**А.В.Чагров**

# ФОРМАЛЬНАЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА А.ВИССЕРА И ЕЕ РАСШИРЕНИЯ*

**Abstract.** *Extensions of formal propositional logic by A.Visser (1980) are discused. There is a continuum of such logics which are axiomatized by one-variables formulas. There is an extension of formal propositional logic which is closed under modus ponens, is of width 2, but is not Kripke-complete.*

Одним из главных источников возникновения неклассических логик было и по сей день остается «недовольство» свойствами связок классической логики. Подчеркнем, что именно пропозициональных связок, а не, скажем, кванторов или иных конструкций, используемых при построении формальных логических языков. Даже различие свойств кванторов, к примеру, у интуиционистской и классической логик связано с тем, что в классической логике кванторы всеобщности и существования взаимосвязаны посредством отрицания, но именно классического отрицания, отсутствующего в логике интуиционистской.

Попытки задавать стандартные пропозициональные связки иначе, нежели с помощью классических таблиц истинности или иными эквивалентными способами, с целью уловить их конструктивное осмысление, привели к аксиоматическому определению логических систем типа интуиционистской (конструктивной) логики, модальных логик, истолковывающих интуиционистскую логику, и тому подобные. В частности, при этих подходах предлагается понимать пропозициональные связки «в сильном духе», как в интуиционистской логике, или в виде усиления классических связок посредством навешивания дополнительных логических операторов типа модальностей «необходимо», «установимо», «доказуемо» и тому подобное, как это делается погружением в модальные логики. При этом два подхода – непосредственное описание сильных пропозициональных связок семантическим определением или заданием их свойств аксиоматическим путем, с одной стороны, и наложение ограничений на использование классических вариантов навешиванием дополнительных операторов – часто сочетаются, хотя не всегда видно как получить желаемое описание при одном подходе, если уже есть соответствующее описание при другом.

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-06-80115.

В качестве примера такой ситуации напомним, что имеются так называемые логики реализуемости, дающие некоторые варианты конструктивной логики (то есть некоторые из так называемых суперинтуиционистских логик), но до сих пор не предложено какой-либо разумной семантики типа реализуемости для модальных логик, являющихся модальными напарниками логики реализуемости. Другими словами, о логике реализуемости пока разумнее говорить в терминах именно суперинтуиционистских логик, нежели в терминах модальных логик на классической основе, о чем можно сожалеть, так как погружения суперинтуиционистских логик в модальные иногда дает техническое преимущество при решении проблем, связанных с самими суперинтуиционистскими логиками.

Однако и обратная проблематика – непосредственное описание логических систем с сильными пропозициональными связками без того, чтобы считать их фрагментами систем с более богатым по выразительным свойствам языком – достойна внимания. Здесь уместно вспомнить параллельную, но в определенном смысле крайнюю ситуацию, выраженную где-то встречавшимися автору словами вроде «Да, натуральные числа выразимы в теории множеств, но вряд ли исследователя свойств натуральных чисел может это порадовать, поскольку теория множеств нисколько не помогает изучать свойства натуральных чисел»; более того, можно добавить, что погружение теории натуральных чисел в теорию множеств отчасти и вредно, поскольку создает опасную иллюзию, что для натуральных чисел есть по крайней мере стандартная (естественная!) модель (верить или нет в непротиворечивость представлений о ней – важный, но другой вопрос), в то время как для теории множеств до сих пор не предъявлено какой-либо убедительной естественной модели (и вопрос о непротиворечивости здесь существенно более труден).

Здесь мы обратимся к не так давно созданной А.Виссером [2] логической системе, названной им **FPL** (от formal propositional logic, что ввиду неинформативности не вполне удачно, но можно было бы считать эту аббревиатуру сокращением названия fixed point logic, что, кстати, соответствовало бы и названию статьи А.Виссера – A propositional logic with explicit fixed points). Эта система была сформулирована им в виде исчисления натурального вывода. По сути она получается ослаблением интуиционистской системы путем удаления правила modus ponens (в результате получается система, названная А.Виссером **BPL** от basic propositional logic), а затем усилением путем включения в систему нового, ни классически, ни интуиционистски не приемлемого правила, позволяющего переходить от формулы вида $((\perp \to \perp) \to A) \to A$ к формуле $(\perp \to \perp) \to A$. Это последнее правило очень похоже на правило Леба в модальной логике доказуемости **GL**, поэтому и мы вслед за А.Виссером будем так его называть.

