

Е.Д.Смирнова

**ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИЕ
АСПЕКТЫ АНАЛИЗА ПОНЯТИЯ
ИСТИННОСТИ***

Abstract. The types of non-standard semantics with partially-defined predicates are described. The main point of consideration is stipulation of adequateness conditions for concepts of truth introduced in these semantics. Corresponding reconstruction of well-known Tarski's scheme are elaborated, and the place and role of the scheme in these semantics are clarified.

Возникновение в современной логике логических систем самого разного типа остро ставит проблему истолкования природы логического знания, логических форм и законов. Одной из важных предпосылок обоснования логических систем является исследование понятия истинности и условий истинностных оценок высказываний. Необходимо эксплицировать, выявить смысл используемого в логике понятия истинности.

Построение теоретической семантики предполагает введение семантических понятий точным и строгим образом. Однако этого недостаточно. Необходимо установить адекватность введенных понятий некоторым исходным содержательным понятиям. Так, в основе семантик систем классической логики лежит понятие истинности, отвечающее требованиям известной схемы Тарского. Схема Тарского предназначена для экспликации классического, аристотелевского понятия истинности – истинности как соответствия действительности. Именно схема устанавливает связь введенного в семантике строгим образом понятия истинности с определенным содержательным, философским понятием. Возникает вопрос, сохраняет ли схема Тарского свое значение в случае иного типа семантик – в случае семантик модальных и интенциональных контекстов, высказываний об идеальных элементах или в семантиках с не всюду определенными предикатами.

Уже в классической семантике в связи со схемой Тарского возникает ряд вопросов. Во-первых, вопрос трактовки предложения p схемы, фиксирующего то положение дел, которое верифицирует рассматриваемое предложение и задает его интерпретацию. Вопрос этот особенно существенен в случае модальных и интен-

* Работа выполнена при поддержке РФНФ, грант № 03-03-00071а.

сиональных контекстов или высказываний о в принципе не реализуемых объектах, фикциях. В случае семантик модальных и особенно интенциональных контекстов интерпретация предложения p предполагает обращение к понятию возможных миров. В семантике вводятся такие сущности, как пропозициональные и индивидные концепты, интенционалы, семейства возможных миров, отношения и функции, задаваемые на такого рода семействах, и т.д., см. [4, с. 164–165].

Возникает расхождение между корреспондентской концепцией истинности, лежащей в основе схемы T , и тем, что называют философским реализмом. Возникает онтология, которую, говоря словами Куайна, можно назвать интенциональной онтологией [1, § 44].

Во-вторых, возникает вопрос о связи условий истинностных оценок высказываний с их осмысленностью. Всякое ли осмысленное высказывание может получать истинностную оценку и каковы в таком случае критерии осмысленности? В соответствии со схемой Тарского, понимать высказывание – значит знать условия его истинности. И, наоборот, понимание условий истинности предложения задает его смысл. Однако уже Буридан отмечал, что существуют высказывания, вполне осмысленные, но которые не могут оцениваться как истинные или ложные. Например, самоприменимое предложение в случае парадокса Лжеца. Мы понимаем это высказывание, более того, имеет место то, что оно утверждает, однако попытка оценивать его как истинное или ложное приводит к противоречию. Высказывания об идеальных объектах-фикциях («идеальные элементы» в терминологии Д.Гильберта) являются осмысленными утверждениями математики, но они не могут оцениваться как истинные или ложные. Свое значение эти высказывания получают в контексте всей теории. Соответственно условия истинности такого рода высказываний не могут задаваться предложениями, фиксирующими определенные положения дел. В этом случае мы имеем дело скорее с когерентной концепцией истинности. У Гильберта «идеальные высказывания» – в отличие от действительных предложений математики – не получают истинностных оценок. Принятие такого рода положений означает по существу *пересмотр схемы Тарского*.

Согласно Б.Расселу, высказывания типа, например, высказываний обо всех высказываниях («Все высказывания истинны или ложны»), лишены истинностной оценки, но они и трактуются Расселом как *лишенные смысла*. Встает в целом проблема соотношения осмысленности и условий истинности высказываний.

Критерии осмысленности и возможность истинностной оценки

высказываний в ряде случаев связаны с уточнением области действия предикатов («Цезарь – простое число», «Веселая, гулкая рань»). Нарушение категориальности, правил языка, связанных со значениями выражений, дает высказывания, не имеющие истинностных оценок. Высказывания о несуществующих объектах – типа «Гамлет черноволос», «Нынешний король Франции лыс», «Мир в целом бесконечен» или «Круглый квадрат кругл» – рассматриваются обычно как осмысленные, но их истинностная оценка приводит к нарушению логических законов. Опять-таки требуется уточнение условий истинностных оценок высказываний.

