А.М.Анисов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РЕАЛЬНОЙ ИСТИНЫ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ С АТОМАМИ[*]

Abstract. *Offered in this paper is a definition of a notion of real truth founded on a semantic theory of truth and a set theory with atoms. The definition allows of a more precise display of a concept of "correspondence" presented in a classical concept of truth*

Суть классической или корреспондентской концепции истины заключается в идее соответствия высказываний и реальности. Ее первую четкую формулировку мы находим у Платона: «тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, лжет»[1]. Основоположник семантической теории истины А.Тарский неизменно считал, что его теория истины является уточнением идей классической концепции истины. Тем не менее Тарский вынужден был признать, что «Большинство авторов, обсуждавших мою работу о понятии истины, придерживаются мнения, что мое определение не соответствует классическому истолкованию этого понятия»[2]. Кто же прав – Тарский или его критики? Рассмотрим семантическую теорию истины. В этой теории «истина» рассматривается как предикат предложений или, что то же самое по определению, высказываний. Высказывания формулируются в точно определенных языках – формализованных языках. Пусть это будут языки классического первопорядкового исчисления предикатов. В силу тезиса Гильберта, все, что можно сказать, можно сказать в подходящем первопорядковом языке, так что ограничение первопорядковыми языками по сути не является ограничением и общность подхода поэтому не будет потеряна.

Возьмем какое-либо высказывание *A*. Будет это высказывание истинным или нет? Пусть *A* есть 'Снег бел'. Тогда *Истинно*, что 'Снег бел' тогда и только тогда, когда Снег бел. Это пример самого А.Тарского и, прямо скажем, весьма неудачный. Скольких людей он заставил пойти по неправильному пути! Несмотря на все

[*] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00344.

[1] *Платон*. Кратил. 385b // Собр. соч. в 4 т.: Т. 1. М., 1990.

[2] *Тарский А*. Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: Становление и развитие (антология). М., 1998. С. 116.

последующие разъяснения самого создателя семантической теории истины, что это не определение истины, а лишь следствие из него и т.д., многие пребывают в убеждении, что суть семантической теории в том, что кавычковое имя высказывания в левой части эквиваленции заменяется самим высказыванием в правой ее части. Но тогда ничего, кроме самих предложений и их имен для определения предиката истинности не нужно! Где уж тут вести речь об истине как каком-то соответствии внелингвистической реальности.

Еще одна неудачная особенность данного, так сказать, канонического примера состоит в том, что высказывание 'Снег бел' не является высказыванием языка первого порядка. Это высказывание естественного языка. Оно требует перевода на логический язык. Для этого требуется сообразить, что термин 'Снег' – не имя собственное. Лишь обладающий необычайно раскованным воображением человек может думать, что термин 'Снег' является именем некоторого индивида, которому предицируется свойство 'Бел'. На самом деле оба эти термина являются сингулярными предикатами, так что адекватный перевод с естественного языка на язык первопорядковой логики выглядит так:

$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x)).

Уже по причине сложности логической структуры данного высказывания оно не подходит на роль адекватного исходного примера.

Но все же. Что должно стоять в правой части эквиваленции после перевода? Может быть, для кого-то итоговая эквиваленция будет выглядеть так:

Истинно ('$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x))') $\Leftrightarrow$ $\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x)).

Но это не соответствует подходу А.Тарского. Согласно его подходу, во-первых, требуется найти некоторое *непустое множество объектов* U, которое, вообще говоря, совершенно не обязано быть множеством лингвистических объектов; напротив, и само это множество, и принадлежащие ему объекты, как правило, не являются объектами языка. В общем случае это *внелингвистические* сущности. Во-вторых, надо ввести *функцию интерпретации* J, которая сопоставит сингулярным терминам 'Снег' и 'Бел' некоторые подмножества множества U. Наконец, в-третьих, необходимо убедиться, что наличествует теоретико-множественное включение J(Снег) $\subset$ J(Бел). В итоге имеем:

Истинно ('$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x))') $\Leftrightarrow$ J(Снег) $\subset$ J(Бел).

А если неверно, что J(Снег) $\subset$ J(Бел)? Тогда можно воспользоваться предикатом ложности и записать:

Ложно ('$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x))') $\Leftrightarrow$ (J(Снег) $\not\subset$ J(Бел)).

Таким образом, в левой части эквиваленции $\Leftrightarrow$ стоит имя высказывания, а в правой – перевод высказывания во *внелингвистическую (семантическую) структуру*. Возразят, что нередко эти структуры строятся из лингвистических объектов, например, из индивидных констант языка. Но даже в таких случаях для достаточно богатых языков структуры для них окажутся принципиально более сложными и потому выходящими за рамки исходного объектного языка семантическими образованиями. В этом смысле подобные структуры все равно будут внелингвистическими по сути. Но дело вовсе не в этих нюансах, а в том, что функции интерпретации дескриптивных констант языка всегда можно вводить так, чтобы значения этих функций оказывались в области внелингвистических объектов. В том числе речь может идти о реальных физических объектах. Возможно, именно подобные аргументы имел в виду А.Тарский, когда настаивал на «классическом» происхождении своей теории истины.

Итак, несомненно, что семантическая теория истины определяет истину через соотношение лингвистических и внелингвистических структур. Но достаточно ли этого обстоятельства, чтобы признать рассматриваемую теорию уточненным вариантом корреспондентской концепции истины? А.Тарский, обсуждая возражения против своей теории, приводит следующий контраргумент. Один из критиков считал, что схема эквиваленции требует дополнения. Вместо недопустимо краткого

‘p’ истинно тогда и только тогда, когда p

следует говорить

‘p’ истинно тогда и только тогда, когда p истинно

или

‘p’ истинно тогда и только тогда, когда p имеет место.

