П.И. Быстров

МЕТОД ВЗАИМНОГО ПЕРЕВОДА ИНДЕКСИРОВАННЫХ И ТАБЛИЧНЫХ ВЫВОДОВ

Abstract. *There "indexed derivation" means a derivation in Gentzen-style modal sequent calculi with indexed formulae. These calculi admit direct constructive proof of cut-elimination theorem. As consequence we have explicit procedure of mutual transformation for indexed and tableaux-style derivations in so called "normal" modal propositional systems.*

В данной стате один из вариантов упомянутого в ее названии метода демонстрируется на примере класса нормальных пропозициональных модальных систем табличного вывода $\{\mathbf{ST}\}_{\mathbf{R}}$ и дедуктивно эквивалентных им секвенциальных исчислений с индексированными формулами $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$ При этом предполагаются известными стандартные понятия и правила, применяемые при построении «блоковых» аналитических таблиц для конечных множеств префиксированных формул (т. е. формул с префиксами T и F) и генценовских секвенциальных исчислений. Везде далее $\neg$, &, $\supset$, $\vee$ – классические пропозициональные константы; α, β, γ (возможно, со штрихами) - формулы; i, k, l, m, n – натуральные числа; u, w, z (возможно, со штрихами) – индексы; S, S_i – конечные множества (возможно, пустые) индексированных формул.

Индекс – это начинающаяся с 0 конечная последовательность попарно различных натуральных чисел (например: 0, 1, 7, 21, …, n, где n не совпадает ни с одним из элементов последовательности {0, 1, 7, 21, …, m}; m<n).

Индексированная формула – это выражение вида $(\alpha)_w$, где α - правильно построенная формула, а w - индекс. Соответственно, *префиксированная индексированная формула* – это выражение вида $T(\alpha)_w$,(или $F(\alpha)_w$), где T(или F) – префикс.

Отношение R – это бинарное отношение на множестве индексов, такое, что uRw, если и только если w = u, k или u = w. Свойства этого отношения определяются любой непустой комбинацией условий, выраженных следующими формулами: 1. $\forall$w (wRw) (рефлексивность)

2. $\forall$u $\forall$w $\forall$z (((uRw) & (wRz)) $\rightarrow$ (uRz)) (транзитивность)

3. $\forall$u $\forall$w ((uRw) $\rightarrow$ (wRu)) (симметричность)

Выполнимость всех условий (1)-(3), означает, что имеет место

4. $\forall u \, \forall w \, (uRw)$ (универсальность)

В таком случае $\mathbf{\{ST\}_R}$ обозначает класс табличных пропозициональных модальных систем. Конкретная система этого класса получается в зависимости от того, какие условия выполняются для R. Например, если R удовлетворяет условию (4), $\mathbf{ST_R}$ - это табличный вариант известной системы **S5**; если удовлетворяются только условия (1) и (3), $\mathbf{ST_R}$ - это табличный вариант «брауэровой» модальной системы. Точно также обстоит дело и с обозначением $\mathbf{\{SG\}_R}$ класса секвенциальных исчислений с индексированными формулами. В общем случае $\mathbf{\{ST\}_R}$ ($\mathbf{\{SG\}_R}$) охватывает весь класс таких модальных систем, которые непротиворечивы и полны относительно фреймов Крипке, в которых бинарное отношение достижимости R удовлетворяет конечному множеству условий {Con}, каждый элемент которого выразим общезначимой формулой первопорядковой логики с единственным двухместным предикатом.

Множество индексированных формул называется *чистым*, если всем его элементам не приписано никаких других индексов, кроме 0.

В формулировке систем $\mathbf{\{ST\}_R}$ (кроме введенных только что понятий) используются только префиксированные индексированные формулы и следующие понятия и определения.

Начальное множество S (таблицы **t***)* – это множество формул, которое служит посылкой хотя бы одного применения правила построения (таблицы **t**) и не является заключением ни одного применения такого правила.

Конечное множество ветви – это множество формул, которое не является посылкой ни одного применения правил построения таблицы.

Главной формулой рассматриваемого применения правила построения таблицы называется формула, к которой применяется данное правило; *боковой формулой* рассматриваемого применения правила построения таблицы называется любая из формул, которые получаются из главной формулы в результате применения данного правила. Например, в схеме правил построения таблицы для

$$\frac{S,\ T(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \mid S,\ T\beta_w} \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ T\alpha_w\ ;\ S,\ F\beta_w}$$

формулы $T(\alpha\vee\beta)_w$ и $F(\alpha\vee\beta)_w$ являются главными, а формулы $T\alpha_w$ и $F\beta_w$ - боковыми.