Особый интерес представляет уточнение понятия истинности в случае семантики с не всюду определенными предикатами. Разработка теории рекурсивных функций неизбежно приводит к идее не всюду определенной (частичной) рекурсивной функции. Рекурсивной функции сопоставляется алгоритм, вычисляющий по аргументам функции ее значение. Но алгоритм может не закончить работу, то есть соответствующая ему функция может оказаться не всюду определенной. В общем случае мы не имеем метода распознавания, будет ли функция, создаваемая алгоритмом, всюду определенной или нет. Идея частичной рекурсивной функции является более фундаментальной, чем идея всюду определенной рекурсивной функции. Если характеристическая функция n -местного предиката является не всюду определенной, то мы имеем не всюду определенные предикаты. В целом это соответствует нашей интуиции и правилам языка. Еще Г.Гегель отмечал, что о духе нельзя сказать, что он зеленый, как и нельзя сказать, что он незеленый. Такой подход к анализу предикатов приводит к идее, что и понятие истинности может быть определенным не на всем множестве высказываний.

Рассмотрим пути уточнения схемы Тарского в семантиках, имеющих дело с не всюду определенными предикатами. Мы выделяем следующие виды таких семантик:

(1) Как стандартные, то есть несемантические, так и семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

(2) Несемантические предикаты могут быть не всюду определенными, но семантические предикаты всюду определены.

(3) Стандартные предикаты являются всюду определенными, семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

Если как стандартные, так и семантические предикаты всюду определены, мы имеем дело с ортодоксальным, классическим вариантом семантики. Семантически замкнутые языки с всюду определенными стандартными и семантическими предикатами, как известно, противоречивы.

Начнем с анализа семантик первого вида¹. Схема, определяющая условия адекватности предиката «быть истинным высказыванием», в этом случае меняет свой смысл. Меняет свой смысл эквивалентность, выступающая в классической схеме Тарского.

С нашей точки зрения, анализ семантик первого вида приводит к сильной трехзначной логике С.Клини [2]. В качестве экспликации эквивалентности в схеме Тарского можно ввести клиниевскую эквиваленцию \cong , ее можно задать таблично:

\cong	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

Отметим, что и Клини не рассматривал u как значение истинности того же ранга, что t или f ².

Аналогично можно ввести импликацию \rightarrow^K , такую, что $A \cong B$ тогда и только тогда, когда $A \rightarrow^K B$ и $B \rightarrow^K A$. Она определяется следующей трехзначной матрицей:

\rightarrow^K	t	f	u
t	t	f	f
f	t	t	t
u	t	f	t

то есть получается из матрицы для импликации трехзначной логики Лукасевича заменой u на f в значениях таблицы.

Возможна формализация отношений логического следования, имеющих место в такого типа семантиках, расширенных введением эквиваленции \cong . Так, формализацией отношения следования типа $[a] \varphi_T(A) \rightarrow^K \varphi_T(B)$ в логике с истинностными провалами является логика Хао Вана, в секвенциальной форме (вместе с клиниевской импликацией) – система \mathbf{G}_1 [4, с. 181–182]. Можно расширить систему \mathbf{G}_1 , обогатив ее правилами для \rightarrow^K и \cong .

¹ При этом предполагается, что объемы и антиобъемы предикатных знаков не пересекаются.

² «Но может не существовать алгоритм для решения, определено или нет $Q(x)$ при данном x ... Поэтому только классически, но не интуиционистски можно утверждать закон исключенного четвертого (утверждающий, что для каждого x значение $Q(x)$ есть t, f или u). Таким образом, третье “значение истинности” u в нашей теории выступает не наравне с двумя другими t и f ». « u означает только отсутствие информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть t или f » [2, с. 297].

Обозначим эту систему вместе с правилами для клиниевской импликации \mathbf{GKI}_1 .

Для интересующей нас эквивалентности \cong правила введения будут следующими (опять-таки в системе с истинностными провалами!):

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Theta, B \quad \sim B, \Gamma \vdash \Theta, \sim A \quad B, \Gamma \vdash \Theta, A \quad \sim A, \Gamma \vdash \Theta, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \cong B}$$

$$\frac{\sim A, \sim B, \Gamma \vdash \Theta \quad A, B, \Gamma \vdash \Theta \quad \Gamma \vdash \Theta, A, \sim A, B, \sim B}{A \cong B, \Gamma \vdash \Theta}$$

Мы не формулируем здесь правил для введения отрицания эквиваленции \cong справа и слева. При желании эти правила можно извлечь из семантических условий. Безусловно, детальное исследование обобщенного исчисления \mathbf{GKI}_1 с дополнительной связкой \cong является интересной и важной задачей.

