# Две последовательности простых паранепротиворечивых логик[1]

В. М. Попов

**ABSTRACT.** The infinite sequences $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{1,3}$, $\ldots I_{1,\omega}$ and $Int_{1,1}$, $Int_{1,2}$, $Int_{1,3}$,$\ldots Int_{1,\omega}$ of simple paraconsistent logics are defined. The sequent systems axiomatizing these logics are discribed.

Определяются две такие бесконечные строго убывающие по включению последовательности $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{1,3}$,… и $Int_{1,1}$, $Int_{1,2}$, $Int_{1,3}$,… простых паранепротворечивых логик, что пересечение всех членов первой последовательности есть простая паранепротиворечивая логика $I_{1,\omega}$, а пересечение всех членов второй последовательности есть простая паранепротиворечивая логика $Int_{1,\omega}$.

Язык $L$, являющийся языком всех рассматриваемых в предлагаемой работе логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: $p_1$, $p_2$, $p_3$,… (пропозициональные переменные языка $L$), &, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка $L$), $\neg$ (унарная логическая связка языка $L$), левая и правая круглые скобки. Определение $L$-формулы индуктивно:

(1) всякая пропозициональная переменная языка $L$ есть $L$-формула,

(2) если $A$ и $B$ являются $L$-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются $L$-формулами,

(3) ничто другое не является $L$-формулой.

Квазиэлементарной $L$-формулой называем $L$-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка $L$.

[1] Исследование поддержано РФФИ, грант № 06-06-80292-а.

Длиной квазиэлементарной $L$-формулы называем число всех вхождений $\neg$ в эту $L$-формулу. Ясно, что для всякой квазиэлементарной $L$-формулы существует единственная длина этой квазиэлементарной $L$-формулы, и что длина всякой квазиэлементарной $L$-формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем правило *modus ponens* в $L$ через $MP$, а правило подстановки $L$-формулы в $L$-формулу вместо пропозициональной переменной языка $L$ обозначаем через $Sub$. Логикой называем непустое множество $L$-формул, замкнутое относительно $MP$ и $Sub$. Теорией логики $\mathsf{L}$ называем множество $L$-формул, включающее логику $\mathsf{L}$ и замкнутое относительно $MP$. Множество всех $L$-формул называем тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики $\mathsf{L}$ называем такую теорию $T$ логики $\mathsf{L}$, что для некоторой $L$-формулы $A$ верно следующее: $A \in T$ и $\neg A \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики $\mathsf{L}$ называем такую противоречивую теорию $T$ логики $\mathsf{L}$, что $T$ не есть тривиальная теория. Простой паранепротиворечивой теорией логики $\mathsf{L}$ называем такую паранепротиворечивую теорию $T$ логики $\mathsf{L}$, что для всякой $L$-формулы $A$ верно следующее: если $A$ и $(\neg A)$ принадлежат теории $T$, то $A$ есть квазиэлементарная $L$-формула. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику $\mathsf{L}$, что существует паранепротиворечивая теория логики $\mathsf{L}$. Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику $\mathsf{L}$, что всякая паранепротиворечивая теория логики $\mathsf{L}$ является простой паранепротиворечивой теорией логики $\mathsf{L}$. Определим исчисления $HInt_{1,1}$, $HInt_{1,2}$, $HInt_{1,3}, \ldots$ $HInt_{1,\omega}$, $HI_{1,1}$, $HI_{1,2}$, $HI_{1,3}, \ldots HI_{1,\omega}$. Все эти исчисления являются исчислениями гильбертовского типа, язык каждого из которых есть $L$. Каждое из этих исчислений имеет единственное правило вывода — правило $MP$. Таким образом, для определения любого из этих исчислений остается задать множество всех его аксиом. Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,i}$ ($i$ есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те $L$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов ($A$, $B$, $C$ и $D$ есть $L$-формулы, при этом $D$ не является квазиэлементарной $L$-формулой длины меньшей $i$):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,