Определение 1. Вхождения формул вида $T(\alpha)_w$ и $F(\alpha)_w$ в некоторую ветвь *b* таблицы **t** называются контрарной парой ветви *b* в **t**.

Определение 2. Ветвь *b* таблицы **t** замкнута, если в ней содержится по крайней мене одна контрарная пара. Таблица **t** замкнута, если замкнута каждая ее ветвь.

Завершенная ветвь таблицы – это незамкнутая ветвь, в которой не применимо ни одно из правил построения таблицы. *Завершенная* таблица – это таблица, все ветви которой являются завершенными.

В общем случае, замкнутая ветвь таблицы может быть незавершенной в том смысле, что в конечном множестве этой ветви есть по крайней мере одна формула, которая может служить боковой формулой применения правила построения таблицы.

Система $\mathbf{\{ST\}_R}$ задается следующим множеством правил построения аналитических таблиц для формул, главными логическими знаками которых являются $\&$, $\vee$, $\neg$ и $\Box$:

$$\frac{S,\ T(\alpha\supset\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \mid S,\ T\beta_w}\ T\supset \qquad \frac{S,\ F(\alpha\supset\beta)_w}{S,\ T\alpha_w,\ F\beta_w}\ F\supset$$

$$\frac{S,\ T(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ T\alpha_w \mid S,\ T\beta_w}\ T\vee \qquad \frac{S,\ F(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ F\alpha_w,\ F\beta_w}\ F\vee$$

$$\frac{S,\ F(\alpha\&\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \mid S,\ F\beta_w}\ F\& \qquad \frac{S,\ T(\alpha\&\beta)_w}{S,\ T\alpha_w,\ T\beta_w}\ T\&$$

$$\frac{S,\ T(\neg\alpha)_w}{S,\ F(\alpha)_w}\ T\neg \qquad \frac{S,\ F(\neg\alpha)_w}{S,\ T(\alpha)_w}\ F\neg$$

$$\frac{S,\ T(\Box\alpha)_u}{S,\ T(\alpha)_w}\ T\Box \qquad \frac{S,\ F(\Box\alpha)_u}{S,\ F(\alpha)_{u,\,k}}\ F\Box$$

В схеме правила $F\Box$ k – число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам множества $\{S,\ T(\Box\alpha)_u\}$; в схеме правила $T\Box$ имеет место uRw.

Выводом D (множества формул S) в системе ***{ST}$_R$*** называется замкнутая таблица **t** с начальным чистым множеством

S, построенная по правилам системы $\mathbf{\{ST\}_R}$. Соответственно, подвыводом D' такого вывода D считается любая подтаблица $\mathbf{t}'$ таблицы $\mathbf{t}$.

При построении выводов в $\mathbf{\{ST\}_R}$ предполагается, что правила построения не применяются к конечному множеству формул замкнутой, но не завершенной ветви.

В определенном смысле (который будет ясен далее) интерес представляют “альтернативные формулировки” – систем $\mathbf{\{S^*T\}_R}$, которые получается из $\mathbf{\{ST\}_R}$ добавлением следующих схем правил:

$$\frac{S,\ T(\alpha)_w}{S}\ \mathrm{WT} \qquad \frac{S,\ F(\alpha)_w}{S}\ \mathrm{WF}$$

$$\frac{S,\ T(\alpha)_w}{S,\ T(\alpha)_w,\ T(\beta)_w}\ \mathrm{CT} \qquad \frac{S,\ F(\alpha)_w}{S,\ F(\alpha)_w,\ F(\beta)_w}\ \mathrm{CF}$$

В схемах правил WT и WF множество S содержит по крайней мере одну контрарную пару.

Пример вывода в $\mathbf{ST_R}$ (где R выполняет пункт (4)):

1. $F\Box(\neg\Box(\alpha\supset\beta) \supset (\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))))_{0}$
2. $F(\neg\Box(\alpha\supset\beta) \supset (\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
3. $T(\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
4. $F(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
5. $F(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
6. $F(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ T(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
7. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ T(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
8. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ T((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$
9. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ F(\alpha)_{0,1,3} \mid F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}, T(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$
10. $T(\alpha)_{0,1,3},\ F(\beta)_{0,1,3}\ F(\alpha)_{0,1,3}$

Здесь, в строках 1 и 2 S – пустое множество, а единственной “точкой ветвления” табличного вывода является строка 8.