Со своей стороны, А.Тарский считает такой подход недопустимо длинным и, более того, бессмысленным[3].

Согласны, что критическая идея выражена весьма неудачно. Но вот вопрос: такого рода критика вызвана лишь непониманием, или имеет в виду нечто большее? Что, собственно, хотят получить, когда неуклюже требуют истинности самого высказывания *p*, тогда как по теории Тарского предикат истинности применяется к именам высказываний, а не к самим высказываниям? Думается, мы не ошибемся, если предположим, что одним из источников критики в подобных ситуациях является явно или неявно идея истины как результата соотнесения высказывания именно с реальностью, как она существует сама по себе. Предварительная

---

[3] Там же. С. 112-114.

постановка проблемы в связи с этим может быть сформулирована так.

Следует ли отождествлять два утверждения:

1) *Истина состоит в соответствии высказывания с внелингвистическим положением дел*

и

2) *Истина состоит в соответствии высказывания с внешней реальностью*?

По Тарскому выходит, что 1) и 2) выражают (к тому же крайне неточно) одно и то же.

Для нас это далеко не одно и то же. Вернемся к примеру со снегом. Бел он все-таки или не бел, имеет место включение J(Снег) $\subset$ J(Бел) или верно J(Снег) $\not\subset$ J(Бел)? Совершенно очевидно, что ответ на поставленный вопрос зависит как от исходного универсума рассуждений U, так и от функции интерпретации J. А обе эти компоненты можно выбирать в поистине неограниченном диапазоне. Короче говоря, истинность или ложность некоторого высказывания *A* определяется в общем случае не тем, обладает оно или не обладает свойством «Быть истинным», а тем, на какой области объектов и как именно мы его интерпретируем, короче, зависит от структуры S вида <U, J>. Это означает, что «Быть истинным» является сингулярным предикатом или свойством лишь в том случае, когда структура S фиксирована. В общей ситуации в семантической теории истины имеем не свойство, а бинарное отношение «Быть истинным»:

Высказывание A ***истинно*** *в структуре S.*

Таким образом, вопреки широко распространенному заблуждению, предикат истины является не свойством предложений, а *бинарным отношением* между высказываниями и внелингвистическими структурами, которое можно записать еще в одной форме как *Истинно (A, S)*.

В теории истины, да и на практике, если мы захотим эту теорию применить, мы должны не только уметь строить первопорядковые высказывания, но и располагать методами получения структур для этих высказываний. А эти методы оказываются методами теории множеств. Как известно, основательное развитие получил такой раздел логики, как теория моделей, систематически изучающая отношения между высказываниями и множествами высказываний, с одной стороны, и структурами – с другой. Если согласиться с тем, что теоретико-множественные структуры по отношению к языкам являются внелингвистическими, то отсюда никак не вытекает, что эти структуры и есть внешняя реальность.

Основания для такого вывода следующие. Прежде всего, структуры в семантической теории истины определены так, что любое *непротиворечивое* высказывание A, не являющееся теоремой логики, в некоторой структуре истинно, а в некоторой другой структуре ложно. Между тем, если A соотносят с реальностью, то такого быть не может. В реальности либо снег бел, либо нет, и не должно существовать способа найти две реальные структуры, в одной из которых высказывание A истинно, а в другой A ложно. Правда, это так лишь при условии, что мы не меняем смысл терминов, например, не называем уголь снегом. Иными словами, если мы зафиксировали смысл имен и понятий, а затем соотнесли их с чем-то реальным, то вопрос об истинности или ложности высказываний по отношению к реальности должен решаться однозначно.

Могут возразить: давайте возьмем некоторую конкретную достаточно сложную структуру SR для некоторого богатого языка L, объявим ее реальной, и тогда вопрос об истинности или ложности высказываний из L в SR будет решаться однозначно. Это решение аналогично позиции, принятой в семантике для модальных логик. Один из постулируемых возможных миров объявляется действительным миром, и далее нет проблем с тем, чтобы отличить истинность в действительном мире от истинности в иных возможных мирах. Скорее всего, как явствует из работ А.Тарского, он также не видел здесь проблемы, и на вопрос о применимости семантической теории истины к эмпирическим наукам отвечал безусловно утвердительно.

С нашей позиции, проблема тут есть, и она не столь проста. Суть ее в следующем. Если любую структуру можно выбрать в качестве реальной, то отнесение к реальности окажется чистым произволом. Если же не любая структура может быть названа реальностью, то возникает вопрос, каков критерий демаркации между теми структурами, которые могут быть объявлены реальными, и теми, которые таковыми объявлены быть не могут. В стандартных семантиках модальных логик любой из возможных миров можно взять в качестве действительного. В нестандартных семантиках с «невозможными» возможными мирами область выбора претендента на реальность суживается до «нормальных» возможных миров. Но это только видимость выбора, поскольку, например, в «ненормальных» возможных мирах высказывание A и его отрицание $\neg A$ могут оказаться вместе истинными, что исключает их применимость в семантической теории истины А.Тарского, которая подобные ситуации запрещает. Один из аспектов проблемы реальности в том и состоит, что реальный мир надо выбрать из множества «нормальных» возможных миров на каком-то основании, а не по произволу.

