Д.В. Баташев, В.М. Попов

ОБ ОДНОЙ ДЕВЯТИЗНАЧНОЙ ПАРАНОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *A propositional logic* **VIK** *is defined in semantic terms of state quasidescription. A hilbert style calculi* **HVIK** *and a sequent calculi* **GVIK** *which axiomatizing this logic are constructed, a nine-valued characteristic matrix for* **VIK** *is performed, also defined the maps embedding a classical propositional logic to* **VIK**.

В семантических терминах *квазиописаний состояния* определяется пропозициональная логика **VIK**. Строятся исчисление **HVIK** гильбертовского типа и секвенциальное исчисление **GVIK**, аксиоматизирующие эту логику, конструируется девятизначная характеристическая матрица для **VIK**, определяются отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в **VIK**.

Некоторые предварительные определения

Алфавит пропозиционального языка $\mathcal{L}$ есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ символов, элементы которого имеют предполагаемые читателем названия.

Определение $\mathcal{L}$-формулы индуктивно:

(1) всякая пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$ есть $\mathcal{L}$-формула,

(2) если A и B есть $\mathcal{L}$-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть $\mathcal{L}$-формулы.

Квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой называем $\mathcal{L}$-формулу, в которую не входят ни &, ни $\vee$, ни $\supset$.

Логикой называем непустое множество $\mathcal{L}$-формул, замкнутое относительно правила подстановки в $\mathcal{L}$ и правила *modus ponens в* $\mathcal{L}$.

Теорией логики L называем множество $\mathcal{L}$-формул, которое включает L и замкнуто относительно *modus ponens в* $\mathcal{L}$.

Ясно, что для всякой *логики L* множество $Form_{\mathcal{L}}$ всех $\mathcal{L}$-формул есть *теория логики L*.

Множество $Form_{\mathcal{L}}$ называем *тривиальной теорией логики L* (для всякой *логики L*).

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

Противоречивой теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что для некоторой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.

Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую *противоречивую теорию T логики L*, что T не есть *тривиальная теория логики L*.

Паранепротиворечивой логикой называем такую *логику L*, что существует *паранепротиворечивая теория логики L*.

Полной теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Параполной теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что T не является *полной теорией логики L* и всякая *полная теория логики L*, включающая T, есть *тривиальная теория логики L*.

Параполной логикой называем такую *логику L*, что существует *параполная теория логики L*.

Паранормальной логикой называем *логику*, которая является *паранепротиворечивой и параполной логикой*.

Семантика языка $\mathcal{L}$, базирующаяся на понятии *квазиописания состояния*, и определение логики VIK

Понятие *квазиописания состояния* является обобщением введенного в [1] понятия *обобщенного описания состояния*.

Квазиописанием состояния (*кс*) называем отображение множества всех *квазиэлементарных* $\mathcal{L}$-формул в $\{0, 1\}$.

Регулярным квазиописанием состояния называем такое *кс* α, что для всякой *квазиэлементарной* $\mathcal{L}$-формулы e верно следующее: $\alpha(e) = \alpha((\neg (\neg e)))$.

Квазиполным квазиописанием состояния называем такое *кс* α, что если $\exists_{e \text{ есть } \textit{квазиэлементарная } \mathcal{L}\text{-формула}}\, (\alpha(e) = 1$ и $\alpha((\neg e)) = 1)$, то $\forall_{q \text{ есть } \textit{квазиэлементарная } \mathcal{L}\text{-формула}}\, (\alpha(q) = 1$ или $\alpha((\neg q)) = 1)$.

Можно доказать, что для всякого *кс* α существует единственное отображение, обозначим его $|\,|_\alpha$, множества $Form_{\mathcal{L}}$ во множество $\{0, 1\}$, удовлетворяющее условиям:

(а) для всякой *квазиэлементарной* $\mathcal{L}$-формулы e: $|e|_\alpha = \alpha(e)$,

(б) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой:

$$|(\neg A)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 0; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

(в) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B:

$$|(A \mathbin{\&} B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 1 \text{ и } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 1 \text{ или } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$|(A \supset B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 0 \text{ или } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через **VIK** множество всех таких $\mathcal{L}$-формул A, что для всякого *регулярного* и *квазиполного кс* α $|A|_\alpha = 1$.

Доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. VIK есть паранормальная логика.

Исчисления HVIK и GVIK

HVIK является исчислением гильбертовского типа. Язык этого исчисления есть $\mathcal{L}$. Множеству всех аксиом исчисления **HVIK** принадлежат все те и только те $\mathcal{L}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C есть $\mathcal{L}$-формулы, D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
(II) $(A \supset (A \vee B))$,
(III) $(B \supset (A \vee B))$,
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
(V) $((A \mathbin{\&} B) \supset A)$,
(VI) $((A \mathbin{\&} B) \supset B)$,
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \mathbin{\&} B))))$,
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \mathbin{\&} B) \supset C))$,
(IX) $(((A \mathbin{\&} B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$,
(X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$,
(XI) $((A \mathbin{\&} (\neg A)) \supset (B \vee (\neg B)))$,
(XII) $((\neg D) \supset (D \supset A))$,
(XIII) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$,
(XIV) $(A \supset (\neg (\neg A)))$,
(XV) $((\neg (\neg A)) \supset A)$.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HVIK**. Доказательства в **HVIK** строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом.

Доказана следующая теорема 2 о том, что исчисление **HVIK** аксиоматизирует логику **VIK**.

Теорема 2. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: A доказуема в **HVIK** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

GVIK является секвенциальным исчислением. Секвенции имеют вид $\pi \to \rho$, где π и ρ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул (конечной последовательностью $\mathcal{L}$-формул являются, в частности, пустое множество и любая $\mathcal{L}$-формула).

Множество всех основных секвенций исчисления **GVIK** есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$ или $A, (\neg A) \to B, (\neg B)$, где A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

Множеству всех правил исчисления **GVIK** принадлежат все следующие правила R 1 – R 19 и только они. При нижеследующей формулировке этих правил предполагаем, что Γ, Δ, Σ и Θ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул, а A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

R 1: $\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta}$, R 2: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Theta}$,

R 3: $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Theta}{\mathrm{A}, \Gamma \to \Theta}$, R 4: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$,

R 5: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, R 6: $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$,

R 7: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$, R 8: $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$,

R 9: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{(A \,\&\, B), \Gamma \to \Theta}$, R 10: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{(B \,\&\, A), \Gamma \to \Theta}$,

R 11: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, (A \,\&\, B)}$, R 12: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathrm{A}}{\Gamma \to \Theta, (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})}$, R 13: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, (B \vee A)}$, R 14: $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathrm{B}, \Gamma \to \Theta}{(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}), \Gamma \to \Theta}$,

R 15: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, D}{(\neg D), \Gamma \to \Theta}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 16: $\dfrac{D, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, (\neg D)}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 17: $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \to \Theta}{(\neg (\neg \mathrm{A})), \Gamma \to \Theta}$, R 18: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{(\neg (\neg A)), \Gamma \to \Theta}$,

R 19: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$ (правило сечения).

Выводы в **GVIK** строятся обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа образом (см. [2], [3]). Для **GVIK** доказана теорема об устранимости сечения. С использованием этой теоремы доказано, что (✯) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: A доказуема в **HVIK** т.т.т. секвенция $\to A$ выводима в **GVIK**. Из утверждения (✯) и теоремы 2 вытекает следующая теорема 3 о том, что исчисление **GVIK** аксиоматизирует логику **VIK**.

Теорема 3. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: секвенция $\to A$ выводима в **GVIK** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

Девятизначная характеристическая матрица для VIK

Пусть $\&^+$, $\vee^+$ и $\supset^+$ есть бинарные, а $\neg\!\!\neg$ есть унарная операции на $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, определяемые нижеследующими таблицами.

