Функциональная алгебраическая модель для S-реализуемости

В.Х. Хаханян

ABSTRACT. We present here the functional algebraic model for so-called «s-realizability» that is a modification of well-known Kleene's realizability.

В [1] (см. также [2]) А.Г. Драгалин предложил класс интерпретаций для интуиционистской арифметики в виде функциональных алгебраических моделей (ФАМ). Изложение в [1] и [2] сопровождается рядом примеров, хотя ряд очевидных деталей опущен. В [3] было доказано, что для штрих-реализуемости Клини эквивалентной ей ФАМ не существует, т.е. не всякая модель арифметики может быть представлена как ФАМ. В каждом конкретном случае, т.е. для каждой конкретной модели арифметики, вопрос о представлении ее виде ФАМ необходимо решать заново, но зато дальнейшие результаты о совместности и независимости для интуиционистской арифметики, для получения которых и была построена рассматриваемая конкретная модель арифметики, уже автоматически становятся верными.

Основной целью А.Г. Драгалина как автора ФАМ было, вероятно, получение, в первую очередь, представления в виде ФАМ хорошо известных моделей типа реализуемости (С.К. Клини, В.А. Лифшица, М. Бизона и др.).

В настоящей заметке будет построена ФАМ, эквивалентная так называемой специальной реализуемости (для точного описания последней см. [2, с.64-65]). Эта реализуемость была использована в [2] для доказательства совместности с HA и CT принципа P (для формулировки последнего принципа см. также [2]). Теория HA+CT+P носит название «антитрадиционный конструктивизм». Принципы P и M противоречат друг другу в теории НА+СТ (см. для доказательства [2]). В случае построения модели для теории НА+СТ+Р используются не все частично-рекурсивные функции, а только часть из них, что отражает некоторую специальную, узкоконструктивную, точку зрения.

Здесь мы не приводим хорошо известные свойства ФАМ для интуиционистской арифметики (все необходимые сведения можно найти в [1] или [2]). Следуя [1], мы определим только набор $\mathbf{B}, \mathbf{F}, \widehat{\mathbf{Pr}}$ (см. [1, с. 189]), т.е. псевдобулеву алгебру, функциональную псевдобулеву алгебру или множество форм и оценку в последней для атомарных формул нашего языка арифметики.

Итак, пусть $\hat{x}\varphi$ — вид, где φ — формула, а x — переменная ($\hat{x}$ играет роль квантора). Если $\hat{x}\varphi$ — вид и t — терм, то $t \in \widehat{x}\varphi$ есть результат подстановки терма t в формулу φ, т.е. $\varphi(x|t)$. Каждый вид можно рассматривать как функцию относительно операции замещения ее параметров объектами из области $\mathbf{D}$ (напомним, см. также [1], что область $\mathbf{D}$ для арифметики состоит из констант для натуральных чисел $\overline{1}, \overline{2}$,... и счетного множества каналов [x], [y],..., которые интуитивно изображают натуральные числа, о которых ничего не известно). Мы будем рассматривать упорядоченные пары $< a, b >$, где a и b будут видами, при этом будет выполняться, что $\forall x(x \in b \Rightarrow x \in a)$, где a и b как виды будут формами относительно операции замещения параметров. Наша функциональная псевдобулева алгебра $\mathbf{F}$ будет состоять из описанных выше упорядоченных пар. Элементами же псевдобулевой алгебры $\mathbf{B}$ будут значения этих форм на элементах области $\mathbf{D}$, т.е. множество всех оцененных пар $< a, b >$, где пара $< a, b >$ есть элемент $\mathbf{F}$ (для более подробного и детального описания видов и алгебр см. [1, с. 189-191] или [2, с. 215-218, пп. 6 и 7]).