Следующее возражение против использования одной из обычных математических теоретико-множественных структур в качестве аналога реальности состоит в том, что с точки зрения математики желательно, чтобы все такие структуры возникали закономерным образом. В идеале построение теории множеств начинается с постулирования существования пустого и бесконечного множеств, из которых с помощью разрешенных операций получаются все другие множества. Правда, в жизни идеал оказался неосуществимым по причине независимости ряда утверждений теории множеств от исходных аксиом. Так, существование недостижимых кардиналов доказать в этой теории нельзя, однако предположение об их существовании (или не существовании) к противоречию не ведет. В любом случае множества, существование которых не удается доказать из «естественных» аксиом, слишком экзотичны даже для математики, не говоря уже о том, чтобы использовать их для моделирования реальности. А если ограничиться только закономерно возникающими множествами, то они слишком регулярны и предсказуемы в своем поведении, что отнюдь не улучшает их шансы выступить в качестве модели реальности. На них явно лежит печать искусственности, поскольку они контролируемое произведение человеческого ума. Претендент на звание реального должен быть более естественным. И, в первую очередь, в отношении того, что проблема определения его свойств (по крайней мере, в значительной части) не должна быть чисто математической задачей. Например, мы можем быть уверены, что существует множество разумных животных. Однако это вовсе не означает, что мы должны быть готовы моделировать такое множество посредством некоторого построения, начинающегося с пустой совокупности. Натуральные числа, допустим, мы так и строим: объявляем, что $0 =_{\mathrm{Df}} \varnothing$, $1 =_{\mathrm{Df}} \{\varnothing\}$, $2 =_{\mathrm{Df}} \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т.д. Поведение получаемых объектов регулярно, закономерно и предсказуемо. Но не будет ли бессмысленным предположение, что подобным путем можно получить множество разумных животных? Нам представляется, что будет. Абсурдно полагать, что множество разумных животных возникнет по правилам теории множеств на каком-то этапе порождения множеств из пустой совокупности.

Не означает ли сказанное выше, что похоронена надежда на использование логики и математики в построении структур, которые можно было бы обоснованно считать способными выступать в роли реальных? Ведь логика и математика (если отвлечься от экзотических объектов вроде «ненормальных» возможных миров или недостижимых кардиналов, явно не годящихся на эту роль) имеет дело с регулярными, закономерными и предсказуемыми структурами. Или это все-таки не всегда так?

Подведем промежуточный итог. Проблема реальности в семантической теории истины имеет, по крайней мере, два аспекта. Во-первых, вопрос об истинности или ложности высказываний в этой теории решается не однозначно (за исключением высказываний, которые истинны или которые ложны в любой структуре), тогда как высказывание, которое удалось соотнести с реальностью, должно однозначно оказаться либо истинным, либо ложным. Во-вторых, абсурдно пытаться моделировать реальность при помощи регулярных математических структур, что заставляет искать структуры иррегулярные.

Вытекает ли отсюда, что независимо от возможности решения поставленной проблемы реальности следует отказаться от семантической теории истины, в которой эта проблема заведомо не решается? Обычно от раскритикованной теории отказываются, предлагая вместо нее другую. Но есть иной путь. Вместо отказа от теории, в которой не решается некоторая проблема, можно попытаться построить консервативное расширение исходной теории, обеспечивающее решение. Такой путь принципиально закрыт для адептов пресловутого тезиса о несоизмеримости научных теорий, ибо консервативное расширение теории и сама теория сравнимы тривиальным образом. При этом они могут значительно отличаться друг от друга. Например, исчисление предикатов можно представить как консервативное расширение исчисления высказываний, но обе эти теории принципиально отличаются по дедуктивным возможностям. Аналогичным образом, мы собираемся решать проблему реальности в подходящем консервативном расширении семантической теории истины А.Тарского. Поскольку наше расширение предполагает прямую корреляцию с классической концепцией истины, это будет означать следующее: исходная теория А.Тарского не является вариантом корреспондентской концепции, но допускает (за счет добавления понятия реальности) расширение до корреспондентской теории.

Начнем построение требуемого консервативного расширения с решения второго аспекта проблемы реальности. На роль иррегулярных объектов теории множеств мы предлагаем *праэлементы* или *атомы*. Атомы являются праэлементами потому, что они исходные объекты в том смысле, что не получены из каких-то ранее построенных множеств. Праэлементы являются атомами (неделимыми) потому, что им, как и пустому множеству $\varnothing$, ничего не принадлежит в качестве элемента. Тем не менее, они не равны пустому множеству. Атом привлекателен тем, что с чисто математической точки зрения он почти ничего из себя не представляет. В этом плане он совсем не похож, например, на недостижимый кардинал, про который очень много можно сказать нетривиального в математическом смысле. Короче, атомы настолько свободны от математических свойств, насколько это вообще представляется возможным. Именно это обстоятельство дает нам шанс не перепутать математическую структуру с реальной структурой, представленной праэлементами.

Рассмотрим аксиоматическую теорию множеств с атомами ZFA, которая строится на базе теории множеств Цермело – Френкеля ZF.

Добавим к языку первопорядкового исчисления предикатов с равенством символ бинарного отношения $\in$ и две индивидных константы $\varnothing$ и A. Условимся вместо формул вида $\neg(x \in y)$ писать $x \notin y$. Аксиомами ZFA будут следующие утверждения.