Секвенцией будем называть упорядоченную пару вида S_1, ; S_2, где S_1 и S_2 – конечные (возможно, пустые) множества индексированных формул. Как обычно, S_1 называется антецедентом, а S_2 – консеквентом. Будем считать, что **;**S означает $\varnothing$;S, S**;** означает S;$\varnothing$; и, наконец, **;** означает $\varnothing$;$\varnothing$. (Чистая секвенция S_1, ; S_2 после удаления всех индексов 0 в точности соответствует генценовской секвенции $\Gamma\rightarrow\ \Theta$. Поэтому, *перевод* секвенции S_1, ; S_2 , в которой S_1 и S_2 – непустые множества, есть формула $((\alpha)_u \ \& \ (\beta)_w \ \& \ldots \& \ (\gamma)_z)\ ) \supset ((\alpha')_{w'} \vee (\beta')_{z'} \vee \ldots \vee (\gamma')_{u'})\ )$, которая называется *чистой формулой*, если все приписанные ее подформулам индексы графически совпадают с 0.)

Секвенциальные исчисления $\mathbf{\{SG\}_R}$ задаются аксиомой (основной секвенцией вида $S_1, ; S_2$, где каждое из множеств S_1 и S_2 содержит формулу $((\alpha)_w$ и следующими схемами правил вывода:

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_1, (\beta)_w; S_2}{S_1, (\alpha \supset \beta)_w; S_2} \supset a \qquad \frac{(\alpha)_w, S_1, ; S_2, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha \supset \beta)_w} \supset s$$

$$\frac{S_1, \alpha_w,; S_2 \quad S_1, (\beta)_w; S_2}{S_1, (\alpha \vee \beta)_w; S_2} \vee a \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha \vee \beta)_w} \vee s$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \ S_1 ; S_2, (\beta)_w}{S_1 ; S_2, (\alpha \& \beta)_w} \& s \qquad \frac{S_1, (\alpha)_w, (\beta)_w,; S_2}{S_1, (\alpha \& \beta)_w, ; S_2} \& a$$

$$\frac{S_1, (\alpha)_w ; S_2}{S_1, ; S_2, (\neg\alpha)_w} \neg s \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}{S_1, (\neg\alpha)_w,; S_2} \neg a$$

$$\frac{S_1, (\alpha)_w; S_2}{S_1, (\Box\alpha)_u; S_2} \Box s \qquad \frac{S_1 ; S_2 , (\alpha)_{u,k}}{S ; S_2 (\Box\alpha)_u} \Box a$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_3, (\alpha)_w; S_4}{S_1, S_2 ; S_3 S_4,} cut$$

В схеме правила $\Box s$ k – число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам в секвенции заключения; в схеме правила $\Box a$ имеет место uRw.

Системы $\mathbf{\{S^*G\}_R}$ получаются из $\mathbf{\{SG\}_R}$ заменой схем правил &a и $\vee$s соответственно схемами

$$\frac{S_1, (\alpha)_w; S_2,}{S_1, (\alpha \& \beta)_w; S_2} \& a_1 \qquad \frac{S_1, (\beta)_w; S_2 ,}{S_1, (\alpha \& \beta)_w; S_2} \& a_2$$

и

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\vee\beta)_w}\ \vee s_1 \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\vee\beta)_w}\ \vee s_2$$

заменой схемы правила $\supset$a схемой

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_3, (\beta)_w; S_4}{S_1, S_3, (\alpha\supset\beta)_w; S_2, S_4}\ \supset a_1$$

и добавлением схем структурных правил утончения и сокращения

$$\frac{S_1, ; S_2,}{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}\ Ws \qquad \frac{S_1, ; S_2}{S_1, (\alpha)_w ; S_2}\ Wa$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w, (\alpha)_w}{S_1, ; S_2, (\beta)_w}\ Cs \qquad \frac{S_1, (\alpha)_w, (\alpha)_w; S_2}{S_1, (\alpha)_w ; S_2}\ Ca$$

Приведем пример вывода в $\mathbf{S^{*}G_{R}}$ (где R выполняет пункты 1, 2):

$$\begin{array}{l}
(\alpha)_{0,1,2} ; (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline
(\alpha)_{0,1,2}, (\beta)_{0,1,2}; (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline
(\alpha)_{0,1,2} ; (\beta\supset\alpha)_{0,1,2} \\ \hline
\Box(\alpha)_0 ; (\beta\supset\alpha))_{0,1,2} \\ \hline
\Box(\alpha)_0 ;\ (\Box(\beta\supset\alpha))_{0,1} \\ \hline
\Box(\alpha)_0 ; (\Box\Box((\alpha)\supset(\beta\supset\alpha)))_0 \\ \hline
; (\Box(\alpha)_0 \supset \Box\Box((\alpha)\supset(\beta\supset\alpha)))_0
\end{array}$$