Зададим теперь отношение $\leq$ в алгебре $\mathbf{B}$ (как и в цитируемой литературе [1] и [2], мы не будем факторизовать это отношение, рассматривая все дальнейшие операции в ПБА $\mathbf{B}$ с точностью до следующего естественного отношения эквивалентности $\approx$: $< a, b > \approx < c, d > \Leftrightarrow [< a, b > \leq < c, d >$ и $< c, d > \leq < a, b >$). Отношение же $< a, b > \leq < c, d >$ определим покомпонентно, в точности так, как это сделано в [1, с.189]. Напомним это определение. Предположим, что a и c — две первых (или вторых) компоненты элементов ПБА **B**, т.е. имеют вид $a([x_1],...,[x_n])$ и $c([x_1],...,[x_n])$, где $[x_1],...,[x_n]$ — полный список каналов, встречающихся в этих видах. Выберем новые переменные $y_1,...,y_n$ и положим $\acute{a} = a(y_1,...,y_n), \acute{c} = c(y_1,...,y_n)$. Мы говорим в этом случае, что $\acute{a}$ и $\acute{c}$ получены из a и c путем согласованного превращения каналов в переменные. Ясно, что $\acute{a}$ и $\acute{c}$ уже суть неоцененные виды. Определим теперь $a \leq c$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число m, что в стандартной арифметической модели выполняется $\exists zv(T_n(m, y_1,...,y_n, z) \wedge (v = Uz) \wedge R[\acute{a}, \acute{c}, v])$.

Здесь $R[a,c,e]$ есть следующее отношение (a и c — виды, а e — новая переменная): $R[a,b,e] \rightleftharpoons \forall u((u \in a) \Rightarrow \exists zv(T(e,u,z) \wedge (v = Uz) \wedge (v \in b)))$. Комментарий для отношения $R[a,c,e]$ дан в [1] на с. 189.

Теперь добавим такое условие: наша функция сводимости, задаваемая отношением $R[a,c,e]$, определена всюду на множестве $\{x : x \in a\}$ и, следовательно, на множестве $\{x : x \in b\}$ и элементы первого множества функция сводимости переводит в множество $\{x : x \in c\}$, а элементы второго множества — в множество $\{x : x \in d\}$.

Отметим, что все наши содержательные рассуждения можно (см. [1] и [2]) формализовать в HA.

Теперь определим функцию $\widehat{\mathbf{Pr}}$ и операции в ПБА **B**.

Если φ — атомарная формула, то ее значением является форма $< \widehat{x}(x = x), \widehat{y}\varphi(x_1,...,x_n) >$.

Наконец, определим в ПБА операции покомпонентно, сначала для первых компонент наших оцененных пар, а затем и для вторых компонент. Итак, пусть заданы пары из ФПБА $< a, c >$ и $< b, d >$.

Определение операций для первых членов пар:
$a \wedge c \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u,v) \wedge u \in a \wedge v \in c)$;
$a \vee c \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u,v) \wedge j_1(v) \in a \wedge j_2(v) \in c)$;
$a \rightarrow c \rightleftharpoons \widehat{x}\forall u(u \in a \Rightarrow !\{x\}(u) \wedge \{x\}(u) \in c)$;
$\forall xa \rightleftharpoons \widehat{x}\forall y(!\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \in a)$;
$\exists xa \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u,v) \wedge u \in a)$; .

Нетрудно индукцией по построению вида показать, что $\forall a \exists n. n \in a$.

Определение операций для вторых членов пар:

$b \wedge d \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u, v) \wedge u \in b \wedge v \in d)$;
$b \vee d \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in (a \vee c) \wedge j_1(x) = 0 \Rightarrow j_1 j_2(x) \in b) \wedge (j_1(x) \neq 0 \Rightarrow j_2 j_2(x) \in d)))$;
$b \to d \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in a \to c) \wedge \forall y(y \in b \Rightarrow !\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \in d)$;
$\forall yb \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in \forall ya \wedge \forall z(!\{x\}(z) \wedge \{x\}(z) \in b))$;
$\exists yb \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u, v) \wedge j_1(u) \in b)$.
Определение операций в ПБА **B** закончено.

ЛЕММА 1. *Если φ — формула языка теории НА, x — переменная, не входящая в данную формулу, то $\|\varphi\|$ в нашей модели есть следующая форма $< \widehat{x}(x \in \varphi), \widehat{x}(xs\varphi) >$ (см. также для сравнения определение из [2] на с. 64).*

Доказательство леммы 1 проводится несложной индукцией по построению формулы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ — предложение языка теории НА. Тогда $\|\varphi\| = 1 \Leftrightarrow \exists x(xs\varphi \wedge x \in \varphi)$ (т.е. x — специально реализует формулу φ и x есть кандидат в реализаторы этой же формулы φ (сравни в [2], с. 64)).*

Доказательство теоремы 2 легко следует из леммы 1.

Литература

[1] *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. XIII. С. 184–195.

[2] *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979. С. 64, 215–218.

[3] *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, эквивалентная штрихреализуемости Клини // Математические заметки, 2004. Т. 75. Вып. 1. С. 155–156.