1. *Аксиома пустого множества*:

$$\forall x(x \notin \varnothing).$$

2. *Аксиома множества атомов*:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \neq \varnothing \ \&\ \forall y(y \notin x)).$$

Будем называть элементы из A *атомами*, а *множествами* – объекты, не являющиеся атомами, то есть x – атом, если и только если $x \in A$, и x – множество, если и только если $x \notin A$.

3. *Аксиома экстенсиональности для множеств*:

$$(\forall x{\notin}A)(\forall y{\notin}A)(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

4. *Аксиома пары*:

$$\forall x\forall y\exists z\forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Для любых x и y, множество, существование которого утверждает эта аксиома, обозначается через $\{x, y\}$. Для данных x и y оно единственно в силу аксиомы экстенсиональности.

5. *Аксиома суммы или объединения*:

$$\forall x(\exists y{\notin}A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \ \&\ z \in u)).$$

Вновь множество, существование которого утверждается, единственно. Его обозначением является $\cup x$. В частности, $\cup\varnothing = \varnothing$ и если x – атом, то $\cup x = \varnothing$. Если в формулировке аксиомы опустить требование $y{\notin}A$, то единственность уже не гарантирована: ничто не мешает для атома a положить $\cup\varnothing = a$ и $\cup a = a$.

6. *Аксиома степени*:

$$\forall x\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x),$$

где $z \subseteq x \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} z \notin A \ \&\ \forall u(u \in z \rightarrow u \in x)$. Условие, что всякое подмножество z является множеством, обеспечивает верность предложения $\forall x(\varnothing \subseteq x)$, однако предотвращает $a \subseteq x$ для любого x в том случае, если a – атом. Например, $\neg(a \subseteq a)$, но $x \subseteq x$, если x – множество. Единственность множества-степени для всякого x следует из аксиомы экстенсиональности, что позволяет ввести для него обозначение S(x). По аксиоме степени $S(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $S(a) = \{\varnothing\}$, если a – атом, то есть единственным подмножеством пустого множества и атомов является пустое множество.

7. *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x(\varnothing \in x \;\&\; \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)),$$

где результат операции $x \cup y$, по определению, удовлетворяет условию $\forall z(z \in x \cup y \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$. Существование множества $x \cup y$ гарантируется аксиомой пары и аксиомой суммы: $x \cup y =_{Df} \cup\{x, y\}$, а его единственность – аксиомой экстенсиональности.

8. *Схема аксиом подстановки*:

$$\forall x(\forall u(u \in x \to \exists! z F(u, z)) \to$$
$$(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \;\&\; F(u, z)))),$$

где $\exists!$ означает «существует и единственный», а F(u, z) – любая формула, не содержащая переменную y свободно. Условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы подстановки при ложности $\exists u(u \in x \;\&\; F(u, z))$.

8′. *Схема аксиом выделения подмножества* (значок ′ указывает, что данная схема аксиом выводится из остальных):

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \;\&\; F(z)),$$

где F(z) – произвольная формула, в которую y не входит свободно. Как обычно, обозначим множество, являющееся результатом выделения, через $\{z \in x \mid F(z)\}$. Вновь условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы выделения в тех случаях, когда нет таких z, что $z \in x \;\&\; F(z)$, так что будет выполнено $\{z \in x \mid F(z)\} \subseteq x$ для любого x.

9. *Аксиома регулярности*:

$$\forall x(\exists z(z \in x) \to \exists y(y \in x \;\&\; y \cap x = \varnothing)),$$

где результат операции $y \cap x$ при помощи схемы выделения определен следующим образом: $y \cap x =_{Df} \{z \in x \cup y \mid z \in x \;\&\; z \in y\}$. Теперь можно показать, что A – действительно множество, а не атом, то есть что $A \notin A$. В противном случае предположим $A \in A$ и возьмем синглетон $\{A\}$ (существующий в силу аксиомы пары: $\{A, A\} =_{Df} \{A\}$). Этот синглетон содержит единственный элемент A и поэтому по аксиоме регулярности должно быть выполнено $\{A\} \cap A = \varnothing$. Однако $A \in \{A\}$ и $A \in A$ по предположению, что влечет $A \in \{A\} \cap A \neq \varnothing$. Получили противоречие.

На этом список аксиом теории ZFA завершен[4]. Отметим, что ни в одной из аксиом не требовалась непустота множества атомов A. Поэтому, добавив к ZFA формулу $A = \varnothing$, мы получим обычную теорию ZF, что вовсе не входит в наши планы. Но не приведет ли к противоречию непустота множества A? Оказывается, нет. Более того, было показано, что система аксиом (ZFA + «A – бесконечное множество») непротиворечива относительно ZF и останется непротиворечивой после добавления аксиомы выбора[5].

Нам сейчас не понадобится аксиома выбора. Тем не менее, ее приходится упоминать, поэтому сформулируем эту аксиому в явном виде. Чтобы избежать излишних технических деталей, воспользуемся тем известным фактом, что отношение «y есть функция с областью определения x» выразимо на языке теории множеств ZF.

10. *Аксиома выбора*:

$(\forall x \notin A)\exists y$(y есть функция с областью определения x &
$\forall z(z \in x \ \& \ \exists u(u \in z) \to y(z) \in z))$.