Пример вывода в $\mathbf{SG_R}$ (где R выполняет пункт (4)):

$$(\alpha)_{0,1,3}\ ;\ (\alpha)_{0,1,3},\ (\beta)_{0,1,3}$$

$$;\ (\alpha)_{0,1,3},\ (\alpha\supset\beta))_{0,1,3} \qquad (\alpha\supset\beta)_{0,1,3}\ ;(\alpha\supset\beta)_{0,1,3}$$

$$((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}\ ;\ (\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$$

$$(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}\ ;\ (\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$$

$$(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}\ ;(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1}$$

$$(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2},\ (\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1};$$

$$(\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1}\ ;\ (\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$$

$$(\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1}\ ;\ (\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$$

$$;\ (\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1}\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$$

$$;\ (\Box((\neg\Box(\alpha\supset\beta))\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))))_{0}$$

Выводами в $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$ и $\{\mathbf{S^*G}\}_{\mathbf{R}}$ являются деревья секвенций, построенные по правилам данных систем, начиная с основной секвенции (основных секвенций). Легко показать, что эти исчисления дедуктивно эквивалентны в том смысле, что секвенция S_1, ; S_2 выводима в $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$, если и только если она выводима в $\{\mathbf{S^*G}\}_{\mathbf{R}}$. Выводы, в которых всем вхождениям формул приписан индекс 0 будем называть *чистыми* выводами. *Степенью индекса* называется общее количество натуральных чисел в данном индексе, отличающихся от 0. Нпример, степень индекса 0, 1, 3, 12 равна 3. Таким образом, 0 – это индекс нулевой степени. Индекс u называется *подиндексом* индекса w, если степень индекса u меньше или равна степени индекса w.

Для $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$ и $\{\mathbf{S^*G}\}_{\mathbf{R}}$ верна следующая лемма.

Лемма 1. *Любой свободный от сечения вывод секвенции, являющейся посылкой единственного применения правила $\Box s$, можно преобразовать в чистый вывод этой секвенции.*

Справедливость леммы вытекает из того факта, что степень индекса формулы, входящей в секвенцию, с необходимостью увеличивается на единицу только тогда, когда эта формула становится главной формулой применения правила $\Box s$. Применения правил для введения в антецедент и сукцедент секвенций классических пропозициональных констант не влияют на индексы. Применение правила $\Box$a позволяет не изменять степень индекса боковой формулы при переходе от посылки к заключению.

Например, рассмотрим удовлетворяющий условию леммы исходный вывод

$$\begin{array}{l} (\alpha)_{0,1,2} \mathbin{;} (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline (\alpha)_{0,1,2}, (\beta)_{0,1,2} \mathbin{;} (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline (\alpha)_{0,1,2} \mathbin{;} (\beta\supset\alpha)_{0,1,2} \\ \hline \Box(\alpha)_{0} \mathbin{;} (\beta\supset\alpha))_{0,1,2} \\ \hline \Box(\alpha)_{0} \mathbin{;} (\Box(\beta\supset\alpha))_{0,1} \end{array}$$

Его подвывод, заканчивающийся секвенцией $\Box(\alpha)_0$ **;** $((\alpha)\supset(\beta\supset\alpha))_{0,\ 1,\ 2}$, легко преобразовать в следующий чистый вывод посылки применения правила $\Box$s:

$$\begin{array}{l} (\alpha)_{0} \mathbin{;} (\alpha)_{0} \\ \hline (\alpha)_{0}, (\beta)_{0} \mathbin{;} (\alpha)_{0} \\ \hline (\alpha)_{0} \mathbin{;} (\beta\supset\alpha)_{0} \\ \hline \Box(\alpha)_{0} \mathbin{;} (\beta\supset\alpha)_{0} \end{array}$$

а затем применить $\Box$s, получив ту же конечную секвенцию $\Box(\alpha)_0$ **;** $(\Box(\beta\supset\alpha))_{0,1}$.

В общем случае, для $\mathbf{\{SG\}_R}$ и $\mathbf{\{S^*G\}_R}$ имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Любой свободный от сечения вывод секвенции, заканчивающийся посылкой применения модального правила с главной формулой $\Box(\alpha)_w$, содержит вхождение секвенции, в которую входит формула$(\alpha)_u$, где u – подиндекс индекса w.*

Поскольку только применение правила $\Box$s может увеличить степень индекса боковой формулы ровно на единицу, лемма без затруднений доказывается возвратной индукцией по длине указанного в ее условии вывода.