Хотя вопросы построения исчислений непосредственно не входят в круг интересующих нас здесь задач, отметим, что оба исчисления – и **BPL**, и **FPL** – обладают весьма необычными свойствами по отношению к столь привычному логикам правилу modus ponens. Если добавить modus ponens к **BPL**, получится исчисление, аксиоматизирующее интуиционистскую пропозициональную логику, а если к **FPL** – получится противоречивое исчисление, то есть исчисление, в котором выводимы все формулы. Это отчасти связано с тем, что в обоих исчислениях есть правило введения импликации («теорема о дедукции»), но не выводима формула, формально выражающая modus ponens – $A \,\&\, (A \to B) \to B$. С другой стороны, обе логики как множества формул, выводимых в исчислениях **BPL** и **FPL**, замкнуты относительно правила modus ponens. Это необычное свойство приводит нас к вопросу: какое множество формул называть расширением логики **BPL** и/или **FPL**. Скажем, в случае интуиционистской логики ответ дается обычно так: расширением ее является всякое множество формул, содержащее все интуиционистски выводимые формулы и замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens. Но ведь в случае интуиционистской логики таких необычных свойств правило modus ponens не имеет.

Мы не будем здесь окончательно решать вопрос, что называть расширением логики **FPL**, а о расширениях **BPL** не будем говорить вовсе. Однако те множества формул, о которых будет идти речь, по нашему мнению, расширениями **FPL** являются.

Для наших целей будет удобно использовать семантическое описание множества формул, выводимых в **FPL**. Ввиду сходства этого описания с привычным семантическим заданием интуиционистской логики, это можно сделать довольно коротко, указав необходимые изменения. При этом постараемся обойтись словесным описанием нужных нам конструкций.

Напомним, что интуиционистская логика может быть задана как множество формул истинных в конечных шкалах Крипке, являющихся частичными порядками (то есть отношение достижимости в них является транзитивным, рефлексивным и антисимметричным). Формулы в шкале оцениваются с помощью оценок (означиваний), сопоставляющих каждой пропозициональной переменной множество элементов шкалы (миров, иными словами), являющееся наследственным, то есть если в такое множество попал некоторый мир, то и все достижимые из него также попадают. Значение формулы в мире (отношение «в мире $\alpha$ истинна формула φ») при данной оценке задается индукцией по построению формулы: константа $\perp$ («ложь») не является истинной ни в одном мире; в мире $\alpha$ истинна пропозициональная переменная $p$, если оценкой переменной $p$ сопоставляется множество, содержащее мир $\alpha$; конъюнкция истинна в мире $\alpha$, если в этом мире истинны оба конъюнктивных члена; дизъюнкция истинна в мире $\alpha$, если в этом мире истинен хотя бы один из дизъюнктивных членов; импликация истинна в мире $\alpha$, если для всякого мира $\beta$, достижимого из $\alpha$, из того, что в $\beta$ истинна посылка импликации, следует, что в $\beta$ истинно и заключение этой импликации. (Отметим, что специфика шкалы здесь проявляется только в пункте об импликации.) Наконец, формула считается истинной в шкале, если она истинна в каждой точке этой шкалы при любой оценке.

Если в определениях предыдущего абзаца внести ровно одно изменение – в наших конечных шкалах вместо частичного порядка постулируем строгий частичный порядок (то есть отношение достижимости в них является транзитивным, иррефлексивным и антисимметричным), то множество формул, истинных во всех получившихся шкалах, и будет множеством формул, выводимых в **FPL**. Хотя нас интересует именно эта логика, для полноты картины отметим, что если мы отменим при последнем изменении требование конечности шкал и/или отменим какие-либо упоминания о рефлексивности и иррефлексивности (в этом случае отношение достижимости окажется предпорядком), то множество формул, истинных в так получившихся шкалах, будет множеством формул, выводимых в **BPL**.

Вернемся к вопросу, что считать расширением **FPL**. Один из возможных ответов состоит в том, что мы задаем расширение как множество формул, истинных в некотором классе семантических структур самой **FPL**, ну и быть может, наложим требование замкнутости этого множества относительно каких-либо правил вывода. Одним из таких правил представляется несомненным подстановка, а что касается других, то здесь мы будем говорить только о modus ponens. Следует, конечно, иметь в виду, что конечными строго упорядоченными шкалами не исчерпываются возможности описания **FPL**, она имеет и алгебраическую семантику, и ее реляционный эквивалент – семантику обобщенных шкал.