Вернемся к вопросу о пустоте или непустоте множества A. С философской точки зрения пустота этого множества означает, что объективной реальности как таковой не существует. Данная ситуация воспроизводит позицию субъективного идеализма берклианского типа. Если же принимается аксиома вида $\exists x(x \in A)$, но при этом больше никакой иной информации о свойствах A и его элементов нет, то перед нами аналог кантовской непознаваемой вещи самой по себе, которая, несомненно существует, но ничего определенного о ней нельзя сказать в принципе. Как первый, так и второй вариант, ясное дело, интереса не представляют. Рискуя навлечь на себя негодующие голоса критиков, добавим, что формальная тривиальность этих вариантов отражает их философскую несостоятельность. Считать субъект познания настолько автономным, что он либо вовсе не нуждается в объективной (т.е. как раз независящей от существования субъекта) реальности, либо нуждается в ней только в качестве пускового механизма проявления своей собственной активности – значит игнорировать тот установленный наукой факт, что человек вместе с его познавательным аппаратом является частью природы и результатом эволюционного приспособления к окружающей среде. Работы эволюционных эпистемологов не оставили на сей счет никаких сомнений. Таким образом, не субъект заключает в себе мир, а мир включает в себя

---

[4] Он несколько отличается от списка, приведенного в книге Т.Йеха 1973 г., однако эти отличия несущественны.
[5] *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973. С.125.

субъекта как к тому же ничтожную свою часть. Мир без субъекта существовал и сможет при исчезновении последнего существовать и дальше, а вот субъект без внешнего мира превратится в ничто.

Поэтому проблема для современной эпистемологии вовсе не в том, существует ли внешний мир, а в том, как репрезентировать его в эпистемологических концепциях. Ведь если ограничиться тезисом о существовании объективной реальности, без каких-либо уточнений о ее устройстве, то мы будем отброшены на позиции кантианства (любопытно, что И.Кант, первым взглянувший на космос как на результат эволюции, не пожелал или не сумел распространить этот взгляд на познание). А если дать детализированную картину реальности, то она неизбежно окажется «нагруженной» теми историческими ограничениями, которые свойственны любому этапу познавательного процесса. Ясно ведь, что наше время отнюдь не сказало последнего слова в познании реальности, и что-то из принятого сейчас в будущем будет пересмотрено или отброшено вовсе. Так что мы должны пройти между Сциллой агностицизма кантианства, отказывающегося обсуждать структуру реальности, и Харибдой наивного реализма, отождествляющего реальность с наличным уровнем знания.

Мы не найдем ответа на вопрос о структуре реальности ни в биологии, ни в социологии, ни в химии, ни даже в физике. Часто именно в физике видят науку, дающую ответы на последние вопросы о внешнем мире. Однако это не так. Взгляды физиков на мир непрерывно меняются, уровень философской рефлексии в большинстве случаев невысок и потому их концепции реальности весьма неустойчивы и, более того, неопределенны. Чего стоят, например, заявления маститых физических авторитетов о единстве современной физики и восточных мистических учений о мире[6]. К счастью, есть наука, по степени общности превосходящая любые позитивные дисциплины (в том числе и физику), а по степени строгости не уступающая математике. Имеется в виду современная логика, лежащая в основаниях не только всех наук, но и любого рационального познания как такового. Именно логика формулирует те предельные онтологические предпосылки, которые оказываются на деле наиболее общими схемами членения универсума. В ряду этих предпосылок кратко сформулируем две: 1) реальность состоит из объектов, 2) объекты обладают свойствами и вступают между собой в отношения.

---

[6] Чтобы убедиться в сказанном, достаточно заглянуть в книгу: *Ф.Капра* Дао физики. СПб., 1994.

Реализуем приведенные онтологические схемы. Расширим язык теории ZFA, добавив к нему индивидные константы П и О, а также одноместный функциональный символ f. Построим в этом языке теорию ZFAI, аксиомами которой являются выше сформулированные аксиомы 1–9 и следующие аксиомы 11–14, которые, в отличие от предыдущих, не будут иметь специальных названий (в результате теория ZFA будет подтеорией теории ZFAI).

11.$\Pi \cup O = A$.

12.$\Pi \cap O = \varnothing$.

13.$\exists x \exists y(x \in \Pi \ \& \ y \in O)$.

Нижеследующие построения стандартны и могут быть проведены средствами теории ZF без привлечения аксиомы выбора, так что существование описываемых множеств не вызывает сомнений. По аксиоме бесконечности, $\exists x(\varnothing \in x \ \& \ \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$. Определим множество ω следующим образом: $(\varnothing \in \omega \ \& \ \forall y(y \in \omega \rightarrow y \cup \{y\} \in \omega)) \ \& \ \forall x[(\varnothing \in x \ \& \ \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)) \rightarrow \omega \subseteq x]$, то есть ω – наименьшее по включению множество x, содержащее $\varnothing$ и замкнутое относительно условия $y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x$. Элементы ω будем считать натуральными числами. Исключив из ω пустое множество $\varnothing$, получим множество положительных натуральных чисел ω^+.

Если f – функция, то ее областью определения будет множество $\mathrm{dom}(f) =_{Df} \{x \mid \exists y(f(x) = y\}$, а областью значений $\mathrm{rng}(f) =_{Df} \{y \mid \exists x(f(x) = y\}$. Для любого натурального $n \in \omega^+$ и для всякого непустого[7] x существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = n \ \& \ \mathrm{rng}(f) \subseteq x$. Такое f назовем *конечной последовательностью* длины n элементов из x. Для каждого непустого x существует множество всех конечных последовательностей длины n элементов из x, а также множество всех таких множеств. Вообще, множество функций с областью определения Y и множеством значений X называется *декартовой степенью* множества X и обозначается посредством X^Y. В нашем случае речь идет о декартовых степенях вида x^n и множестве $D_x =_{Df} \{x^n \mid n \in \omega^+\}$. При x = O получим множество $D_O =_{Df} \{O^n \mid n \in \omega^+\}$.

