является классическим.*

Доказательство. Чтобы доказать Теорему 3, необходимо и достаточно доказать, что для всякого множества $L_{\supset\neg}$-формул $\mathbf{\Gamma}$ и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы $\mathbf{B}$, верны следующие утверждения:

- У1. Если $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_2} \mathbf{B}$, то $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_n^m} \mathbf{B}$;
- У2. Если $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_n^m} \mathbf{B}$, то $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_2} \mathbf{B}$.

Докажем У1.

1. Неверно, что У1 (допущение).
2. Для каждой оценки в M_2, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что, если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (1)).
3. Найдется такая оценка в M_n^m, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение при этой оценке (из (1)).

4. Пусть v^* такая оценка в M_n^m, а $\mathbf{\Gamma}^*$ и $\mathbf{B}^*$ такие множество посылок и заключение, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}^*$ принимают выделенное значение и $\mathbf{B}^*$ принимает невыделенное значение при v^*.

5. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (4)).

6. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_k|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (4), по определению φ_k).

7. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (5), по Лемме 1).

8. $|\mathbf{B}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (2), (6)).

9. $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (4)).

10. $\varphi_k|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (9), по определению φ_k).

11. $|\mathbf{B}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (10), по Лемме 1).

12. Неверно, что (1) (из (8), (11)).

У1 доказано. Докажем У2.

1. Неверно, что У2 (допущение).

2. Для каждой оценки в M_n^m, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (1)).

3. Найдется такая оценка в M_2, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение при этой оценке (из (1)).

4. Пусть v^* такая оценка в M_2, а $\mathbf{\Gamma}^*$ и $\mathbf{B}^*$ такие множество посылок и заключение, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}^*$ принимают выделенное значение и $\mathbf{B}^*$ принимает невыделенное значение при v^*.

5. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (4)).

6. $\forall\mathbf{A}$: если $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_2} = 1$, то $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v}^*}^{M_2} = 1$ (по Лемме 2).
7. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{\tilde{v}^*}^{M_2} = 1$ (из (5), (6)).
8. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_k|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (7), по Лемме 1).
9. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (8), по определению φ_k).
10. $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (2), (9)).
11. $\varphi_k|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (10), по определению φ_k).
12. $|\mathbf{B}^*|_{\tilde{v}^*}^{M_2} = 1$ (из (11), по Лемме 1).
13. $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (12), по Лемме 2).
14. $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (4)).
15. Неверно, что (1) (из (13), (14)).

Теорема доказана.

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Существуют многозначные изоморфы классической пропозициональной логики, не являющиеся C-расширяющими.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Можно вычислить количество матриц, отвечающих условию Теоремы 3 для каждых m и n при помощи следующей формулы:*

$$m^{n^2-(m+1)\times(n-m)} \times (n-m)^{m\times(n-m+1)}$$

Метод, использованный выше, также позволяет доказать несколько теорем, описывающих классы логических матриц, с классическим классом тавтологий и неклассическим отношением логического следования.

ТЕОРЕМА 6. *Если матрица M_n^m – C-расширяющая и является для характеристической для классической логики при $m = 1$, то M_n^m совпадает по классу тавтологий с матрицей для классической логики (M_2).*

ТЕОРЕМА 7. *Если M_n^m отвечает следующим условиям:*

- *формулы, не являющиеся элементарными, принимают в M_n^m только значения из {1, 0};*
- *существует матрица M_n^k, отличная от M_n^m лишь классом выделенных значений, и отношение логического следования в M_n^k является классическим,*

то M_n^m совпадает по классу тавтологий с M_2.

ТЕОРЕМА 8. *Если M_n^m отвечает следующим условиям:*

- *M_n^m является С-расширяющей;*
- *если $x \supset_n y = 1$, то $x = 0$ или $y = 1$; если $x \supset_n y = 0$, то $x = 1$ и $y = 0$; $\neg_n x = 1$ е.т.е. $x = 0$; $\neg_n x = 0$ е.т.е. $x = 1$,*

верно следующее: матрица M_n^{n-1}, отличная от M_n^m лишь классом выделенных значений, совпадает по классу тавтологий с M_2.

Литература

[1] *Девяткин Л. Ю., Карпенко А. С., Попов В. М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 50–62.

[2] *Epstein R. L.* The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht, 1990. P. 263–287.

[3] *Malinowski G.* On Many-Valuedness, Sentential Identity, Interference and Łukasiewicz Modalities // Logica Trianguli. Łodž, Nantes, Santiago de Compostella, 1997. Vol. 1. P. 61–71.

[4] *Rescher N.* Many-valued logic. N. Y., 1969. P 31–33.