Обобщенной шкалой назовем строго упорядоченную (не обязательно конечную!) шкалу с некоторым фиксированным семейством наследственных множеств, которое замкнуто относительно следующей операции: если в качестве оценки выбирать сопоставление переменным множеств этого семейства, то для всякой формулы множество миров, в которых эта формула истинна, будет элементом этого семейства. Истинность в обобщенных шкалах определяется так же, как и выше, за одним исключением: оценки всегда выбираются так, что переменным сопоставляются множества миров из фиксированного для этой шкалы семейства. Легко видеть, что если в обобщенной шкале нет бесконечных возрастающих цепей миров, то в ней истинны все формулы из **FPL**, что, впрочем, не исчерпывает всех обобщенных шкал, в которых истинны все формулы из **FPL**. Если обобщенная шкала такова, что фиксированное семейство наследственных множеств состоит из всех ее наследственных множеств, то эту шкалу будем называть шкалой Крипке. В случае шкал Крипке фиксированное семейство наследственных множеств можно не упоминать, поскольку берутся все такие множества.

Теперь в данной статье определяем расширение **FPL** (другими словами, логикой, расширяющей **FPL**) как множество формул, истинных в некотором классе обобщенных шкал, не содержащих бесконечных возрастающих цепей, замкнутое относительно modus ponens. Несложно понять, что если такое расширение непротиворечиво (то есть не есть множество всех формул), то задающий его класс обобщенных шкал бесконечен или содержит бесконечные шкалы. Всякое расширение **FPL** можно «аксиоматизировать» следующим образом: если Γ – некоторое множество формул, то **FPL** + Γ – минимальное по включению расширение, содержащее Γ (множество дополнительных аксиом).

Для сравнения заметим, что если в предыдущем абзаце мы используем обобщенные интуиционистские шкалы, которые получатся наложением требования рефлексивности вместо иррефлексивности, то замкнутости относительно modus ponens можно будет не требовать, поскольку она будет выполняться автоматически, причем заданными окажутся в точности все суперинтуиционистские логики. Это отчасти оправдывает принятое нами здесь определение расширение **FPL**.

Отметим два хорошо известных свойства суперинтуиционистских логик. Первое: существует лишь счетное множество суперинтуиционистских логик, аксиоматизируемых добавлением к интуиционистской логике аксиом от одной переменной. Второе: если суперинтуиционисткая логика задается некоторым классом обобщенных шкал конечной ширины, ограниченной некоторым числом, скажем $m$ (такие логики называются логиками ширины $m$), то эта логика задается шкалами Крипке, то есть полна по Крипке.

(Напомним, что ширина шкалы – это максимальная мощность множеств, состоящих из попарно несравнимых миров.)

С расширениями **FPL** ситуация иная.

**Теорема 1.** *Существует континуум расширений* **FPL** *формулами от одной переменной.*

Для доказательства можно взять формулы
$\varphi_n = ((\bot\to\bot)^{n+1}\bot \;\&\; p \;\to (\bot\to\bot)^n\bot) \vee ((\bot\to\bot)^{n+1}\bot \;\to (\bot\to\bot)^n\bot \vee p)$,
где формулы $(\bot\to\bot)^m\bot$ определяются индукцией по $m$:

$$(\bot \to \bot)^0\bot = \bot,\quad (\bot \to \bot)^{m+1}\bot = (\bot \to \bot) \to (\bot \to \bot)^m\bot.$$

Несложно показать, что если $I$ и $J$ – различные подмножества множества натуральных чисел, то **FPL** + $\{\varphi_n : n \text{ из } I\}$ и **FPL** + $\{\varphi_n : n \text{ из } J\}$ различны. Это доказывается с помощью шкал Крипке $F_n$ логики **FPL** следующего вида: в качестве миров берутся натуральные числа, причем число $n$ имеет двойника, обозначим который $n'$ (считаем, что $n$ и $n'$ не отличаются ничем, кроме обозначений), а отношение достижимости – из большего числа достижимо меньшее (таким образом, $n$ и $n'$ не сравнимы). Легко видеть, что при всяком $m$ отличном от $n$ формула $\varphi_m$ истинна в шкале $F_n$, в то время как $\varphi_n$ в шкале $F_n$ опровергается в мире $n + 1$ при выборе в качестве оценки переменной $p$ множества миров $\{n, n - 1,\ldots, 1, 0\}$.