14.$(\forall x \notin \Pi)(f(x) = \varnothing) \ \& \ (\forall x \in \Pi)(\exists n \in \omega^+)(f(x) \subseteq O^n)$.

Ясно, что поскольку $O^n \cap O^m = \varnothing$ при $n \neq m$ (множества конечных последовательностей разной длины не могут иметь общих элементов), число n, существование которого утверждается в аксиоме 14, единственно, если только множество $f(x)$ непусто.

[7] «X непуст» означает не $X \neq \varnothing$ (атомы тоже не равны $\varnothing$), а $\exists y(y \in X)$, что, конечно, влечет $X \neq \varnothing$.

Само отображение f ведет себя как функция выбора подмножеств на бесконечном семействе D_O непустых непересекающихся множеств. Однако нетрудно показать, что такое отображение можно определить без привлечения аксиомы выбора. Достаточно для всякого $x \in \Pi$ положить $f(x) = \varnothing$, чтобы тривиально обеспечить выполнение последнего конъюнктивного члена в аксиоме 14. Это же рассуждение показывает, что утверждение «$rng(f)$ – множество» также непротиворечиво: в данном случае получим $rng(f) = \{\varnothing\}$.

Факт 1. Теория ZFAI непротиворечива относительно ZF.

Доказательство этого факта было нами опубликовано ранее[8].

Факт 2. Теория ZFAI не является консервативным расширением ZF.

В самом деле, предложение $\exists x \forall y(y \notin x \ \& \ x \neq \varnothing)$ сформулировано на языке ZF, но в ZF оно недоказуемо. Однако оно доказуемо в ZFAI в силу непустоты множества атомов (аксиома 13).

Не противоречит ли только что полученный результат обещанию консервативного расширения теории А.Тарского? Нет, поскольку эта теория имеет неформальный характер. Применительно к ней идея консервативного расширения является лишь идеей, вектором движения вперед, а не формальным утверждением. Мы всего лишь намереваемся дополнить теорию Тарского рядом новых понятий без того, чтобы ввести какие бы то ни было новые утверждения в системе исходных понятий этой теории. В частности, неформальный характер исходной семантической теории виден и из того, что в ней отнюдь не фиксирована конкретная теория множеств, в которой будут строиться семантические структуры. Почему бы в качестве такой теории не взять ZFAI? Мы как раз намереваемся это сделать. Более того, ZFAI мы будем в дальнейшем использовать как неформальную, содержательную теорию.

Неформальная интерпретация введенных в язык новых символов состоит в следующем. Множество Π – это множество реальных предикатов (свойств и отношений), а множество O – множество реальных объектов. Обычно n-местные ($n \geq 1$) предикаты трактуются как подмножества множества объектов (при $n = 1$) или как подмножества n-местного декартова произведения множества объектов (при $n > 1$). Вместо этого можно было бы говорить о множествах конечных последовательностей объектов длины n, например, для двухместного предиката R вместо $R \subseteq O \times O$ писать

[8] *Анисов А.М.* Представление интенсиональных отношений в теории множеств с атомами // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.

$R \subseteq O^2$, то есть вместо множества упорядоченных пар рассматривать множества двухчленных последовательностей. При этом каждой упорядоченной паре $<a, b>$ взаимно однозначно сопоставляется последовательность (a_0, b_1).

Однако препятствием к реализации этого плана является то, что в теории ZFAI предикаты, будучи элементами множества П, то есть атомами, не могут содержать каких-либо объектов в смысле отношения принадлежности $\in$. Функция f позволяет обойти это препятствие. Она каждому предикату-атому из П либо сопоставляет некоторое подмножество множества O^n конечных последовательностей длины n из множества объектов O, либо (что пока неважно) сопоставляет некоторый элемент O. Теперь все готово для введения важного определения *интенсиональной принадлежности* ε.

$$x \, \varepsilon \, y \leftrightarrow_{Df} x \in f(y).$$

Будем говорить, что совокупность y *интенсионально (экстенсионально) непуста*, если и только если $\exists x(x \, \varepsilon \, y)$ $(\exists x(x \in y))$. В противном случае совокупность y *интенсионально (экстенсионально) пуста*. Как ясно из определения функции f, если $\exists x(x \, \varepsilon \, y)$, то это означает, что $y \in П$ и $\exists x(x \in f(y))$. Отсюда следует, что все множества интенсионально пусты, зато все атомы экстенсионально пусты. Наряду с экстенсионально непустыми множествами есть одно-единственное экстенсионально пустое множество $\varnothing$, в то время как может быть сколько угодно интенсионально пустых и интенсионально непустых атомов.

Вернемся теперь к проблеме определения истины. Мы оставляем все конструкции, имеющиеся в семантической теории истины. Проверка конструкции «Высказывание A истинно в структуре S» остается прежней, с учетом того, что S строится в универсуме теории ZFAI. Последнее замечание означает, что в $S = <U, J>$ совокупность U по-прежнему должна быть непустым множеством, т.е., в новой терминологии, должна быть экстенсионально непустой, хотя ничто не препятствует тому, что U может содержать атомы. Отсюда заключаем, что U не может быть ни пустым множеством, ни атомом, даже если этот атом интенсионально непуст. Точно так же теория ZFAI ничего по существу не меняет в понятии интерпретации J.