Нас интересует схема, которой должен удовлетворять предикат «истинное высказывание». Можно показать, что в логике с истинностными провалами, обогащенной правилами для \cong , т.е. \mathbf{GKI}_1 , из $A \cong \sim A$ не следует $A \& \sim A$.

Таким образом, в системе с не всюду определенными предикатами, в том числе и с не всюду определенным предикатом «быть истинным высказыванием», формулировка предложения, говорящего о своей собственной неистинности, не приводит к противоречиям.

Можно ввести понятие K -определимости не всюду определенных отношений и свойств (классов) [4, с. 112]. Не всюду определенное n -местное отношение R K -определимо, если и только если существует такая формула $A(x_1, \dots, x_n)$, что выполняются следующие условия: для любой n -ки объектов a_1, \dots, a_n , где их имена ν_1, \dots, ν_n ,

$$R(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow A(\nu_1, \dots, \nu_n) \in K;$$

$$\neg R(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \sim A(\nu_1, \dots, \nu_n) \in K.$$

R не определено на $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \Rightarrow A(\nu_1, \dots, \nu_n) \notin K \wedge \sim A(\nu_1, \dots, \nu_n) \notin K$.

Интересно, что в случае с не всюду определенными предикатами теорема о K -неопределимости класса K не имеет места.

В следующем варианте рассматриваемых семантик несемантические предикаты могут быть не всюду определены, но семантические являются всюду определенными. В этом случае, на наш взгляд, может быть применен подход Д.А.Бочвара.

Д.А.Бочвар различает внутренние и внешние связки. Внутрен-

ние связки – это связки, которые С.Клини позже назвал слабыми трехзначными связками.

Помимо внутренних связок в логике Бочвара имеется внешняя связка. Д.А.Бочвар обозначает ее знаком \vdash . Но поскольку этот знак «занят», вслед за Херцбергером будем обозначать ее буквой h (от слова horizontal). Херцбергер называет эту связку бочваровско-фрегевской [6]. Семантические условия для h следующие:

$$\begin{aligned}\varphi_T(hA) &= \varphi_T(A); \\ \varphi_F(hA) &= \varphi_T(A)',\end{aligned}$$

где $\varphi_T(A)$ и $\varphi_F(A)$ – область и антиобласть высказывания A , соответственно.

Отметим, что введенная нами выше импликация \subset может быть определена через h и импликацию Лукасевича \rightarrow^L . $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $h(A \rightarrow^L B)$. В этом случае предикат истинности аналогичен операции внешнего утверждения Д.А.Бочвара. Его смысл следующий: A истинно тогда и только тогда, когда A определено и имеет место A :

$$\begin{aligned}\varphi_T(Tr(\lceil A \rceil)) &= \varphi_T(A); \\ \varphi_F(Tr(\lceil A \rceil)) &= \varphi_T(A)', \\ \text{где } \lceil A \rceil & - \text{ имя высказывания } A.\end{aligned}$$

При предыдущем подходе $\varphi_F(Tr(\lceil A \rceil)) = \varphi_F(A)$.

Схема, которой должен удовлетворять всюду определенный предикат «быть истинным высказыванием», должна быть видоизменена, например, следующим образом:

если X определено, то X истинно, если и только если p ;
если X не определено, то X не истинно.

Вместо « p » мы подставляем высказывание, а вместо « X » – его имя.

Представляет интерес видоизменить условие адекватности Тарского следующим образом:

X истинно, если и только если $h(p)$.

В этом случае семантическое понятие Tr будет аналогом объектной связки h .

В третьем варианте несемантические предикаты являются всюду определенными, а семантические – не всюду определенными. Для анализа условий истинности высказываний в такого рода семантиках и, соответственно, характера и роли схемы Тарского особый интерес, с нашей точки зрения, представляет подход, при котором расширяется обычный, стандартный объектный язык L за счет введения особого предиката **T**-предиката истинности.

В свое время А.Тарский показал, что стандартное понятие

истинности можно сформулировать в теоретико-типовой системе уровня $n+1$ для языка уровня n . Целый ряд авторов в 50-е и 60-е годы исследовали эту проблему (Дж.Кемени, Хао Ван, В.Куайн)³.