Небольшой модификацией приведенного доказательства – нужно брать логики, определяемые классами шкал вида $\{F_n : n \text{ из } I\}$, а с помощь формул $\varphi_n$ обосновывать их различие при различных индексных множествах $I$ – доказывается

**Теорема 2.** *Существует континуум расширений* **FPL** *ширины не более 2.*

В этом, в общем-то, нет ничего удивительного. В суперинтуиционистских логиках справедлив аналог теоремы 2. Однако семейство суперинтуиционистских логик ширины 1 (логики ширины 1 называют линейными, а в случае суперинтуиционистских логик еще и цепными) счетно, в то время как для расширений **FPL** справедлива

**Теорема 3.** *Существует ровно одно непротиворечивое линейное расширение* **FPL**.

Этим расширением является логика, задаваемая шкалой, получаемой из любой шкалы $F_n$ удалением двойника мира $n$.

Теперь обратимся к проблеме полноты по Крипке. Как уже было сказано, всякая суперинтуиционистская логика конечной ширины обладает полнотой по Крипке. Однако для расширений **FPL** оказывается верной

**Теорема 4.** *Существуют неполные по Крипке расширения* **FPL**.

Доказательство основано на примере, обнаруженном авторами [1]: оказалось, что существуют табличные расширения, которые не полны по Крипке. Это выглядит довольно удивительно ввиду того, что в изучавшихся до сих пор классах неклассических логик, будь то суперинтуиционистские, модальные, многомодальные, всякая табличная логика полна по Крипке. Конечно, в силу отмеченного выше обстоятельства логика [1] не замкнута относительно правила modus ponens, однако с помощью нехитрого приема, по сути использованного в доказательстве теорем 1 и 2, этого обстоятельства удается избежать (потеряв, конечно, табличность). Прием этот состоит в том, что, скажем, для доказательства теоремы 2 нам было бы достаточно рассматривать варианты шкал вида $F_n$, в которых отсутствуют миры $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ и т.д.; их введение и обеспечивает замкнутость определяемых в том доказательстве логик относительно modus ponens.

Обратимся, однако, к примеру неполной логики. Он задается следующей обобщенной шкалой: в шкале $F_0$ в качестве фиксированного семейства наследственных множеств берутся все, кроме множества $\{0'\}$ (то есть множества, состоящего из двойника нуля); То, что это обобщенная шкала, проверятся рутинными вычислениями. Пусть $L$ – логика, задаваемая этой шкалой. Теперь обратим внимание, что в этой обобщенной шкале опровергается формула $\varphi_0$ (а потому $\varphi_0$ не принадлежит $L$), для опровержения которой в обобщенной шкале и, в частности, в шкале Крипке необходимо наличие мира, из которого достижимы два различных мира, из которых ничего не достижимо, однако формулу $(p \to q) \vee (q \to p)$, как легко убедиться, опровергнуть невозможно, а значит логике $L$ она принадлежит. Теперь допустим, что логика $L$ полна по Крипке. Тогда, чтобы опровергать не принадлежащую ей формулу $\varphi_0$, класс ее шкал Крипке должен содержать шкалу, в которой есть мир, из которого достижимы два разных мира, из которых ничего не достижимо. Назовем эти три мира соответственно $a$, $b$, $c$. Теперь взяв в качестве оценки переменной $p$ множество $\{b\}$, а в качестве оценки $q$ – множество $\{c\}$, мы получаем, что формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ опровергается в мире $a$. Получили противоречие, которое показывает, что допущенное нами неверно, то есть на самом деле логика $L$ полной по Крипке не является.

Мы привели один пример. Совместив его конструкцию с доказательством теоремы 2, можно получить континуум таких примеров. Обратим внимание, что хотя **FPL** была в [2] выбрана так, что она погружается логику доказуемости **GL** переводом, при котором модальность навешивается на все атомарные подформулы и все подформулы, у которых главная связка – импликация, и мы, вводя определение расширения **FPL**, пытались имитировать определение суперинтуиционистских логик, логики, о которых идет речь в теореме 4, не погружаются указанным переводом ни в одно (!) расширение логики **GL**. Такого эффекта не наблюдается для суперинтуиционистских логик. Образно говоря, **FPL**, являющаяся фрагментом **GL**, имеет больше расширений, чем сама **GL**. Впрочем, такого рода эффекты известны: импликативный фрагмент интуиционистской логики имеет расширения, не являющиеся импликативными фрагментами никаких суперинтуиционистских логик.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Suzuki Y., Wolter F., and Zakharyaschev M.* Speaking about transitive frames in propositional languages // Journal of Logic, Language, and Information. 1998. Vol. 7. P. 317–339.
2. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155–175.