Принципиальная новизна нашего подхода состоит в том, что бинарный предикат *Истинно (A, S)* будет расширен (именно расширен, а не просто заменен) тернарным предикатом *Истинно (A, S, R)*, в котором третья компонента представляет реальность. Идея в том, что схема *язык – семантика* дополняется схемой *язык – семантика – онтология*. За счет этого будет осуществлен прорыв к реальности. И помимо старого *семантического* определения истины появиться новое *онтологическое* определение истины.

В языках первого порядка к символам, требующим приписывания значения из универсума U, относятся индивидные константы (короче, имена), индивидные переменные и предикатные константы[9]. Начнем с индивидных констант. В каком случае функция интерпретации J может обрести онтологическую компоненту в отношении имени α? Очевидно, что только в том случае, когда $J(\alpha) \in O$, т.е. когда интерпретация указывает на реальный индивид. Если же $J(\alpha) \notin O$, то имени приписан, если позволите так выразиться, виртуальный, а не реальный индивид. В этом втором случае мы вынуждены ограничиться парой $<\alpha, a>$, где $J(\alpha) = a$. Зато в первом случае ситуация позволяет вести речь о реальности в форме принятия тройки $<\alpha, a, a>$, где вновь $J(\alpha) = a$, но теперь $a \in O$. Фактически та же самая ситуация имеет место в отношении функции оценки значения индивидных переменных v. Либо $v(x) \notin O$, и тогда ограничиваемся парой $<x, a>$, где $v(x) = a$; либо $v(x) \in O$, и тогда берем тройку вида $<x, a, a>$.

Перейдем к описанию интерпретации предикатных символов языка. Для n-арного предиката R^n функция интерпретации J дает, как и обычно, $J(R^n) \subset U^n$. Получаем пару $<R^n, R>$, где $R \subset U^n$. При каком условии можно приписать *R* реальность? Здесь мы подходим к ключевому пункту нашей теории. Если найдется такой реальный предикат $\mathit{\Pi} \in \Pi$, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(<x_1, x_2,\ldots, x_n> \in R \Leftrightarrow (x_1, x_2,\ldots, x_n)\ \varepsilon\ \mathit{\Pi})$, то это и есть некоторый род *совпадения* семантического предиката *R* и реального предиката *П*. Именно совпадения в отношении того, что семантический и реальный предикат состоят из *одних и тех же реальных объектов*, только семантический предикат состоит из них *экстенсионально*, а реальный – *интенсионально*. Формально, разумеется, $R \neq \mathit{\Pi}$.

Осталось учесть, что поскольку все наши высказывания относятся к некоторому универсуму, семантический универсум U также должен быть соотнесен с неким реальным универсумом $W \in \Pi$, если мы хотим нечто утверждать о реальности. Помня о том, что универсум – это универсальное свойство (которое, однако, не обязано быть представлено в языке), по аналогии с предыдущим получим эквиваленцию $\forall x(x \in U \Leftrightarrow x\ \varepsilon\ W)$. Поскольку та часть эквиваленции, которая содержит знак $\in$, всегда отсылает к виртуальному универсуму, в дальнейшем вместо U будем использовать

[9] Процедуру добавления онтологической компоненты легко сформулировать и для функциональных констант, однако функциональные константы местности n сводимы к n+1-местным предикатным символам, так что можно обойтись без них.

V: $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x\ \varepsilon\ W)$. Если указанная эквиваленция имеет место, то дать имя в виртуальном универсуме и в реальном универсуме – это почти одно и то же: поскольку $J(\alpha) \in V$, постольку $J(\alpha)\ \varepsilon\ W$. То же самое касается приписываний значений индивидным переменным. Это позволит не упоминать имена и индивидные переменные в итоговом определении реальной истины.

Завершающие построения теперь почти очевидны. Что означают выражения типа «*A* реально истинно», или «*A* действительно истинно», «*A* истинно в реальности» и т.п.? Это означает, что *A* *истинно* по А.Тарскому и притом *соотносимо с реальностью* в указанном выше смысле. Формально это выглядит следующим образом.

Первопорядковое высказывание *A* **реально истинно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = \langle V, J\rangle$ такая, что *A* *истинно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x\ \varepsilon\ W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из *A* найдется реальный n-местный предикат $\mathit{\Pi} \in \Pi$ такой, что $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n(\langle x_1, x_2,\ldots, x_n\rangle \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2,\ldots, x_n)\ \varepsilon\ \mathit{\Pi})$.

Весьма интригующим выглядит вопрос, как определить реальную ложь. Здесь не подойдет определение через простое отсутствие реальной истинности. Скажем мы, что русалки на ветвях сидят, скажем, что не сидят, объявим нынешнего короля Франции лысым или не лысым – какое отношение все эти высказывания и их отрицания имеют к реальности? Ясно, что никакого. На наш взгляд, титул реальной ложности могут иметь лишь те высказывания, которые соотнесены с реальными объектами и предикатами. Мы имеем основание считать высказывание «Сократ – мужчина» не только истинным, но и реально истинным, в то время как высказывания «Сократ – русалка» и «Неверно, что Сократ – русалка» с полным правом можем отлучить от реальности. Зато высказывание «Сократ – женщина» не просто ложно, но и реально ложно, поскольку реален не только исторический Сократ, но и женщины. Этими соображениями мотивируется принятие следующего определения реальной ложности.