В исчислениях $\mathbf{\{SG\}_R}$ Cut является допустимым в силу следующей теоремы.

Теорема (об устранении сечения). *Любой вывод в* ***{SG}$_R$*** *можно преобразовать в вывод с той же конечной секвенцией, не содержащий применений правила Cut.*

Теорема доказывается стандартным методом Генцена. Специфика доказательства состоит в том, что из исходного вывода устраняются не «смешения», а непосредственно применения правила сечения и добавляются следующие случаи, связанные с применением двух модальных правил.

1. Индукция по степени сечения. Ранг исходного вывода равен 2. Степень сечения >0. Конец исходного вывода *D* имеет следующий вид:

$$\dfrac{\dfrac{S_1\,;\,S_2,\,(\alpha)_{u,\,k}}{S_1,\,(\Box\alpha)_u;\,S_2} \qquad \dfrac{S_3,\,(\alpha)_w;\,S_4}{S_3,\,(\Box\alpha)_u\,;\,S_4}}{S_1,\,S_2\,;\,S_3,\ S_4}$$

1.1 Если w = u, k, вывод *D* преобразуется в следующий вывод *D*′ с меньшей степенью сечения:

$$\dfrac{S_1\,;\,S_2,\,(\alpha)_{u,\,k} \qquad S_3,\,(\alpha)_w;\,S_4}{S_1,\,S_2\,;\,S_3,\ S_4}$$

1.2 w ≠ u, k. Тогда u является подиндексом индекса w. Согласно леммам 1 и 2, либо вывод левой посылки единственного применения Cut в *D* чистый, либо в нем найдется вхождение секвенции, в сукцедент которой входит формула $(\alpha)_z$, где u (и w) – подиндекс индекса z. В любом случае, сечение применяется к этому вхождению секвенции, и получается следующий вывод *D*′ с меньшей степенью сечения (z = w):

$$\dfrac{S_1\,;\,S_2,\,(\alpha)_z \qquad S_3,\,(\alpha)_w;\,S_4}{S_1,\,S_2\,;\,S_3,\ S_4}$$

2. Индукция по рангу сечения. Ранг единственного применения сечения в исходном выводе >2. Степень сечения произвольна. Случаи применения модальных правил в исходном выводе рассматриваются так же, как случаи для других однопосылочных правил.

С одной стороны, преобразование любого вывода в табличной системе $\mathbf{\{ST\}_R}$ в свободный от применений правила Cut вывод в исчислении $\mathbf{\{SG\}_R}$ является простой “механической” процедурой.

С другой стороны, из теоремы об устранении сечения следует, что любой вывод в исчислении $\mathbf{\{SG\}_R}$ можно «освободить» от применений правила Cut. Затем, можно естественным образом “переписать” такой секвенциальный вывод в табличный вывод системы $\mathbf{\{ST\}_R}$.

Например, с приведенным ранее примером табличного вывода мы поступаем следующим образом:

(1) Упорядочиваем все формулы слева направо, сначала записывая формулы с префиксом T, а затем – формулы с префиксом F.

(2) Группы формул с T (F) отделяем от групп формул с F (T) или от пустых групп знаком **;**.

(3) Вычеркиваем все префиксы.

В результате шагов (1) – (3) получается секвенциальная конструкция:

1. $;\Box(\neg\Box(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))))_{0}$
2. $;(\neg\Box(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
3. $(\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1};(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
4. $(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1};(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
5. $(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},(\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};$
6. $(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},$
7. $(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
8. $((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
9. $(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},(\alpha)_{0,1,3};\quad(\alpha\supset\beta))_{0,1,3};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
10. $(\alpha)_{0,1,3};(\beta)_{0,1,3}\ (\alpha)_{0,1,3}$

Очевидно, что если убрать нумерацию строк и «перевернуть» эту конструкцию «с ног на голову» получится корректный вывод в исчислении $\mathbf{\{SG\}_R}$. Естественно, что любой свободный от сечения вывод в $\mathbf{\{SG\}_R}$ также переписывается в табличный вывод в $\mathbf{\{ST\}_R}$. Доказательство наличия такого взаимного преобразования для общего случая не встречает препятствий. Из этого следует, что системы $\mathbf{\{SG\}_R}$ и $\mathbf{\{ST\}_R}$ дедуктивно эквивалентны, а исчисления $\mathbf{\{SG\}_R}$ разрешимы.