При рассмотрении семантически замкнутых языков все авторы исходят из требования, чтобы было единое понятие истинности, а не особые для каждого уровня. При итерации **T** может оказаться, что самоприменимое предложение формулируется не на конечном уровне, а на достаточно высоком трансфинитном уровне. Идеи итерации выдвигались уже в конце 60-х годов, однако, новый стимул к их исследованию был дан работами К.Крипке, Р.А.Мартина и П.В.Вудруффа.

Остановимся несколько подробнее на подходе С.Крипке [3]. Все несемантические предикаты интерпретируются обычным образом. Предикат же истинности **T**, введенный в объектный язык, в отличие от остальных предикатов объектного языка, не всюду определен. Ему приписываются объем S_1 и антиобъем S_2 , при этом пересечение объема и антиобъема пусто, то есть $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; в то же время объединение S_1 и S_2 не равно универсуму.

Поскольку рассматриваемый язык содержит не всюду определенный предикат, в качестве логических связок естественно рассматривать сильные клиневские связки и кванторы. Приписывание значений сложным выражениям, в том числе содержащим предикат **T**, осуществляется индуктивно.

Выражение вида $\mathbf{T}(A)$, где A – геделев номер формулы A , принадлежит объектному языку. Важно отметить, что различаются предикат истинности объектного языка **T** и истинностная оценка высказывания в метаязыке, например $Tr(A)$ или $Tr(\mathbf{T}(A))$. Соответственно, конвенция Тарского может быть сформулирована как в объектном языке, так и в метаязыке. Поскольку **T** не всюду определен, схема в объектном языке формулируется в виде:

$$(1) \mathbf{T}(\ulcorner A \urcorner) \cong A^4,$$

и при этом, как отмечалось, из $A \cong \sim A$ не следует $A \& \sim A$.

С.Крипке строит семантику индуктивным методом⁵. $\alpha \models A$ – в нашей терминологии – означает, что формула A истинна на уровне α . Индуктивный уровень, на котором истинна эквивалентность $\mathbf{T}(A) \cong A$ (уровень, на котором выполняется условие (1)), будем называть *фиксированной точкой* (неподвижной точкой).

Введенная семантика позволяет выделить различные типы

³ См. обзор этой проблемы в [5].

⁴ Напомним, что $A \cong B$ истинна, если A и B истинны, или A и B ложны, или A и B не определены, и ложна во всех остальных случаях.

⁵ Репрезентацию и реконструкцию этой семантики см. [4, с. 205–209].

предложений, содержащих предикат истинности **T**. Предложение *A* является *обоснованным* (grounded), если и только если оно имеет истинностное значение в наименьшей фиксированной точке; в противном случае *A* не обосновано. К числу необоснованных предложений относятся, например, такие самоприменимые предложения, которые говорят о своей собственной неистинности – «я не истинно» и о своей собственной истинности – «я истинно».

На базе проведенных семантических конструкций можно уточнить понятие парадоксального предложения, выявить его отличие от других самоприменимых предложений, включающих предикат истинности. Предложение *A* *парадоксально*, если оно не имеет истинностного значения ни в одной фиксированной точке. Всякое парадоксальное предложение необоснованно, но не наоборот.

Можно ввести и другие характеристики предложений, позволяющие провести важные разграничения в исследовании предложений, содержащих предикаты истинности и ложности. Так, вводятся понятия внутренней фиксированной точки и внутреннего истинностного значения [4, с. 209]. На их основе проводятся более тонкие различия самоприменимых предложений с предикатом «истинно». Предложение, утверждающее, что оно само или его отрицание истинно, является примером необоснованного, непарадоксального предложения, имеющего внутреннее истинностное значение. Предложение «Я истинно или ложно» необоснованно, но внутренне истинно; предложение «Я не истинно и не ложно» необоснованно, но внутренне ложно.

Язык, казалось бы, становится *семантически замкнутым*, возможно построение самоприменимых высказываний, утверждающих собственную истинность или неистинность, однако *парадокс не возникает*. Это достигается за счет того, что *предикат истинности не является всюду определенным*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карнап Р. Значение и необходимость. М., 1959.
2. Клини С. Введение в метаматематику. М., 1957.
3. Kripke S. Outline of a theory of truth // The Journal of Philosophy. 1975. Vol. 92. P. 690–715.
4. Смирнова Е. Д. Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996.
5. Смирнова Е. Д., Таванец П. В. Семантика в логике // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.
6. Herzberger H. G. Truth and Modality in semantically closed languages // Martin R. M. (ed.). The Paradox of the Liar. Yale, 1990. P. 29.