Первопорядковое высказывание *A* **реально ложно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = \langle V, J\rangle$ такая, что *A* *ложно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x\ \varepsilon\ W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из *A* найдется реальный n-местный предикат $\mathit{\Pi} \in \Pi$ такой, что $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n(\langle x_1, x_2,\ldots, x_n\rangle \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2,\ldots, x_n)\ \varepsilon\ \mathit{\Pi})$.

Как видно, определение реальной истинности от определения реальной ложности отличается только в первом пункте. Реальная ложность появляется тогда, когда мы верно соотнесли исходные предикаты и имена с реальностью, но напутали в утверждениях о соотношении предикатов и имен или о соотношении предикатов между собой. Для иллюстрации последнего случая опять вернемся к примеру со снегом. Можно быть в состоянии правильно идентифицировать вещество как снег, и можно прекрасно знать реальное значение слова «белый». Но при этом утверждать, что «Снег не бел». Я действительно встретил отрицание белизны снега в одной из философских статей. Не думаю, что я снегом и белым называю не то, что автор этой статьи. Просто в реальности снег может содержать примеси, меняющие его цвет, но он остается снегом! Упоминание о примесях объясняет принятие ложного высказывания «Снег не бел», но отнюдь не делает его не реальным. Стало быть, это высказывание реально ложно.

Если некоторое высказывание A оказалось реально истинным (реально ложным), то существует конечное непустое подмножество $\mathrm{R} \subset \Pi$ тех праэлементов, которые обеспечивали его истинность (ложность) в аспекте реальности. В этом плане реальная истина (ложь) оказывается тернарным предикатом: *Реально истинно (ложно)* (A, S, R).

Назовем вторую компоненту S из тройки (A, S, R) *смыслом* высказывания A. В исходной теории мы фиксировали A, но варьировали S, получая за счет этого истинностный релятивизм, когда одно и то же высказывание оказывалось в зависимости от выбора S то истинным, то ложным. Если же нас интересует реальная истинность высказывания A, то теперь надо зафиксировать не только A, но и его смысл, т.е. S. При этих условиях реальная истинность A определяется однозначно, к чему мы и стремились. То же самое верно относительно реальной ложности. Уточним сказанное.

Факт 3. Для любого высказывания A и любой структуры S, если существует R такое, что *Реально истинно* (A, S, R), то не существует Q такого, что *Реально ложно* (A, S, Q), и наоборот, если существует R такое, что *Реально ложно* (A, S, R), то не существует Q такого, что *Реально истинно* (A, S, Q).

Данный факт вытекает из того, что в силу принятых определений структуры S и R по сути изоморфны. Но так и должно быть. Истинное познание и состоит в установлении изоморфизма между смыслом высказывания и реальностью. И если бы Q существовало, имели бы еще, что S изоморфно Q, а отсюда Q изоморфно S и по транзитивности получается, что R изоморфно Q, что невозможно.

Принятые определения реальной истинности и реальной ложности требуют развернутого обсуждения, для которого в рамках данной статьи нет места. Поэтому в заключение ограничимся лишь одним комментарием к построенным конструкциям. Понятие реальной истинности заведомо уже понятия истинности, но, быть может, все еще слишком широко с философской точки зрения, по крайней мере, в следующем аспекте. Спросим, могут ли в реальности существовать интенсионально пустые свойства и отношения? Аксиома 14 не препятствует их появлению. Например, для некоторого свойства $п \ \varepsilon \ П$ может оказаться, что $\forall x \neg(x \ \varepsilon \ п)$. Возьмем теперь язык, в котором есть свойство *Круглый_квадрат*(x). Логично потребовать, чтобы функция интерпретации J приписала этому свойству пустое множество: J(*Круглый_квадрат*) = $\varnothing$. В силу пустоты, свойство *Круглый_квадрат*(x) не будет выполнено ни при каком приписывании значений индивидным переменным, так что высказывание $\exists$x*Круглый_квадрат*(x) окажется ложным в структуре S = <V, J>. Предположим, удалось найти $W \in П$ такое, что $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \ \varepsilon \ W)$. Тогда в силу наличия интенсионально пустого $п \ \varepsilon \ П$ утверждение $\exists$x*Круглый_квадрат*(x) будет реально ложным, ибо $\forall$x (x $\in$ J(*Круглый_квадрат*) $\Leftrightarrow$ x ε п). Аналогичным образом, при этих же предположениях высказывание $\neg\exists$x*Круглый квадрат*(x) окажется реально истинным. Следуя по указанному пути, можно прийти к реальной истинности утверждений о не существовании в реальности квадратных кругов, русалок, химер, флогистона, теплорода и т.д. Короче, любое измышленное нами фантомное образование окажется соотносимым с реальностью. Может быть, кого-то это устраивает, и так и надо делать. Но есть и другой путь. Устранив саму возможность появления интенсионально пустых свойств и отношений (с помощью новой аксиомы или модифицировав соответствующим образом аксиому 14), можно будет вообще отлучить высказывания, подобные вышеприведенным, от реальности. Причем как в смысле их реальной ложности, так и в смысле их реальной истинности. Тогда глубокомысленное утверждение традиционных логиков о том, что русалки реально не существуют, получит статус не реальной истинности или ложности, а менее почетный статус обычной семантической истинности или ложности в зависимости от выбранного универсума рассуждений и соответствующей функции интерпретации.