$\&^+$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	2	4	5	5	1	2	2
2	2	2	2	5	5	5	2	2	2
3	2	2	2	5	5	5	2	2	2
4	4	5	5	4	5	5	4	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5
7	1	2	2	4	5	5	1	2	2
8	2	2	2	5	5	5	2	2	2
9	2	2	2	5	5	5	2	2	2

$\vee^+$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
3	1	2	2	1	2	2	1	2	2
4	1	1	1	4	4	4	1	1	1
5	1	2	2	4	5	5	1	2	2
6	1	2	2	4	5	5	1	2	2
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	2	2	1	2	2	1	2	2
9	1	2	2	1	2	2	1	2	2

$\supset^+$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	2	4	5	5	1	2	2
2	1	1	1	4	4	4	1	1	1
3	1	1	1	4	4	4	1	1	1
4	1	2	2	1	2	2	1	2	2
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	2	2	4	5	5	1	2	2
8	1	1	1	4	4	4	1	1	1
9	1	1	1	4	4	4	1	1	1

	╥
1	5
2	4
3	6
4	2
5	1
6	3
7	8
8	7
9	9

Операции $\&^+$, $\vee^+$ и $\supset^+$ определялись таблично в [4] при конструировании характеристической матрицы для логики $\mathbf{I}_3$. К сожалению, в [4] при определении операции $\&^+$ посредством таблицы допущены три опечатки: в пересечениях третьей сверху строки с четвертым, пятым и шестым столбцами напечатано «1» вместо «5».

Ясно, что $\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{1\}, \{\&^+, \vee^+, \supset^+, ╥\}\rangle$ есть матрица. Обозначим эту матрицу через $\mathcal{M}_{\mathbf{VIK}}$. Оценкой языка $\mathcal{L}$ в

$\mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}$ называем отображение множества $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ в носитель матрицы $\mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}$. Можно доказать, что для всякой оценки v языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}$ существует единственное отображение, обозначаем его $|\,|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}}$ множества $Form_{\mathcal{L}}$ в носитель матрицы $\mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$: $|p|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = v(p)$,

(b) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B:

$$|(\neg A)|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = \text{╖}\ |A|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}},$$
$$|(A \,\&\, B)|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} \,\&^{+}\, |B|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}},$$
$$|(A \vee B)|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} \vee^{+} |B|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}},$$
$$|(A \supset B)|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} \supset^{+} |B|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}}.$$

Доказана следующая теорема 4 о том, что $\mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}$ является характеристической матрицей для логики **VIK**.

Теорема 4.

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $\underset{\text{v есть оценка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{m}_{\mathbf{VIK}}}{\forall v}\ |A|_v{}^{m^{\mathbf{VIK}}} = 1$т.т.т. $A \in \mathbf{VIK}$.

Отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в VIK

Обозначаем через **CLP** классическую пропозициональную логику в языке $\mathcal{L}$.

Доказаны следующие теоремы 5 и 6 о погружении **CLP** в **VIK**.

Теорема 5. Пусть φ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ во множество $Form_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(p)$ не есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула ни для какой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$, 2) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-формулы $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi(p) \supset p)$ принадлежат логике **CLP**.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно, что $A \in$ **CLP** т.т.т. $h_\varphi(A) \in$ **VIK**, где h_φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(2) $h_\varphi((B \circ C)) = (h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\varphi(p)$ как (p & p) (или как (p $\vee$ p)) получаем операцию h_φ, погружающую **CLP** в **VIK**.

Теорема 6. Пусть φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $\varphi\,(p) = p$,

(2) $\varphi\,((B \circ C)) = (\varphi\,(B) \circ \varphi\,(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $\varphi\,((\neg B)) = (\varphi\,(B) \supset (\neg\,(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **CLP** т.т.т. $\varphi\,(A) \in$ **VIK**.

Следствие теоремы 6

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы А, в которую не входит ¬, верно следующее: $A \in$ **CLP** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

Таким образом, позитивный фрагмент классической пропозициональной логики, сформулированной в языке $\mathcal{L}$, равен позитивному фрагменту логики **VIK**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
3. *Смирнов В.А*. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
4. *Попов В.М*. Девятизначная характеризация логики $\mathbf{I}_3$ // Философия и будущее цивилизации: Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса (Москва, 24-28 мая 2005 г.) Т.1. С. 547-548.