(II) $(A \supset (A \vee B))$,

(III) $(B \supset (A \vee B))$,

(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,

(V) $((A \& B) \supset A)$,

(VI) $((A \& B) \supset B)$,

(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,

(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,

(IX) $(((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C)))$,

(X) $((A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A))$,

(XI) $((\neg D) \supset (D \supset A))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,\omega}$ принадлежат все те и только те $L$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XI), или имеет вид $((\neg E) \supset (E \supset A))$, где $E$ есть $L$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $L$-формулой. Для всякого $n$ из $\{0, 1, 2, \ldots\}$ множество всех аксиом исчисления $HI_{1,n}$ равно объединению множества всех аксиом исчисления $HInt_{1,n}$ с множеством всех $L$-формул вида $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, где $A$ и $B$ являются $L$-формулами. Заметим, что множество всех $L$-формул, каждая из которых доказуема в $HInt_{1,0}$, равно множеству всех интуиционистских тавтологий в языке $L$, а множество всех $L$-формул, каждая из которых доказуема в $HI_{1,0}$, равно множеству всех классических тавтологий в языке $L$. Условимся, что для всякого $n$ из $\{0, 1, 2, \ldots\}$ $Int_{1,n}$ есть множество всех $L$-формул, доказуемых в $HInt_{1,n}$ и $I_{1,n}$ есть множество всех $L$-формул, доказуемых в $HI_{1,n}$. Доказаны следующие теорема 1 и теорема 2.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $n$ из $\{0, 1, 2, \ldots\}$ $Int_{1,n}$ и $I_{1,n}$ являются простыми паранепротиворечивыми логиками.*

ТЕОРЕМА 2. *Последовательность $Int_{1,1}$, $Int_{1,2}$, $Int_{1,3}$,... и последовательность $I_{1,1}$, ${}_{1,2}$, $I_{1,3}$,... строго убывают по включению, пересечение всех членов первой последовательности равно*

*$Int_{1,\omega}$, а пересечение всех членов второй последовательности равно $I_{1,\omega}$.*

Определим исчисления $GInt_{1,1}$, $GInt_{1,2}$, $GInt_{1,3}$,... $GInt_{1,\omega}$, $GI_{1,1}$, $GI_{1,2}$, $GI_{1,3}$,... $GI_{1,\omega}$. Все эти исчисления являются секвенциальными исчислениями, выводы в которых строятся обычным для этого типа исчислений способом. Для всякого целого положительного числа $k$ формулировка исчисления $GInt_{1,k}$ (соответственно формулировка исчисления $GI_{1,k}$) получается из предложенной в [1] формулировки исчисления $GI$ (соответственно из предложенной в [1] формулировки исчисления $GK$) исключением правил для кванторов (при надлежащей модификации языка) и наложением на правила введения негации слева ограничения: боковая формула этого правила есть $L$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $L$-формулой, длина которой меньше $k$. Формулировка исчисления $GInt_{1,\omega}$ (соответственно формулировка исчисления $GI_{1,\omega}$) получается из формулировки исчисления $GI$, данной в [1] (соответственно из формулировки исчисления $GK$, данной в [1], исключением правил для кванторов (при надлежащей модификации языка) и наложением на правила введения негации слева ограничения: боковая формула этого правила есть $L$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $L$-формулой. Для каждого исчисления $GInt_{1,k}$ и $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots \omega\}$) доказана теорема об устранимости сечения. Для любого исчисления $GInt_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots \omega\}$) доказательства теоремы об устранимости сечения можно построить аналогично данному в [1] доказательству теоремы об устранимости сечения для $GI$, а для любого исчисления $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots \omega\}$) доказательство теоремы об устранимости сечения можно построить аналогично данному в [1] доказательству теоремы об устранимости сечения для $GK$. С использованием факта устранимости сечения для каждого исчисления $GInt_{1,k}$ и $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots \omega\}$) и методов работы [1] доказаны следующие теоремы 3 и 4.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого $k$ из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ и для всякой $L$-формулы $A$ верно следующее:*

*(1) $A \in Int_{1,k}$ тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow A$ выводима в $GInt_{1,k}$;*

*(2)* $A \in I_{1,k}$ *тогда и только тогда, когда секвенция* $\to A$ *выводима в* $GI_{1,k}$.

ТЕОРЕМА 4. *Для всякого* $k$ *из* $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ *исчисления* $GInt_{1,k}$ *и* $GI_{1,k}$ *разрешимы.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *(Следствие теорем 3 и 4) Для всякого* $k$ *из* $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ *логики* $Int_{1,k}$ *и* $I_{1,k}$ *разрешимы.*

## Литература

[1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.